S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 19, №1, стр. 326–331 (2022) УДК 519.61
DOI 10.33048/semi.2022.19.027 MSC 65F20

О БЛИЗОСТИ КРИТЕРИЕВ НЕСОВМЕСТНОСТИ ИСХОДНОЙ И ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

В.Н. БАБЕНКО

Abstract. The article considers the question of the influence of perturbations introduced into the matrix and the right side of a system of linear algebraic equations of a general form on the value of its inconsistency criterion. In this paper, due to the use of a pseudoinverse matrix, a new, more accurate estimate of the proximity of the incompatibility criteria for the original and perturbed systems is established.

Keywords: rank, kernel and image of a matrix, pseudoinverse matrix, singular value decomposition of a matrix, condition number of a matrix.

1. Введение

Пусть A — матрица размерности $m \times n$, и r — ее ранг (обозначение $rk(A)$). Обратимся к задаче решения систем линейных уравнений

$$Ax \cong y. \tag{1}$$

Здесь символ $\cong$ означает, что в общем случае система (1) может быть как совместной, так и несовместной.

Известно, что вектор $y \in R^m$ представим в виде суммы: $y = \bar{y} + \tilde{y}$, где $\bar{y} \in R(A)$, $\tilde{y} \in N(A^T)$, здесь $R(A), N(A^T)$ — образ матрицы A и ядро матрицы A^T, соответственно [1]. Пусть x — псевдорешение системы (1), то есть x удовлетворяет равенству $Ax = \bar{y}$. Вектор x представим в виде $x = \bar{x} + \tilde{x}$, где $\bar{x} \in R(A^T), \tilde{x} \in N(A)$. Нормальное псевдорешение $\bar{x}$ системы (1) определяется формулой $x = A^+y$, где A^+ — псевдообратная матрица [2].

Babenko, V.N., On the closeness of the incompatibility criteria for the original and perturbed systems of equations.

Поступила 21 января 2022 г., опубликована 23 июня 2022 г.

Норму вектора x определим формулой:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

Под нормой матрицы мы будем понимать ее операторную норму

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\|\neq 0} \|Ax\| \, / \, \|x\| \, .$$

Величину $c(A) = \|A\| \, \|A^+\|$ называют числом обусловленности матрицы A.

Обратимся к сингулярному разложению матрицы $A = P\Sigma Q^T$, где P и Q — ортогональные матрицы,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

— блочно-диагональная матрица, $\Sigma_r = diag\,\{\sigma_1, ...\sigma_r\}$, O – нулевые матрицы соответствующих размерностей. Сингулярные числа удовлетворяют неравенствам $\sigma_1 \geq ... \geq \sigma_r > 0$. Согласно сказанному мы можем записать

$$c(A) = c_r = \sigma_1/\sigma_r.$$

Определение 1. *Величина* $\chi(A, y) = \|\tilde{y}\|/\|\bar{y}\|$ *называется критерием (параметром) несовместности системы* (1).

2. Критерий несовместности возмущенной системы уравнений

Осуществляя вычисление нормального псевдорешения $\bar{x}$ на ЭВМ мы неизбежно будем вносить погрешности в результаты вычислений, которые с помощью обратного анализа погрешностей можно свести к эквивалентному возмущению матрицы и правой части системы (1). Согласно сказанному, можно считать, что вместо системы (1) мы решим возмущенную систему

$$(A + B)u \cong y + v. \tag{2}$$

Здесь B и v – возмущения матрицы A и правой части y. Нормальное псевдорешение $\bar{u}$ системы (2) определяется формулой

$$\bar{u} = (A + B)^+(y + v).$$

Оценки близости нормальных псевдорешений $\bar{u}$ и $\bar{x}$ можно найти в [3–5]. Обращаясь к [4, стр. 412], выпишем оценку близости критериев несовместности систем (1) и (2)

$$|\chi(A + B, y + v) - \chi(A, y)| \leq \frac{\frac{2(\alpha+\beta)c_r(1+\gamma)}{1-2\alpha c_r}\sqrt{\frac{2\gamma^2+1}{2}} + \beta\gamma\sqrt{1+\gamma^2}}{1 - \beta\sqrt{1+\gamma^2} - \frac{2(\alpha+\beta)c_r}{1-2\alpha c_r}\sqrt{\frac{2\gamma^2+1}{2}}}, \tag{3}$$

где величины α, β и γ подчинены неравенствам: $\|B\| \leq \alpha \, \|A\|$, $\|v\| \leq \beta \, \|y\|$ и $\|\tilde{y}\| \leq \gamma \, \|\bar{y}\|$.

Рассмотрим прямую задачу: в соотношении $Ax = y$ матрица A и вектор x заданы, требуется вычислить вектор y. Вследствие возмущения матрицы A вместо вектора y мы получим вектор

$$y + \delta y = (A + B)x,$$

где матрица возмущений B удовлетворяет неравенству $\|B\| \leq \alpha \|A\|$. Тогда для возмущения δy справедлива оценка

$$\|\delta y\|/\|y\| \leq c(A)\alpha. \tag{4}$$

Обратимся теперь к обратной задаче: в соотношении $Ax = y$ матрица A и вектор y заданы, требуется вычислить вектор x. При тех же ограничениях на матрицу возмущения B вместо вектора x мы получим вектор $x + \delta x$, удовлетворяющий соотношению

$$(A + B)(x + \delta x) = y.$$

Для этой системы верна оценка:

$$\|\delta x\|/\|x\| \leq c(A)\alpha/(1 - c(A)\alpha), \tag{5}$$

которая, очевидно, справедлива при выполнении условия $1 - c(A)\alpha > 0$.

В результате сопоставления неравенств (4) и (5) с неравенством (3) возникает вопрос: «Можно ли упростить структуру выражения, стоящего в правой части (3)?». Желание разрешить поставленный вопрос побудило автора привести соответствующее исследование. Результатом исследования явилась

Теорема 1. *Пусть для систем уравнений* (1) *и* (2) *выполнены соотношения:*

$$\|B\| \leq \alpha \|A\|, \tag{6}$$

$$\|v\| \leq \beta \|y\|, \tag{7}$$

$$1 - c_r\alpha > 0. \tag{8}$$

Если

$$r \leq n < m, \tag{9}$$

$$rk(A + B) = r, \tag{10}$$

$$\|\tilde{y}\| \leq \gamma \|\bar{y}\|. \tag{11}$$

$$1 - (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1 + \gamma^2} > 0. \tag{12}$$

то справедлива оценка

$$|\chi(A + B, y + v) - \chi(A, y)| \leq \frac{(1 + \gamma)(\beta + c_r\alpha)\sqrt{1 + \gamma^2}}{1 - (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1 + \gamma^2}} \tag{13}$$

Доказательство. Введем дополнительные более компактные обозначения:

$$f = y + v, F = A + B, \bar{f} = FF^+y, \tilde{f} = (I - FF^+)f.$$

Для векторов $\bar{f}$ и $\tilde{f}$, очевидно, справедливы цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= (I - FF^+)f = ((I - AA^+) + (AA^+ - FF^+))(y + v)\\ &= \tilde{y} + v - AA^+v + (AA^+ - FF^+)y + AA^+v - FF^+v,\\ \bar{f} &= FF^+f = (AA^+ + (FF^+ - AA^+))(y + v)\\ &= AA^+y + AA^+v + (FF^+ - AA^+)y + FF^+v - AA^+v,\end{aligned}$$

из которых следует

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \tilde{y} + (I - FF^+)v + (AA^+ - FF^+)y,\\ \bar{f} &= \bar{y} + (FF^+ - AA^+)y + FF^+v.\end{aligned}$$

Из последних соотношений следуют четыре неравенства

$$\left\|\tilde{f}\right\| \leq \|\tilde{y}\| + \|v\| + \left\|AA^+ - FF^+\right\| \|y\|, \tag{14}$$

$$\left\|\bar{f}\right\| \geq \|\bar{y}\| - \|v\| - \left\|FF^+ - AA^+\right\| \|y\|, \tag{15}$$

$$\left\|\tilde{f}\right\| \geq \|\tilde{y}\| - \|v\| - \left\|AA^+ - FF^+\right\| \|y\|, \tag{16}$$

$$\left\|\bar{f}\right\| \leq \|\bar{y}\| + \|v\| + \left\|FF^+ - AA^+\right\| \|y\|. \tag{17}$$

Из определения 1 и неравенств (14) и (15) вытекает:

$$\chi(F,f) \leq \frac{\|\tilde{y}\| + \|v\| + \|AA^+ - FF^+\| \|y\|}{\|\bar{y}\| - \|v\| - \|FF^+ - AA^+\| \|y\|} \tag{18}$$

$$= \frac{\chi(A,y) + \|v\|/\|\bar{y}\| + \|AA^+ - FF^+\| \|y\|/\|\bar{y}\|}{1 - \|v\|/\|\bar{y}\| - \|AA^+ - FF^+\| \|y\|/\|\bar{y}\|}.$$

В [5] установлено, что из (6), (8), (9) и (10) следует неравенство

$$\left\|AA^+ - FF^+\right\| \leq c_r\alpha. \tag{19}$$

Для отношения $\|v\|/\|\bar{y}\|$ согласно (7) и (11) справедлива цепочка отношений:

$$\|v\|/\|\bar{y}\| \leq \beta\|y\|/\|\bar{y}\| = \beta\sqrt{\|\bar{y}\|^2 + \|\tilde{y}\|^2}/\|\bar{y}\|$$

$$= \beta\sqrt{1 + \|\tilde{y}\|^2/\|\bar{y}\|^2} \leq \beta\sqrt{1+\gamma^2}.$$

Учитывая (19) и последнюю цепочку отношений в (18), запишем:

$$\chi(F,f) \leq \frac{\chi(A,y) + \beta\sqrt{1+\gamma^2} + c_r\alpha\sqrt{1+\gamma^2}}{1 - \beta\sqrt{1+\gamma^2} - c_r\alpha\sqrt{1+\gamma^2}} = \frac{\chi(A,y) + (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}}{1 - (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}}$$

$$= \left(\chi(A,y) + (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left((\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}\right)^k\right)$$

$$= \chi(A,y) + (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}$$

$$+ \left(\chi(A,y) + (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left((\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}\right)^k$$

$$\leq \chi(A,y) + (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}$$

$$+ \left(\gamma + (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}\right)\left((\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left((\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}\right)^k$$

$$= \chi(A,y) + (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2} + \frac{\left(\gamma + (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}\right)\left((\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}\right)}{1 - (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}}.$$

Окончательно будем иметь

$$\chi(F,f) \leq \chi(A,y) + (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}\left(1 + \frac{\gamma + (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}}{1 - (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}}\right). \tag{20}$$

Действуя аналогично, из неравенств (16) и (17) получим

$$\chi(F,f) \geq \chi(A,y) - (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}\left(1 + \frac{\gamma + (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}}{1 - (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}}\right).$$

Сопоставляя (20) с последним неравенством, будем иметь

$$|\chi(F,f) - \chi(A,y)| \leq (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}\left(1 + \frac{\left(\gamma + (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}\right)}{1 - (\beta + c_r\alpha)\sqrt{1+\gamma^2}}\right).$$

Очевидно, последнее соотношение справедливо при условии выполнения неравенства (12). Отсюда, возвращаясь к исходным обозначениям, приходим к неравенству (13). На этом доказательство теоремы завершается. □

3. Обсуждение результата

Сопоставляя оценки (6) и (3), мы видим их существенные структурные различия. Кроме того, очевидно превышение значений оценки (3) над значениями оценки (6). Степень их превышения проиллюстрируем примером, взятым из [4]. Введем обозначения: $\delta = |\chi(A+B, y+v) - \chi(A,y)|$, M, N – значения оценок критериев несовместности представленных в (6) и (3) соответственно.

Пример 1

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ y_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma = 2 * 10^{-4},$$

$$y_3 = 10^{-3}, \alpha = 10^{-5}, v_2 = 10^{-5},$$

тогда величины α, β и γ, определенные в (6), (7) и (11) примут следующие значения: $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 0.999999500000375 * 10^{-5}$, $\gamma = 10^{-3}$. При этих значениях величин σ, y_3, α, v_2, β и γ мы получили следующие результаты: $\delta = 0.5 * 10^{-13}$, $M = 0.5256 * 10^{-1}$, $N = 0.18643$.

Ниже для сравнения влияния величины c_r на значения оценок M и N представлена таблица.

c_r	1000	10000	11110	12500	14290	16670	20000	25000
N	0.03	0.547	0.678	0.892	1.303	2.416	16.50	
M	0.01	0.111	0.125	0.143	0.167	0.200	0.250	0.3336
$N - M$	0.02	0.436	0.554	0.750	1.138	2.217	16.25	

Из таблицы видно, что с ростом величины c_r различие значений оценок N и M также нарастает. При $c_r = 25000$ оценка N уже не попадает в интервал своей применимости (принимает отрицательное значение — точка разрыва функции $N(c_r)$ уже пройдена).

Замечание. Оценка (3) близости критериев несовместности исходной и возмущенной систем дана С. К. Годуновым в предположении, что матрица системы полного столбцевого ранга ($rk(A) = n$). Поэтому используемое при ее выводе ограничение $1 - c_r\alpha > 0$ влечет за собой выполнение равенства $rk(A+B) = n$. В этой статье допускается выполнение неравенства $rk(A) \leq n$, которое охватывает и случай $rk(A) = n$. Поэтому сравнение рассматриваемых оценок вполне корректно. Дополнительно должен сообщить, что используемое в моей статье неравенство $1 - c_r\alpha > 0$, если $rk(A) < n$, не всегда может обеспечить выполнение равенства $rk(A + B) = r$. Поэтому последнее требование в формулировке теоремы присутствует явно. Выполнение этих двух требований (в формулировке теоремы (8) и (10)) обеспечивает непрерывную зависимость нормального псевдорешения u системы (2) от возмущения B. Следует также сказать, что в оценке (3) указанная непрерывность обеспечивается уже выполнением неравенства (8).

Отметим, что представленная оценка может быть использована при решении на ЭВМ регрессионных уравнений, уравнений Фредгольма и других задач, приводящих к системам линейных алгебраических уравнений общего вида, для определения того, в коей мере построенная модель адекватно описывает решаемую задачу.

В заключение я хочу выразить благодарность и признательность С.К. Годунову за поддержку выполненной работы.

References

[1] G. Strang, *Linear algebra and its applications*, Academic Press, New York etc.„ 1976. Zbl 0338.15001

[2] A.E. Albert, *Regression and the Moore–Penrose pseudoinverse*, Mathematics in Science and Engineering, **94**, Academic Press, New York-London, 1972. Zbl 0253.62030

[3] R.J. Hanson, C.L. Lawson *Solving least squares problems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1974. Zbl 0860.65028

[4] S.K. Godunov, A.G. Antonov, O.P. Kirilyuk, V.I. Kostin, *Guaranteed precision in the solution of systems of linear equations in Euclidean spaces*, Nauka, Novosibirsk, 1988. Zbl 0665.65022

[5] V.N. Babenko, *On the structure of closeness estimates for pseudosolutions of initial and perturbed systems of linear algebraic equations*, Comput. Math. Math. Phys., **59**:9 (2019), 1399–1421. Zbl 1428.15002

Victor Nikolaevich Babenko
Military School named after General of the Army S.M. Shtemenko,
4, Krasina str.,
Krasnodar, 350063, Russia
Email address: rnibvd@mail.ru