S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 19, №1, стр. 348–359 (2022) УДК 512.542.7, 519.17
DOI 10.33048/semi.2022.19.030 MSC 05B25, 05E18

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЕРШИННО-ТРАНЗИТИВНЫХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ НАКРЫТИЙ ПОЛНЫХ ГРАФОВ, II

Л.Ю. ЦИОВКИНА

Abstract. Let Γ be an abelian antipodal distance-regular graph of diameter 3 with the following property: $(*)$ Γ *has a transitive group* $\widetilde{G}$ *of automorphisms which induces a primitive almost simple permutation group* $\widetilde{G}^\Sigma$ *on the set* Σ *of its antipodal classes.* If permutation rank $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^\Sigma)$ of $\widetilde{G}^\Sigma$ equals 2, then Γ is arc-transitive; moreover, all such graphs are now known. The purpose of this paper is to describe the graphs Γ with the property $(*)$ in the case when $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^\Sigma)=3$. According to the classification of primitive almost simple permutation groups of rank 3 the socle of the group $\widetilde{G}^\Sigma$ under the given condition is either a sporadic simple group, or an alternating group, or a simple group of exceptional Lie type, or a classical simple group. Earlier, we described the graphs Γ provided that $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^\Sigma)=3$ and the socle of $\widetilde{G}^\Sigma$ is a sporadic simple group. Here we study the cases when (i) the socle of the group $\widetilde{G}^\Sigma$ is an alternating group or (ii) $|\Sigma|\le 2500$ and socle of $\widetilde{G}^\Sigma$ is a simple group of exceptional Lie type. We show that the family of non-bipartite graphs Γ with the property $(*)$ and $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^\Sigma)=3$ in the alternating case is finite and limited to a small number of potential examples with $|\Sigma|\in\{10,28,120\}$, each of which is a covering of one of five certain distance-transitive Taylor graphs. For each given group $\widetilde{G}^\Sigma$ of degree $|\Sigma|\le 2500$ of exceptional type, we essentially restrict the set of admissible parameters of Γ.

Keywords: distance-regular graph, antipodal cover, abelian cover, vertex-transitive graph, rank 3 group.

Tsiovkina, L.Yu., On a class of vertex-transitive distance-regular covers of complete graphs, II.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-71-00122).

Поступила 25 марта 2022 г., опубликована 5 июля 2022 г.

Введение

В настоящей работе исследуется предложенная в [15] задача классификации *абелевых* (в смысле Годсила и Хензеля [8]) антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, обладающих следующим свойством:

($*$) Γ *имеет транзитивную группу автоморфизмов* $\widetilde{G}$, *которая индуцирует примитивную почти простую группу подстановок* $\widetilde{G}^{\Sigma}$ *на множестве* Σ *его антиподальных классов.*

При этом, не умаляя общности, мы будем полагать, что $\widetilde{G}$ совпадает с полным прообразом группы $\widetilde{G}^{\Sigma}$ в $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Нетрудно понять, что группа $\widetilde{G}$ действует транзитивно на дугах графа Γ в случае, когда подстановочный ранг $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma})$ группы $\widetilde{G}^{\Sigma}$ равен 2; более того, при условии $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 2$ все такие графы теперь известны (см. обсуждение в работе [16], в которой была проведена ревизия отдельных случаев).

Цель настоящей работы — изучить класс абелевых антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 со свойством ($*$) в случае, когда $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$ (общую мотивировку исследования можно найти в [15]). Как известно, все примитивные почти простые группы подстановок ранга 3 классифицированы (см. обзор в [5, гл. 11]). Согласно этой классификации при условии $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$ цоколь группы $\widetilde{G}^{\Sigma}$ является либо спорадической простой группой, либо знакопеременной группой, либо простой группой исключительного лиева типа, либо классической простой группой. В [15] была предложена схема классификации графов со свойством ($*$), основанная на редукции к их минимальным частным (точные определения будут даны в разделе 1) и решена рассматриваемая задача для случая, когда цоколь группы $\widetilde{G}^{\Sigma}$ является спорадической простой группой. Следуя этой схеме, здесь мы рассматриваем случаи, когда (i) цоколь группы $\widetilde{G}^{\Sigma}$ является знакопеременной группой или (ii) $|\Sigma| \leq 2500$ и цоколь группы $\widetilde{G}^{\Sigma}$ — простая группа исключительного лиева типа.

Данная статья устроена следующим образом. В разделе 1 излагаются некоторые необходимые определения и вспомогательные результаты, а также приводятся конструкция и пример бесконечного семейства графов со свойством ($*$) и $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$ (теорема 1 и пример 1). В разделе 2 рассматривается случай знакопеременного цоколя и доказывается теорема 3, которая показывает, что семейство недвудольных графов Γ со свойством ($*$) и $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$ в знакопеременном случае конечно и ограничено небольшим числом потенциальных экземпляров с $|\Sigma| \in \{10, 28, 120\}$, каждый из которых является накрытием одного из пяти определенных дистанционно-транзитивных графов Тейлора. Раздел 3 посвящен классификации графов Γ со свойством ($*$) таких, что $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$ в случае, когда цоколь группы $\widetilde{G}^{\Sigma}$ — простая группа исключительного лиева типа степени $|\Sigma| \leq 2500$ (теорема 4).

1. Определения и вспомогательные результаты

Мы сохраняем обозначения и терминологию работы [15]. Напомним некоторые из них. Для графа (под «графом» здесь и далее подразумевается неориентированный граф без петель и кратных ребер) Γ через $\mathcal{V}(\Gamma)$ и $\mathcal{A}(\Gamma)$ обозначаются соответственно множество его вершин и множество его дуг (упорядоченных пар смежных вершин).

Пусть Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3. Тогда (см. [4]) Γ — антиподальное r-накрытие полного графа на $k+1$ вершинах, Γ имеет массив пересечений $\{k,(r-1)\mu,1;1,\mu,k\}$ и собственные значения $k>n>-1>-m$, где $n,-m$ — корни уравнения $x^2-(\lambda-\mu)x-k=0$, а кратности собственных значений n и $-m$ равны $f=m(r-1)(k+1)/(n+m)$ и $g=n(r-1)(k+1)/(n+m)$ соответственно; для удобства такой граф мы будем называть просто $(k+1,r,\mu)$-*накрытием*. При этом справедливо тождество $k-r\mu-1=\lambda-\mu$, где через λ обозначается параметр a_1 графа Γ. Известно, что граф Γ двудолен тогда и только тогда, когда $r=2$ и $\mu=k-1$; в этом случае он существует и является единственным для любого $k\geq 2$ (см. [4, следствие 1.5.4]).

Как и в [15], через $\mathcal{CG}(\Gamma)$ мы будем обозначать группу всех автоморфизмов $(k+1,r,\mu)$-накрытия Γ, фиксирующих как множество каждый его антиподальный класс. Ввиду [8] для любой подгруппы N из $\mathcal{CG}(\Gamma)$ порядка, меньшего чем r, *частное* Γ^N (определяемое как граф на множестве N-орбит, в котором две орбиты смежны, если между ними имеется ребро графа Γ) является $(k+1,r/|N|,\mu|N|)$-накрытием. Если группа $\mathcal{CG}(\Gamma)$ абелева и действует регулярно на (каждом) антиподальном классе, то Γ называется *абелевым* $(k+1,r,\mu)$-*накрытием* (см. [8]). Далее в доказательствах без дополнительной ссылки мы будем также часто использовать тот факт, что каждый простой делитель числа r, которое является размером антиподального класса недвудольного абелева $(k+1,r,\mu)$-накрытия, делит также число $k+1$ (см. [8, теорема 9.2] и также [9, теорема 2.5]).

Для конечной группы G через $\mathrm{Soc}(G)$, $Z(G)$ и G' обозначаются соответственно ее цоколь, центр и коммутант. Если $G=G'$, то через $\mathrm{M}(G)$ обозначается ее мультипликатор Шура. Если $G\neq 1$ и H — собственная подгруппа в G наименьшего индекса, то мы используем запись $\mathrm{d}_{\min}(G)$ для обозначения числа $|G:H|$.

Далее, если G — транзитивная группа подстановок на конечном множестве Ω и $\mathrm{O}rb_2(G)$ — множество орбиталов группы G на Ω, то число $|\mathrm{O}rb_2(G)|$ называется (*подстановочным*) *рангом* группы G и обозначается через $\mathrm{rk}(G)$. Если $Q\in \mathrm{O}rb_2(G)$, то через Q^* обозначается орбитал, спаренный с Q; при этом если $Q^*=Q$ и $a\in\Omega$, то через $Q(a)$ обозначается множество всех точек $b\in\Omega$ таких, что $(a,b)\in Q$.

Предложение 1 ([15, предложение 2])**.** *Пусть Γ — недвудольное $(k+1,r,\mu)$-накрытие и Σ — множество его антиподальных классов. Предположим, что Γ имеет транзитивную группу автоморфизмов G_1, которая индуцирует примитивную почти простую группу подстановок ${G_1}^{\Sigma}$ на Σ и $T=\mathrm{Soc}({G_1}^{\Sigma})$. Пусть G — полный прообраз группы T в G_1 и K — ядро действия группы G на Σ. Тогда K содержит нормальную в G_1 подгруппу N, удовлетворяющую одному из следующих условий (ниже при помощи символа $^-$ обозначается факторизация по N):*

(T1) $\overline{K}\simeq E_{p^l}$ *— элементарная абелева группа экспоненты p и либо*

(*i*) $\overline{G}=\overline{K}\times\overline{G}'$ *и* $\overline{G}'\simeq T$, *либо*

(*ii*) $\overline{G}$ *— квазипростая группа с центром* $\overline{K}$*;*

(T2) $\overline{K} \simeq E_{p^l}$ — *элементарная абелева группа экспоненты* p, T *действует точно на* $\overline{K}$, *т.е.* $T \leq GL_l(p)$, *и содержит собственную подгруппу индекса, не превосходящего числа* $(p^l-1)/(p-1)$;

(T3) $\overline{K} \simeq S^l$, *где* S — *простая неабелева группа, и либо*
   (*i*) $\overline{G} = \overline{K} \times C_{\overline{G}}(\overline{K})$ *и* $C_{\overline{G}}(\overline{K}) \simeq T$, *либо*
   (*ii*) $\overline{G} \leq \mathrm{Aut}(\overline{K})$ *и* T *содержит собственную подгруппу индекса, делящего* l.

Граф Γ, определенный в предложении 1, будем называть *минимальным* $(k+1,r,\mu)$-*накрытием типа* (Tx) и обозначать его через $\Gamma(G_1,G,K)$, если $|K| = r$, тройка (G_1,G,K) удовлетворяет условиям п. (Tx) заключения этого предложения и K — минимальная нормальная подгруппа в G_1 (в частности, $N = 1$). Таким образом, для минимального $(k+1,r,\mu)$-накрытия $\Gamma(G_1,G,K)$ число r — простое в случае, когда $G_1 = G$ и $K \leq Z(G)$.

Остальные обозначения и понятия, используемые в статье, в основном, стандартны и могут быть найдены в [2, 4].

В некоторых случаях $(n,2,\mu)$-накрытия могут быть построены при помощи сильно регулярных графов. Здесь мы модифицируем одну из таких конструкций (см. [4, теорема 1.5.6]) для того, чтобы привести пример бесконечного семейства графов со свойством $(*)$, для которых $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$.

Теорема 1 (ср. [4, теорема 1.5.6]). *Предположим, что группа подстановок* G_1 *ранга* 3 *на множестве* Ξ *имеет четный порядок, примитивна и параметры ассоциированных с ней взаимодополнительных графов* Φ_1 *и* Φ_2 *ранга* 3 *связаны соотношением* $2(\lambda(\Phi_1)+\lambda(\Phi_2)+1) = |\Xi|-2$. *Пусть* Δ_1, Δ_2 — *два недиагональных орбитала группы* G_1 *на* Ξ *такие, что* $\Delta_i = \mathcal{A}(\Phi_i)$, *пусть* k_i — *степень графа* Φ_i *и пусть* X — *циклическая группа порядка* 2. *Тогда граф* $\Gamma(G_1,\Phi_1)$ *на множестве* $X \times \Xi$, *ребрами которого являются пары* (x,σ) *и* (x',σ') *такие, что либо* $x = x'$ *и* $(\sigma,\sigma') \in \Delta_1$, *либо* $x \neq x'$ *и* $(\sigma,\sigma') \in \Delta_2$, *является* $(|\Xi|,2,\mu)$-*накрытием с* $\mu = 2\mu(\Phi_1)+k_2-k_1-1$ *и* $G_1 \times X \leq \mathrm{Aut}(\Gamma(G_1,\Phi_1))$.

Доказательство. По построению очевидно, что граф $\Gamma := \Gamma(G_1,\Phi_1)$ является 2-накрытием полного графа на $n := |\Xi|$ вершинах. При этом группа автоморфизмов графа Γ содержит транзитивную подгруппу $\widetilde{G}_1$ вида $X \times G_1$ (ее действие на вершинах графа задается по правилу $(x,\sigma)^{\tilde{g}} = (xy,\sigma^g)$ для каждого $\tilde{g} = (y,g) \in \widetilde{G}_1$), которая в силу [2, 16.1] разбивает множество его дуг на два самоспаренных (недиагональных) орбитала, скажем, Q_1 и Q_2, так что $Q_1(a) = \{(x,\sigma') \| \ (\sigma,\sigma') \in \Delta_1\}$ и $Q_2(a) = \{(x',\sigma') \| \ (\sigma,\sigma') \in \Delta_2\}$ для $a = (x,\sigma)$ и $x' \in X - \{x\}$. Пусть далее $a = (x,\sigma)$ и $b = (y,\sigma')$ — две несмежные вершины графа Γ с $\sigma \neq \sigma'$. Ввиду [8, лемма 3.1] достаточно проверить, что они имеют ровно μ общих соседей.

Пусть $x = y$. Тогда $(\sigma,\sigma') \in \Delta_2$. По условию, число точек $\sigma'' \in \Xi$ таких, что $(\sigma,\sigma''),(\sigma',\sigma'') \in \Delta_2$ равно $\lambda(\Phi_2)$, а это, в свою очередь, означает, что $|\Gamma_1(b) \cap Q_2(a)| = \lambda(\Phi_2)$. Аналогично, число точек $\sigma'' \in \Xi$ таких, что $(\sigma,\sigma''),(\sigma',\sigma'') \in \Delta_1$ равно $\mu(\Phi_1)$, что влечет $|\Gamma_1(b) \cap Q_1(a)| = \mu(\Phi_1)$. Таким образом, $|\Gamma_1(a) \cap \Gamma_1(b)| = \mu(\Phi_1)+\lambda(\Phi_2)$ для $x = y$.

Теперь пусть $x \neq y$. Тогда $(\sigma,\sigma') \in \Delta_1$. По условию, число точек $\sigma'' \in \Xi$ таких, что $(\sigma',\sigma'') \in \Delta_1$ и $(\sigma,\sigma'') \in \Delta_2$ равно $k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1$, а это, в свою очередь, означает, что $|\Gamma_1(b) \cap Q_2(a)| = k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1$. Аналогично, число точек $\sigma'' \in \Xi$ таких, что $(\sigma,\sigma'') \in \Delta_1$ и $(\sigma',\sigma'') \in \Delta_2$ снова равно $k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1$, что влечет $|\Gamma_1(b)\cap Q_1(a)| = k_1-\lambda(\Phi_1)-1$. Отсюда $|\Gamma_1(a)\cap\Gamma_1(b)| = 2(k_1-\lambda(\Phi_1)-1)$ для $x \neq y$.

Для взаимодополнительных графов Φ_1 и Φ_2 ввиду [4, теорема 1.3.1] имеем $2(k_1-\lambda(\Phi_1)-1) = \mu(\Phi_1)+\lambda(\Phi_2)$ тогда и только тогда, когда $2(\lambda(\Phi_1)+\lambda(\Phi_2)+1) = |\Xi|-2$.

Снова применив [4, теорема 1.3.1], по транзитивности $X\times G_1$ на вершинах графа Γ получаем, что число общих соседей для любых двух его несмежных вершин (x_1,σ_1) и (x_2,σ_2) с $\sigma_1\neq\sigma_2$ равно $\mu = \mu(\Phi_1)+\lambda(\Phi_2) = 2\mu(\Phi_1)+k_2-k_1-1$. Теорема доказана.

$\square$

Заметим, что две различные пары (A,Φ_1) и (B,Ψ_1) с $A,B\leq \mathrm{Sym}(\Xi)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1, могут давать изоморфные графы $\Gamma((A,\Phi_1))$ и $\Gamma((B,\Psi_1))$ (в таком случае графы Φ_1 и Ψ_1 называются *переключательно эквивалентными* (см. [4, § 1.5, с. 15])).

Пример 1. Рассмотрим $T := P\Omega^{\pm}_{2n}(2)$ как группу ранга 3 на $2^{2n-1}-\varepsilon 2^{n-1}$ точках (см. [5, § 3.1.2]), где $\varepsilon=\pm1$, и обозначим через Φ_1 ассоциированный с ней граф (ранга 3) $\mathrm{NO}^{\varepsilon}_{2n}(2)$ с параметрами

$$\big(2^{2n-1}-\varepsilon 2^{n-1}, 2^{2n-2}-1, 2^{2n-3}-2, 2^{2n-3}+\varepsilon 2^{n-2})\big)$$

и через Φ_2 — дополнительный к нему граф $\overline{\mathrm{NO}^{\varepsilon}_{2n}(2)}$ с параметрами

$$\big(2^{2n-1}-\varepsilon 2^{n-1}, 2^{2n-2}-\varepsilon 2^{n-1}, 2^{2n-3}-\varepsilon 2^{n-2}, 2^{2n-3}-\varepsilon 2^{n-1})\big).$$

Очевидно, что для всех допустимых n имеет место равенство $2(\lambda(\Phi_1)+\lambda(\Phi_2)+1) = 2^{2n-1}-\varepsilon 2^{n-1}-2$. Далее, для групп $X\simeq Z_2$ и T и для каждого Φ_i обозначим через $\Gamma(T,\Phi_i)$ граф, определенный тем же способом, что и в теореме 1. Тогда $X\times T$ действует как транзитивная группа автоморфизмов графа $\Gamma(T,\Phi_i)$, который по теореме 1 является $(2^{2n-1}-\varepsilon 2^{n-1}, 2, \mu)$-накрытием с $\mu = 2^{2n-2}$ при $i=1$ и $\mu = 2^{2n-2}-\varepsilon 2^{n-1}-2$ при $i=2$. Таким образом, семейство графов $\{\Gamma(T,\Phi_1),\Gamma(T,\Phi_2)\}_{n,\varepsilon}$ дает пример бесконечной серии графов Γ со свойством $(*)$, для которых $\widetilde{G} = G = \mathcal{CG}(\Gamma)\times T$ и $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$.

Всюду далее Γ — это недвудольное абелево $(k{+}1,r,\mu)$-накрытие со свойством $(*)$, Σ — множество его антиподальных классов, $\widetilde{G}$ — транзитивная группа автоморфизмов графа Γ, которая индуцирует примитивную почти простую группу подстановок $\widetilde{G}^{\Sigma}$ на Σ, K — ядро действия $\widetilde{G}$ на Σ, $|K|=r$ и G — полный прообраз группы $\mathrm{Soc}(\widetilde{G}^{\Sigma})$ в $\widetilde{G}$. До конца работы предполагается, что $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$, при этом через k_1 и k_2 обозначаются нееденичные подстепени группы $\widetilde{G}^{\Sigma}$. Для вершины x графа Γ через $F(x)$ и $[x]$ будут обозначаться соответственно антиподальный класс графа Γ, содержащий x, и ее окрестность в Γ.

Положим $\Omega = \mathcal{V}(\Gamma)$. Зафиксируем $a\in\Omega$ и $F=F(a)$. Обозначим через M стабилизатор антиподального класса F в $\widetilde{G}$ и через H — его подгруппу $\widetilde{G}_a$ (заметим, что $M = K:H$ ввиду условия $|K|=r$). Как показано в [15], $\mathcal{A}(\Gamma)$ является объединением двух самоспаренных орбиталов группы $\widetilde{G}$ на Ω, скажем, Q_1 и Q_2, отвечающих двум недиагональным самоспаренным орбиталам группы $\widetilde{G}^{\Sigma}$ на Σ валентностей k_1 и k_2. При этом $|Q_i| = rk_i(k+1)$ и ввиду транзитивности $\widetilde{G}$ на Ω для дуги $(a,b_i)\in Q_i$ имеем $|H:\widetilde{G}_{a,b_i}| = k_i$, т.е. H имеет ровно две орбиты на $[a]$ (с представителями b_1 и b_2). Для $i=1,2$ через Φ_i

обозначается граф (ранга 3) на Σ, в котором две вершины $F(x)$ и $F(y)$ смежны тогда и только тогда, когда $(x,y) \in Q_i$. Поскольку $\mu(\Phi_i) \neq 0, k_i$ (см., например, [2, 16.4]), то при $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$ группа G^Σ также примитивна. Отметим, что параметры k_1, k_2 и λ связаны следующим соотношением (см. [15])

$$(1) \qquad (\lambda - \lambda_1)k_1 \quad = \quad (\lambda - \lambda_2)k_2,$$

где $\lambda_i = |[b_i] \cap H(b_i)|$, $i = 1,2$.

Следуя [15], мы будем говорить, что множество ребер графа Γ допускает *H-равномерное разбиение* (с параметрами (μ_1, μ_2)), если для каждого $j = 1,2$ и любых двух различных вершин z_1, z_2 из F число ребер между $Q_j(z_1)$ и $Q_j(z_2)$ постоянно и равно $k_j\mu_j$ (μ_j — целое).

Лемма 1 ([15, лемма 1]). *Предположим, что $|K| = r$, $G_{\{F\}} = G_a \times K$ и $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$. Если группа H действует транзитивно на $F \setminus \{a\}$ или $r \leq 3$, то множество ребер графа Γ допускает H-равномерное разбиение.*

Теорема 2 ([15, теорема 1]). *Предположим, что $G_{\{F\}} = G_a \times K$ и $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$. Тогда для каждого $x \in F \setminus \{a\}$ имеем*

$$(2) \qquad (\mu - \mu_1)k_1 \quad = \quad (\mu - \mu_2)k_2,$$

где $\mu_i = |[b_i] \cap Q_i(x)|$, $i = 1,2$. Если, к тому же, множество ребер графа Γ допускает H-равномерное разбиение с параметрами (μ_1', μ_2'), то $\mu_i' = \mu_i$ для каждого $i = 1,2$ и число $\gamma = -(\lambda - \lambda_1 - \lambda_2) + (\mu - \mu_1 - \mu_2) = r(\mu - \mu_1 - \mu_2) - 1$ является собственным значением графа Γ.

2. Знакопеременный цоколь

Теорема 3. *Предположим, что абелево недвудольное $(k+1, r, \mu)$-накрытие Γ обладает свойством $(*)$, причем $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^\Sigma) = 3$, $T := \mathrm{Soc}(\widetilde{G}^\Sigma) \simeq \mathrm{Alt}_s$ и $\widetilde{G}^\Sigma \leq \mathrm{Sym}_s$. Пусть G — полный прообраз группы T в $\widetilde{G}$. Тогда либо*

(*i*) *$T \simeq \mathrm{Alt}_5$, $k = 9$, r делит 4 и $r\mu = 8$, либо*
(*ii*) *$T \simeq \mathrm{Alt}_8$, $k = 27$, r делит 4 и $r\mu \in \{20, 32\}$, либо*
(*iii*) *$T \simeq \mathrm{Alt}_9$, $k = 119$, r делит 8 и $r\mu \in \{108, 128\}$.*

В частности, при $r = 2$ граф Γ существует и является единственным (с точностью до изоморфизма) дистанционно-транзитивным $(k+1, 2, \mu)$-накрытием для любых допустимых параметров k и μ, при этом $G' \simeq T$ и G' имеет ровно две орбиты на его вершинах.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Положим $N = G'$ и $L = T_{\{F\}}$. Далее мы будем применять классификацию примитивных групп ранга 3 со знакопеременным цоколем и описание ассоциированных с ними графов ранга 3 из [3] и [5, теорема 11.3.1].

Сначала мы исследуем случай, когда $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, G, K)$ является абелевым минимальным $(k+1, r, \mu)$-накрытием (и, соответственно, имеет тип $(T1)$ или $(T2)$). Поскольку $\mathrm{rk}(T) = 3$, то при $K \leq Z(G)$ мы будем считать, что $\widetilde{G} = G$. Итак, пусть $r = p^l$, где p — простое.

I. Предположим, что $T \simeq \mathrm{Alt}_s$ и $k + 1 = \binom{s}{2} = s(s-1)/2$ (при этом $|\widetilde{G}^\Sigma : T| \leq 2$ и $\widetilde{G}^\Sigma$ вкладывается в группу Sym_s, которая, как известно, индуцирует группу ранга 3 на множестве всех 2-элементных подмножеств из $\{1, 2, \ldots, s\}$).

Пусть $s \geq 7$. Для $k_1 = 2(s-2)$ граф $\Phi_1 \simeq \mathrm{T}(s)$ является треугольным графом и имеет параметры

$$\big(\frac{s(s-1)}{2}, 2(s-2), s-2, 4\big),$$

а дополнительный к нему граф $\Phi_2 = \overline{\mathrm{T}(s)}$ имеет параметры

$$\big(\frac{s(s-1)}{2}, \frac{(s-2)(s-3)}{2}, \frac{s(s-1)}{2} - 4(s-2) + 2, \frac{s(s-1)}{2} - 3(s-2)\big).$$

При этом $L \simeq \mathrm{Sym}_{s-2}$ и $H = \widetilde{G}_a \simeq (\widetilde{G}_{\{F\}})^{\Sigma-\{F\}} \leq \mathrm{Sym}_2 \times \mathrm{Sym}_{s-2}$. Отсюда $L' \simeq \mathrm{Alt}_{s-2}$ и ввиду условия $s \geq 7$ получаем $\mathrm{d}_{\min}(L') = s-2$ и по [10, таблица 4.1] $\mathrm{M}(T) \simeq \mathrm{Out}(T) \simeq Z_2$.

Покажем, что $K \leq Z(G)$. Предположим обратное. Тогда по предложению 1 имеем $T \leq \mathrm{Aut}(K) \simeq GL_l(p)$ и $\mathrm{d}_{\min}(N) = 2(k+1)/(s-1) = s \leq r$. Но $\gcd(s, s-1) = 1$ и поэтому $r = s$. Следовательно, $p^l!$ делит $|GL_l(p)|$. Противоречие с тем, что $(p^l!)_p \geq p^{l(l+1)/2} > p^{l(l-1)/2} = |GL_l(p)|_p$.

Таким образом, можно считать, что $r = p$. При этом согласно предложению 1 либо $G = K \times N$ и $N \simeq T$, либо $G = N$ — квазипростая группа с центром $K \simeq Z_p$.

Случай $N \simeq T$. Допустим, что N интранзитивна на вершинах графа Γ. Тогда по [15, предложение 3] $r = 2$ и

$$2\big(\frac{s(s-1)}{2} - (s-2) + 3\big) = 2(\lambda(\Phi_1) + \lambda(\Phi_2) + 1) = k - 1 = \frac{s(s-1)}{2} - 2,$$

что влечет $s(s-13) = -40$. По условию $s \geq 7$, поэтому $s = 8$ и $k+1 = 28$ (возможность $s = 5$ будет рассмотрена ниже в п. II), что влечет $\mu \in \{10, 16\}$, и более того, как показывают вычисления в GAP [7] для каждого μ граф существует и является дистанционно-транзитивным (его конструкция в явном виде может быть получена при помощи теоремы 1).

Далее мы рассмотрим случай, когда $N \simeq \mathrm{Alt}_s$ действует транзитивно на вершинах графа Γ. По условию $s \geq 7$ и следовательно, $\mathrm{d}_{\min}(L') = s-2$. Поскольку r делит $k+1$, получаем либо $r \geq s-2$ и $r = p \in \{s, s-1\}$, либо $r = 2$. Но если $r > 2$, то L содержит подгруппу простого индекса $r > s-2$, противоречие.

Поэтому $r = 2$, откуда следует, что $s \neq 7$, $N_a = N_F \simeq L' \simeq \mathrm{Alt}_{s-2}$, $\lambda > 0$ и по [4, теорема 1.5.3] $[a]$ — сильно регулярный граф с параметрами $(k, \lambda, (3\lambda - (k+1))/2, \lambda/2)$.

Положим $\Omega = \{1, 2, \ldots, s\}$ и зададим биекцию множества Σ антиподальных классов графа Γ на множество $\Lambda = \binom{\Omega}{2}$, определяемую подстановочным изоморфизмом групп T и $\mathrm{Alt}(\Omega)^{\Lambda}$, полагая, что $F(a)$ отвечает элементу $\{1, 2\}$. Заметим, что группы $(G_a)^{[a]}$ и $(G_{\{F\}})^{\Sigma-\{F\}} = (N_{\{F\}})^{\Sigma-\{F\}}$ подстановочно изоморфны. При этом $(G_a)^{[a]} \simeq G_a \geq N_a = (N_{\{F\}})' \simeq \mathrm{Alt}_{s-2}$. Поэтому N_a имеет ровно три орбиты на $[a]$: две орбиты длины $s-2$ с представителем из класса $\{1, i\}$ или $\{2, i\}$, где $2 < i \leq s$, и одну орбиту длины $(s-2)(s-3)/2$ с представителем из класса $\{j, i\}$, где $2 < i, j \leq s$.

Так как $s > 7$, то группа N_a действует как группа ранга 3 на $Q_2(a)$, с неединичными подорбитами длины $2(s-4)$ и $(s-4)(s-5)/2$. Отсюда $\lambda_2 \in \{0, 2(s-4), (s-4)(s-5)/2, k_2 - 1\}$.

С другой стороны, N_a имеет ровно две орбиты на $Q_1(a)$ длины $s-2$ (с представителями из классов, отвечающих элементам $\{1, 3\}$ и $\{2, 4\}$ из Λ), на каждой из которых действует $(s-4)$-транзитивно. Поэтому $\lambda_1 \in \{0, 1, s-3, s-$

$2, 2(s-3), k_1-1\}$. Более того, нетрудно понять, что стабилизатор любой вершины $b \in Q_1(a)$ в N_a имеет ровно две орбиты на $Q_2(a)$, а их длины равны $s-3$ и $(s-3)(s-4)/2$. Действительно, рассмотрим, например, вершину b из класса $\{1,3\}$. Тогда с одной стороны группа $N_{a,b}$ действует транзитивно на множестве всех классов вида $\{3,i\}$, а с другой — для любых двух различных классов вида $\{i_1,j_1\}$ и $\{i_2,j_2\}$, где $i_t, j_t \notin \{1,2,3\}$ для каждого $t=1,2$, в $N_{a,b}$ найдется элемент, сдвигающий $\{i_1,j_1\}$ в $\{i_2,j_2\}$. Учитывая, что $Q_2(a)$ содержит ровно по одной вершине из каждого класса $\{i,j\}$ с $i,j \notin \{1,2\}$ (и исчерпывается такими вершинами), получаем требуемое. Для других вершин $b \in Q_1(a)$ рассуждение проводится аналогично. Поэтому $\lambda - \lambda_1 \in \{0, s-3, (s-3)(s-4)/2, k_2\}$.

По лемме 1 и теореме 2 число $\gamma = 2(\mu - (\mu_1+\mu_2)) - 1$ является собственным значением графа Γ, в частности $k_1 - 1 = \lambda_1 + \mu_1$ и $k_2 - 1 = \lambda_2 + \mu_2$. Кроме того, ввиду соотношений (1) и (2)

$$4(\lambda - \lambda_1) = (\lambda - \lambda_2)(s-3), \quad 4(\mu - \mu_1) = (\mu - \mu_2)(s-3),$$

что в совокупности с условием $s > 7$ влечет $\lambda_1 < \lambda_2$.

Перебор комбинаций для λ_1 и λ_2 дает следующий список допустимых собственных значений γ:

(i) $\lambda - \lambda_1 = s-3, \quad \lambda_2 = 2(s-4), \quad \gamma = 2(s-4)-1;$
(ii) $\lambda - \lambda_1 = s-3, \quad \lambda_2 = \frac{(s-3)(s-4)}{2}, \quad \gamma = (s-4)(s-5)-1;$
(iii) $\lambda - \lambda_1 = s-3, \quad \lambda_2 = \frac{(s-2)(s-3)}{2} - 1, \quad \gamma = (s-3)(s-4)-1;$
(iv) $\lambda - \lambda_1 = \frac{(s-3)(s-4)}{2}, \quad \lambda_2 = 2(s-4), \quad \gamma = -(s-4)(s-7)+1;$
(v) $\lambda - \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{(s-3)(s-4)}{2}, \quad \gamma = 1;$
(vi) $\lambda - \lambda_1 = \frac{(s-3)(s-4)}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{(s-2)(s-3)}{2} - 1, \quad \gamma = 2s-7;$
(vii) $\lambda - \lambda_1 = \frac{(s-2)(s-3)}{2}, \quad \lambda_2 = 2(s-4), \quad \gamma = -(s-4)(s-5)-1;$
$(viii)$ $\lambda - \lambda_1 = \frac{(s-2)(s-3)}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{(s-3)(s-4)}{2}, \quad \gamma = -2s+7;$
(ix) $\lambda - \lambda_1 = \frac{(s-2)(s-3)}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{(s-2)(s-3)}{2} - 1, \quad \gamma = -1.$

Поскольку граф Γ не является ни двудольным, ни полным, то $\gamma \neq 1$ и $\lambda \neq k_1 + k_2 - 1$, стало быть случаи $(v), (ix)$ невозможны. С учетом условия $3\lambda \geq k+1$, вытекающего из ограничения для параметров сильно регулярного графа [a], и условия делимости k на $|\gamma|$ (см. например, [15, предложение 1]), во всех остальных случаях при $s \geq 8$ получаем, что $s \leq 22$ и случаи $(i)-(iii), (v), (vii)$ невозможны. Более того, $\lambda \neq \mu$ и либо $s = 8, k = 27$ и $\gamma = -3$ в случае (iv), либо $(s,k,\gamma) \in \{(8,27,9), (17,135,27)\}$ в случае (vi), либо $(s,k,\gamma) \in \{(8,27,-9), (17,135,-27)\}$ в случае $(viii)$. Но если $s = 17$ и $\gamma = \pm 27$ является собственным значением графа Γ, то Γ имеет собственное значение $\theta = \mp 5$, что противоречит условию целочисленности кратностей собственных значений. Поэтому $s = 8$ и по [15, предложение 1] $\mu \in \{10, 16\}$. Но ранг транзитивного действия группы Alt_8 на 56 точках равен 4 или 7 (это нетрудно проверить, например, при помощи [7]). Противоречие с тем, что стабилизатор вершины x в N должен фиксировать и антипод x^* вершины x в $F(x)$ и при этом иметь равное число орбит как на $[x]$, так и на $[x^*]$, не меньшее двух.

Случай $Z(N) = K$. Допустим, что G — квазипростая группа. Тогда группы $(G_a)^{[a]}$ и $(G_{\{F\}})^{\Sigma - \{F\}}$ подстановочно изоморфны, при этом $G_a \simeq (G_a)^{[a]} \simeq \mathrm{Sym}_{s-2}$.

Если $r = 2$, то по лемме 1 и теореме 2 число $\gamma = 2(\mu - (\mu_1 + \mu_2)) - 1$ является собственным значением графа Γ, и, рассуждая как и выше, получим $s = 8$, $\gamma \in \{-3, \pm 9\}$ и $\mu \in \{10, 16\}$. Перебором орбитальных графов квазипростой группы $Z_2.\mathrm{Alt}_8$ на 56 точках в GAP [7] с применением [1] устанавливается, что этот случай невозможен.

Если $r > 2$, то $r = 3$, $s = 7$ и $k + 1 = 21$. Но тогда $2, -10$ — собственные значения графа Γ, что ввиду [15, предложение 1] влечет $10 \leq 2^2$, противоречие.

II. Пусть $5 \leq s \leq 6$ и $k + 1 = \binom{s}{2}$. Если $s = 6$, то $k = 14$ и $r \in \{3, 5\}$, но по [15, предложение 1] ни один набор параметров не является допустимым. Пусть $s = 5$. Тогда $k = 9$, что влечет $\lambda = \mu$, $r = 2$ и $\mu = 4$. Компьютерные вычисления в GAP [7] показывают, что в этом случае граф Γ изоморфен графу Мэтона из [4, предложение 12.5.3], $N = G' < G$ и N имеет две орбиты на его вершинах (таким образом, другая его конструкция может быть получена при помощи теоремы 1).

III. Пусть $T \simeq \mathrm{Alt}_8$ и $k+1 = 35$. Тогда $r \in \{5, 7\}$ и согласно [15, предложение 1] ни один набор параметров не является допустимым.

Пусть $T \simeq \mathrm{Alt}_9$ и $k + 1 = 120$. Тогда $\mathrm{rk}(T) = 3$ и $L \simeq L_2(8) : Z_3$ (см. [6]). В этом случае $k_1 = 56$, Φ_1 имеет параметры $(120, 56, 28, 24)$, а дополнительный к нему граф Φ_2 имеет параметры $(120, 63, 30, 36)$, см., например, [5, теорема 11.3.1].

По [15, предложение 1] имеем $r = p^l \in \{2, 3, 4, 8\}$ и поскольку $T \not\lesssim GL_l(p)$ получаем $K \leq Z(G)$. Допустим $G \neq G'$. Так как L не содержит подгрупп индекса 2, то по [15, предложение 3] в этом случае получаем либо $r = 2$ и G' интранзитивна на вершинах графа Γ, либо $r = 3$ и G' транзитивна на вершинах графа Γ. Если же $G' = G$, то $K \simeq \mathrm{M}(T)$, т.е. $r = 2$. Но для квазипростой группы $G = Z_2.\mathrm{Alt}_9$ ранг ее транзитивного представления на 240 точках равен 5 (это легко проверить применением [1] и [7]), противоречие как и выше. Так как μ четно и $k + 1$ кратно 4, то $\lambda \neq \mu$ (см., например, [15, предложение 1]). Отсюда при $r = 3$ получаем, что $\mu = 54$ и числа $17, -7$ являются собственными значениями графа Γ, а при $r = 2$ — либо $\mu = 54$ и $17, -7$ являются собственными значениями графа Γ, либо $\mu = 64$ и $7, -17$ являются собственными значениями графа Γ.

Перебор орбитальных графов группы $Z_r \times \mathrm{Alt}_9$ на $120r$ точках в GAP [7] показывает, что $r = 2$, $\mu = 54$ или 64, граф Γ существует и является дистанционно-транзитивным, при этом $N = G' \simeq T$ и N имеет две орбиты на вершинах (его конструкция в явном виде может быть получена при помощи теоремы 1).

Пусть $T \simeq \mathrm{Alt}_{10}$ и $k+1 = 126$. Тогда $\mathrm{rk}(T) = 3$ и $L \simeq (\mathrm{Alt}_5 \times \mathrm{Alt}_5) : Z_4$ (см. [6]). В этом случае $k_1 = 25$, Φ_1 имеет параметры $(126, 25, 8, 4)$, а дополнительный к нему граф Φ_2 имеет параметры $(126, 100, 78, 84)$, см., например, [5, теорема 11.3.1].

По [15, предложение 1] $r = p^l \in \{2, 3, 9\}$ и поскольку $T \not\lesssim GL_l(p)$ получаем $K \leq Z(G)$. Покажем, что $r = 2$. Допустим $G \neq G'$. Так как $2(\lambda(\Phi_1) + \lambda(\Phi_2) + 1) \neq k - 1$ и L не содержит подгрупп индекса 3 или 9, то по [15, предложение 3] имеем $r = 2$ и $G' \simeq \mathrm{Alt}_{10}$ транзитивна на вершинах графа Γ. Если же $G' = G$, то $K \simeq \mathrm{M}(T)$, т.е. снова $r = 2$. Применим теперь теорему 2.

Допустим, что $\lambda = \mu$. Тогда $\mu = 62$ и граф Γ имеет целое собственное значение $\gamma = 2(\mu - \mu_1 - \mu_2) - 1$, отличное от $\pm\sqrt{k}$ и k, что влечет $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Но ввиду соотношения (2) $4\mu_1 = \mu_2$ и $5\mu_1 = 62$, противоречие.

Отсюда по [15, предложение 1] заключаем $\mu \in \{52, 72\}$. Случай $G' < G$ исключается перебором орбитальных графов группы Alt_{10} на $120r$ точках в GAP [7]. С применением [1] и [7] устанавливается, что для квазипростой группы $G = Z_2.\mathrm{Alt}_{10}$ ранг ее транзитивного представления на 252 точках равен 5. Противоречие, как и выше.

Наконец, пусть Γ' — произвольное $(k+1, r', \mu')$-накрытие, удовлетворяющее условиям теоремы. Поскольку $\mathrm{rk}(T) = 3$, то некоторое его частное изоморфно подходящему графу Γ из п. I, II или III, рассмотренных выше, в частности, $r'\mu' = r\mu$ и r' делится на r. При этом в силу абелевости K если простое число t делит r', то Γ' обладает минимальным частным Γ с $r = t$. Этим завершается доказательство теоремы.

□

3. Исключительный простой цоколь: случай $|\Sigma| \leq 2500$

Теорема 4. *Предположим, что абелево недвудольное* $(k+1, r, \mu)$*-накрытие* Γ *обладает свойством* $(*)$*, причем* $k + 1 \leq 2500$*,* $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$ *и* $T := \mathrm{Soc}(\widetilde{G}^{\Sigma})$ *— простая группа исключительного лиева типа. Пусть* G *— полный прообраз группы* T *в* $\widetilde{G}$*. Тогда* $T \simeq G_2(4)$*,* $k = 2015$*,* r *делит* 32 *и* $r\mu \in \{2048, 1980\}$*, в частности, если* $r = 2$*, то* $K \leq Z(G)$*,* $G' \simeq T$*,* G' *действует интранзитивно на вершинах графа* Γ*,* Γ *— дистанционно-транзитивный граф Тейлора с* $\{\lambda, \mu\} = \{1024, 990\}$ *и* $\mathrm{Aut}(\Gamma) = Sp_{12}(2) \times K$*.*

Доказательство. Ограничение $k + 1 \leq 2500$ исключает случаи $T \simeq E_6(q)$ или $G_2(8)$, поэтому остается рассмотреть возможности для T, описываемые в таблице 1 (см. [12], [5, гл. 11] и [6]). Поскольку $\mathrm{rk}(T) = 3$, достаточно рассмотреть случай $\widetilde{G} = G$. Предположим сначала, что $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, G, K)$ является абелевым минимальным $(k+1, r, \mu)$-накрытием, удовлетворяющим заданным условиям.

Заметим, что $T \not\leq \mathrm{Aut}(K)$. В самом деле, если $T \leq \mathrm{Aut}(K)$, то допустимым является только случай $k+1 = 2016$, в котором $T = G_2(4)$. Но тогда $r = p^l$, где $p = 2$, 3 или 7, и условие $T \leq GL_l(p)$ влечет $r \geq 2^{12} > k + 1$, что невозможно. Положим $N = G'$.

Таблица 1. Группы ранга 3 и степени не более 2500 с простым цоколем T исключительного лиева типа

$k+1$	k_1, k_2	T	$T_{\{F\}}$	$\mathrm{rk}(T)$	$\mathrm{M}(T)$	$\mathrm{d}_{\min}(T)$	$\mathrm{d}_{\min}((T_{\{F\}})')$
351	126, 224	$G_2(3)$	$U_3(3).2$ (2 кл.)	3	Z_3	$k+1$	28
416	100, 315	$G_2(4)$	HJ	3	Z_2	$k+1$	100
2016	975, 1040	$G_2(4)$	$SU_3(4).2$	3	Z_2	416	65

1. Допустим $T \simeq N$.

1.1. Предположим, что N интранзитивна на вершинах графа Γ. Так как $\mathrm{rk}(T) = 3$, то $r = 2$, Γ — недвудольный граф Тейлора и ввиду [15, предложение 3] $2(\lambda(\Phi_1) + \lambda(\Phi_2) + 1) = k - 1$.

Поскольку k должно быть нечетным, получаем $T \simeq G_2(4)$. Допустим $k_1 = 100$. Тогда граф Φ_1 имеет параметры $(416, 100, 36, 20)$, а дополнительный к нему граф Φ_2 имеет параметры $(416, 315, 234, 252)$ (см., например, [5, § 10.68]), что влечет $2 \cdot 271 = 414$, противоречие. Если $k_1 = 975$, то граф $\Phi_1 \simeq NO_7^-(4)$

имеет параметры $(2016, 975, 462, 480)$, а дополнительный к нему граф Φ_2 имеет параметры $(2016, 1040, 544, 528)$ (см., например, [5, § 3.1.4]), что ввиду [15, предложение 3] влечет $\{\lambda, \mu\} = \{1024, 990\}$, и одно из чисел ± 65 является собственным значением графа Γ. Перебор орбитальных графов группы $Z_r \times G_2(4)$ на 4032 точках в GAP [7] показывает, что $\mu = 990$ или 1024, граф Γ существует и является дистанционно-транзитивным, при этом $N = G' \simeq T$ и N имеет две орбиты на вершинах. Таким образом, Γ может быть построен с помощью конструкции из теоремы 1.

1.2. Предположим, что N транзитивна на вершинах графа Γ. Если $T = G_2(3)$, то $r = 2$, противоречие с тем, что $k + 1$ нечетно. Значит, $T = G_2(4)$, $N_a \simeq SU_3(4)$, $k+1 = 2016$ и снова $r = 2$. Заметим, что в этом случае $\mathrm{rk}(N) = 6$, но как показывают вычисления в GAP [7] с применением пакета coco2p [11], граф Γ не существует.

2. Пусть теперь $N = G$ — квазипростая группа. При $k + 1 = 2016$ группа $G_{\{F\}} = (Z(G) \times U_3(4)).Z_2$ не имеет подгрупп индекса 2, не содержащих $Z(G)$, противоречие.

При $k+1 = 416$ группа $G_{\{F\}} = Z(G).HJ$ квазипроста и поэтому не содержит подгрупп индекса 2, противоречие.

При $k + 1 = 351$ группа $G_{\{F\}} = Z(G) \times U_3(3).Z_2$ содержит единственную подгруппу X индекса 3, но ранг действия G на G/X равен 5 (это нетрудно проверить, применяя [1] и [7]). Противоречие.

Теперь если Γ' — произвольное $(k + 1, r', \mu')$-накрытие, удовлетворяющее условиям теоремы, то любое его минимальное частное $\Gamma(G, G, K)$ изоморфно некоторому графу Γ из рассмотренных выше, в частности, $r'\mu' = r\mu$ и r' делится на r. При этом если простое число t делит r', то Γ' обладает минимальным частным Γ с $r = t$, что невозможно при $t \geq 3$. Теорема доказана.

□

Замечание 1. Перебор орбитальных графов в доказательствах теорем 2 и 3 производился с применением пакетов GRAPE [14] и coco2p [11].

Открытые вопросы

В заключение мы приведем несколько открытых вопросов.

1. Существуют ли недвудольные абелевы $(k+1, r, \mu)$-накрытия со свойством $(*)$ при условии, что $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$ и $r \geq 3$ из заключения теорем 2 и 3?

2. Как устроены недвудольные абелевы $(k + 1, r, \mu)$-накрытия, группа автоморфизмов которых транзитивна и индуцирует группу ранга 3 на антиподальных классах, в общем случае?

References

[1] R. Abbott, J. Bray, S. Linton, S. Nickerson, S. Norton, R. Parker, I. Suleiman, J. Tripp, P. Walsh, R. Wilson, *ATLAS of Group Representations – Ver. 3*, URL: `http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/`.

[2] M. Aschbacher, *Finite group theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **10**, Cambridge University Press, Cambridgebl 2000. Zbl 0997.20001

[3] E. Bannai, *Maximal subgroups of low rank of finite symmetric and alternating groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1 A, Mathematics, **16** (1972), 475–486.

[4] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1989. Zbl 0747.05073

[5] A.E. Brouwer, H. Van Maldeghem, *Strongly regular graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2022. Zbl 7437385
[6] J. Conway, R. Curtis, S. Norton, R. Parker, R. Wilson, *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985. Zbl 0568.20001
[7] The GAP Group, *GAP Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.8*, 2015.
[8] C.D. Godsil, A.D. Hensel, *Distance regular covers of the complete graph*, J. Comb. Theory Ser. B., **56**:2 (1992), 205–238. Zbl 0771.05031
[9] C.D. Godsil, R.A. Liebler, C.E. Praeger, *Antipodal distance transitive covers of complete graphs*, Eur. J. Comb., **19**:4 (1998), 455–478. Zbl 0914.05035
[10] D. Gorenstein, *Finite simple groups. An introduction to their classification*, Plenum Press, New York-London, 1982. Zbl 0483.20008
[11] M. Klin, C. Pech, S. Reichard, *COCO2P – a GAP4 package, ver. 0.18*, 2020. URL: `https://github.com/chpech/COCO2P/`
[12] M.W. Liebeck, J. Saxl, *The finite primitive permutation groups of rank three*, Bull. Lond. Math. Soc., **18** (1986), 165–172. Zbl 0586.20003
[13] C.M. Roney-Dougal, *The primitive permutation groups of degree less than 2500*, J. Algebra, **292**:1 (2005), 154–183. Zbl 1107.20001
[14] L.H. Soicher, *The GRAPE package for GAP, ver. 4.6.1*, 2012. URL: `http://www.maths.qmul.ac.uk/ leonard/grape/`
[15] L.Yu. Tsiovkina, *On a class of vertex-transitive distance-regular covers of complete graphs*, Sib. Èlectron. Mat. Izv, **18**:2 (2021), 758–781. Zbl 1468.05024
[16] L.Yu. Tsiovkina, *On a class of edge-transitive distance-regular antipodal covers of complete graphs*, Ural Math. J., **7**:2 (2021), 136–158. Zbl 7504268

Ludmila Yur'evna Tsiovkina
Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics,
16, S. Kovalevskoi str.,
Yekaterinburg, 620090, Russia
Email address: `tsiovkina@imm.uran.ru`