

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>*Том 19, №1, стр. 378–386 (2022)*

УДК 519.71

DOI 10.33048/semi.2022.19.033

MSC 08A99

О БЕСПОВТОРНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЯХ
В ЭЛЕМЕНТАРНОМ БАЗИСЕ С МЕДИАНОЙ

И.К. ШАРАНХАЕВ

АБСТРАКТ. Boolean functions that can be realized by read-once terms (formulas) in elementary base extended by median are studied. An algorithm for finding read-once representations of Boolean functions in this base is obtained.

Keywords: Boolean function, superposition, base, decomposition, read-once term.

1. ВВЕДЕНИЕ

Бесповторные булевы функции, т. е. функции, которые можно реализовать термом (формулой) в некотором базисе, содержащем каждую переменную не более одного раза, исследовались еще в 50-х годах прошлого века [1]. Однако алгоритмы нахождения бесповторных представлений булевых функций рассматривались до сих пор только в бинарных базисах [2]. В статье исследуются булевы функции, которые можно представить бесповторными термами в элементарном базисе, расширенном функцией медианой (трехместной функцией голосования). На основе необходимого и достаточного условия бесповторности булевых функций в данном базисе, полученного автором в работе [3], предложен алгоритм нахождения бесповторных представлений булевых функций.

SHARANKHAEV, I.K., ON READ-ONCE BOOLEAN FUNCTIONS IN ELEMENTARY BASE EXTENDED BY MEDIAN.

© 2022 Шаранхаев И.К.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22-21-20013, <https://rscf.ru/project/22-21-20013/> и Правительства Республики Бурятия.

Поступила 8 апреля 2022 г., опубликована 6 июля 2022 г.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Изложению основных результатов предположим необходимые обозначения и определения. Все неопределяемые понятия можно найти, например, в [4]. Будем использовать следующие обозначения: переменные обозначаются символами x, y, z, u, v , возможно с индексами; константы обозначаются символами α, σ, τ , возможно с индексами; символом \tilde{x} обозначается набор (x_1, \dots, x_n) ; $|\tilde{x}|$ — длина набора \tilde{x} ; $\text{rank } f$ — ранг функции f ; $\chi(f)$ — множество всех переменных функции f ; $\rho(f)$ — множество всех существенных переменных функции f ; $\delta(f)$ — множество всех фиктивных переменных функции f ;

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1; \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Функция, получаемая из $f(x_1, \dots, x_n)$ подстановкой вместо некоторой переменной x_i константы σ , называется *остаточной по переменной x_i* и обозначается $f_{x_i}^\sigma$. Индуктивно это определение распространяется на подмножество переменных.

Переменная x_i функции f называется *фиктивной*, если $f_{x_i}^0 = f_{x_i}^1$, и *существенной* в противном случае.

Рангом функции f называется число ее существенных переменных.

Терм Φ над базисом B называется *бесповторным*, если каждая переменная входит в него не более одного раза. Функция f называется *бесповторной* в базисе B , если существует бесповторный терм Φ над B , представляющий функцию f . В противном случае f называется *повторной* в B .

Функция $d_3 = (00010111)$ называется *медианой*.

Базис

$$B_0 = \{\vee, \cdot, -, 0, 1\}$$

называется *элементарным*. Базис $B_0 \cup \{d_3\}$ обозначим через D .

Будем говорить, что функции f и g *связаны отношением \preceq* , и писать $f \preceq g$, если для любого набора $\tilde{\sigma}$ выполняется неравенство $f(\tilde{\sigma}) \leq g(\tilde{\sigma})$.

Функция f называется *обобщенно монотонной по переменной x* , если выполняется либо $f_x^0 \preceq f_x^1$, либо $f_x^0 \succeq f_x^1$. Если f является обобщенно монотонной по переменной x , то для краткости будем писать $f \in M_x$.

Функции f и g называются *обобщенно однотипными*, если

$$f(x_1, \dots, x_n) = g^\sigma(x_{i_1}^{\sigma_1}, \dots, x_{i_n}^{\sigma_n}),$$

где (i_1, \dots, i_n) — некоторая перестановка чисел от 1 до n . Очевидно, что на множестве всех булевых функций отношение обобщенной однотипности является отношением эквивалентности.

Множество всех функций, обобщенно однотипных с функцией d_3 , обозначим через K . Нетрудно проверить, что множество K содержит всего 8 функций:

$$\begin{aligned} d_3(x_1, x_2, x_3) &= (0001\ 0111), d_3(\bar{x}_1, x_2, x_3) = (0111\ 0001), \\ d_3(x_1, \bar{x}_2, x_3) &= (0100\ 1101), d_3(x_1, x_2, \bar{x}_3) = (0010\ 1011), \\ d_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3) &= (1101\ 0100), d_3(\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3) = (1011\ 0010), \\ d_3(x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= (1000\ 1110), d_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (1110\ 1000). \end{aligned}$$

Производной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по переменной x_i называется функция

$$f'_{x_i} = f_{x_i}^0 \oplus f_{x_i}^1.$$

Функцию f будем называть *2-нежесткой*, если либо $\text{rank } f < 2$, либо для любого $x \in \rho(f)$ справедливо включение $f \in M_x$ и выполняется одно из условий:

- (1) $\delta(f) = \delta(f_x^0)$ и $\delta(f) \subsetneq \delta(f_x^1)$;
- (2) $\delta(f) = \delta(f_x^1)$ и $\delta(f) \subsetneq \delta(f_x^0)$;
- (3) существуют $y \in \rho(f'_x)$ такая, что справедливо строгое включение

$$\delta(f'_x) \subsetneq \delta((f'_x)'_y).$$

Функцию f будем называть *наследственно 2-нежесткой*, если сама f и все ее остаточные функции являются 2-нежесткими.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В [3] получено необходимое и достаточное условие бесповторности булевых функций в базисе D (теорема 1), основанное на анализе остаточных функций и производных.

Теорема 1. *Функция f бесповторна в базисе D тогда и только тогда, когда она является наследственно 2-нежесткой.*

Далее с помощью теоремы 1 получен алгоритм нахождения бесповторных представлений булевых функций в базисе D . Отметим, что алгоритм нахождения бесповторных представлений булевых функций в $B_0 = D \setminus \{d_3\}$ построен в [2].

Ниже нам понадобится метод разделительной декомпозиции.

Функция f при разбиении множества переменных на \tilde{u} и \tilde{v} допускает разделительную декомпозицию, если существуют функции h и g такие, что выполняется

$$f(\tilde{u}, \tilde{v}) = h(\tilde{v}, g(\tilde{u})).$$

Теорема 2. *Для любой функции f равносильны следующие условия:*

- 1) f допускает разделительную декомпозицию при разбиении множества переменных на \tilde{u} и \tilde{v} ;
- 2) среди всех остаточных функций от f по переменным \tilde{v} не более двух различных;
- 3) существует функция t такая, что любая остаточная функция от f по переменным \tilde{u} является либо константной, либо функцией t , либо функцией \bar{t} .

Доказательство теоремы 2 смотрите в [2].

4. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ БЕСПОВТОРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В БАЗИСЕ D

Алгоритм является рекурсивным, на вход подается существенная булева функция $f(\tilde{x})$ размерности не менее, чем 1, заданная в векторном виде. На выходе алгоритм находит бесповторный терм $\Phi(\tilde{x})$, представляющий $f(\tilde{x})$, или сообщает, что $f(\tilde{x})$ не является бесповторной в базисе D .

А. Проверяем, является ли функция $f(\tilde{x})$ наследственно 2-нежесткой. Если $f(\tilde{x})$ не является 2-нежесткой, то по теореме 1 она является повторной в D и алгоритм завершает работу, иначе переходим к шагу В.

В. Если функция $f(\tilde{x})$ является одноместной, т. е. $\tilde{x} = x_1$, то

$$\Phi(x_1) = x_1 \text{ или } \Phi(x_1) = \bar{x}_1.$$

С. К этому шагу переходим, если функция $f(\tilde{x})$ не является одноместной.

С.0. Произвольным образом выбираем одну переменную y и находим множества $\tilde{x}_0 = \delta(f_y^0)$, $\tilde{x}_1 = \delta(f_y^1)$. Если ровно одно из этих множеств пустое, то переходим к С.1. Если для любой переменной множества \tilde{x}_0 и \tilde{x}_1 являются пустыми, то переходим к С.2.

С.1. К этому шагу переходим, если нашлась переменная y такая, что только одна из остаточных функций от функции $f(\tilde{x})$ по y несущественна.

С.1.а. К этому шагу переходим, если $\tilde{x}_0 \cup \{y\} = \tilde{x}$, т. е. f_y^0 – константная. Применяв алгоритм к $f_y^1(\tilde{x}_0)$, найдем неповторный терм $\Psi(\tilde{x}_0)$, представляющий функцию $f_y^1(\tilde{x}_0)$. Тогда искомый терм $\Phi(\tilde{x})$ будет определяться следующим образом:

$$\Phi(\tilde{x}) = (y \cdot (\Psi(\tilde{x}_0))^\sigma)^\sigma,$$

где $\sigma = f_y^0$.

С.1.б. К этому шагу переходим, если $\tilde{x}_1 \cup \{y\} = \tilde{x}$, т. е. функция f_y^1 – константная. Применяв алгоритм к $f_y^0(\tilde{x}_1)$, найдем неповторный терм $\Psi(\tilde{x}_1)$, представляющий функцию $f_y^0(\tilde{x}_1)$. Тогда искомый терм $\Phi(\tilde{x})$, будет определяться следующим образом:

$$\Phi(\tilde{x}) = (y \vee (\Psi(\tilde{x}_1))^\sigma)^\sigma,$$

где $\sigma = f_y^1$.

С.1.с. Обозначим $\tilde{u} = \{y\} \cup \tilde{x}_0 \cup \tilde{x}_1$ и $\tilde{v} = \tilde{x} \setminus \tilde{u}$. Этот шаг выполняется, если \tilde{u} и \tilde{v} оба непусты. Среди остаточных функций $f_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}}$ найдем две различных. Обозначим их через $f_1(\tilde{v})$ и $f_2(\tilde{v})$.

Определим функции $h(\tilde{v}, z)$ и $g(\tilde{u})$ следующим образом:

$$h(\tilde{v}, z) = \bar{z}f_1(\tilde{v}) \vee zf_2(\tilde{v}),$$

$$g(\tilde{\tau}) = \begin{cases} 0, & \text{если } f_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}} = f_1; \\ 1, & \text{если } f_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}} = f_2. \end{cases}$$

Дважды применяем алгоритм для нахождения неповторных термов $\Psi_h(\tilde{v}, z)$ и $\Psi_g(\tilde{u})$, представляющих $h(\tilde{v}, z)$ и $g(\tilde{u})$. Тогда искомый терм $\Phi(\tilde{x})$ будет определяться следующим образом:

$$\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = \Psi_h(\tilde{v}, \Psi_g(\tilde{u})).$$

С.2. К этому шагу переходим, если обе остаточные функции от функции f по каждой переменной существенны. Если функция f является трехместной, то она принадлежит K , т. е. представляющий ее терм известен. Иначе выберем произвольным образом набор из трех переменных $\tilde{u} = (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$. Среди остаточных функций $f_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}}$ найдем две различных. Обозначим их через $f_1(\tilde{v})$ и $f_2(\tilde{v})$.

Определим функции $h(\tilde{v}, z)$ и $g(\tilde{u})$, где $\tilde{v} = \tilde{x} \setminus \tilde{u}$, следующим образом:

$$h(\tilde{v}, z) = \bar{z}f_1(\tilde{v}) \vee zf_2(\tilde{v}),$$

$$g(\tilde{\tau}) = \begin{cases} 0, & \text{если } f_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}} = f_1; \\ 1, & \text{если } f_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}} = f_2. \end{cases}$$

Если функция $g(\tilde{u}) \notin K$, то выберем другой набор \tilde{u} и повторим процедуру построения $h(\tilde{v}, z)$ и $g(\tilde{u})$.

Если выполняется $g(\tilde{u}) \in K$, дважды применяем алгоритм для нахождения неповторных термов $\Psi_h(\tilde{v}, z)$ и $\Psi_g(\tilde{u})$, представляющих $h(\tilde{v}, z)$ и $g(\tilde{u})$. Тогда искомым терм $\Phi(\tilde{x})$ будет определяться следующим образом:

$$\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = \Psi_h(\tilde{v}, \Psi_g(\tilde{u})).$$

Теорема 3. *Алгоритм нахождения неповторных представлений булевых функций в базисе D является корректным.*

Доказательство. Корректность шага А достигается в силу теоремы 1. Далее доказательство теоремы проведем индукцией по числу n переменных функции f .

Базис индукции. Если $n = 1$, то функция f является одноместной и выполняется шаг В, который, очевидно, является корректным.

Шаг индукции. Пусть для всех функций размерности меньше, чем n алгоритм является корректным. Рассмотрим выполнение шага С. Оценив функции из базиса D , нетрудно заметить, что если функция f является существенной неповторной в базисе D , а она является таковой в силу выполнения шага А, то для любой переменной y либо ровно одна из остаточных функций f_y^0, f_y^1 существенна, либо обе они существенны. Таким образом, выполняется либо условие пункта С.1, либо условие пункта С.2, т. е. пункт С.0 является корректным.

Пусть выполняется пункт С.1.а. Остаточная функция f_y^1 существенна, поэтому рекурсивный вызов алгоритма является корректным. В силу индуктивного предположения неповторный терм $\Psi(\tilde{x}_0)$ представляет функцию $f_y^1(\tilde{x}_0)$. Теперь тот факт, что $\Phi(\tilde{x}) = (y \cdot (\Psi(\tilde{x}_0))^{\bar{\sigma}})^{\bar{\sigma}}$, где $\sigma = f_y^0$, представляет функцию f , легко проверяется разбором случаев $y = 0$ и $y = 1$. По построению терм $\Phi(\tilde{x})$ является неповторным над D , т. е. алгоритм для f является корректным.

Корректность пункта С.1.б доказывается аналогично пункту С.1.а.

Пусть выполняется пункт С.1.с. Ровно одно из множеств \tilde{x}_0, \tilde{x}_1 непусто, будем для определенности считать, что \tilde{x}_0 , тогда имеем $\tilde{u} = \{y\} \cup \tilde{x}_0$ и $\tilde{v} = \tilde{x} \setminus \tilde{u}$. В силу шага А функция f является неповторной в D , тогда представляющий ее неповторный терм $\Phi(\tilde{x})$ будет иметь подтерм $\Psi(\tilde{u})$ вида $y \cdot \Gamma(\tilde{x}_0)$ или $\bar{y} \vee \Gamma(\tilde{x}_0)$. Таким образом, выполняются условия разделительной декомпозиции теоремы 2, следовательно, $f(\tilde{u}, \tilde{v}) = h(\tilde{v}, g(\tilde{u}))$. Остается применить предположение индукции к $h(\tilde{v}, z)$ и $g(\tilde{u})$.

Пусть выполняется пункт С.2. Функция f является неповторной в D и обе остаточные функции от функции f по каждой переменной существенны. Это возможно только в случае, если либо $f \in K$, что сразу влечет корректность алгоритма, либо f допускает разделительную декомпозицию при разбиении множества переменных на \tilde{u} и \tilde{v} , т. е. $f(\tilde{u}, \tilde{v}) = h(\tilde{v}, g(\tilde{u}))$, где $g(\tilde{u})$ обобщенно однотипна функции d_3 . Очевидно, что $g(\tilde{u})$ представима термом, неповторным над D . По предположению индукции для $h(\tilde{v}, z)$ алгоритм является корректным. Следовательно, для f алгоритм также является корректным. \square

Проверим работу алгоритма на примере функции

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1111 \ 1111 \ 1111 \ 1111 \ 0100 \ 0100 \ 0100 \ 1101).$$

Вызов алгоритма 1.

А. Проверим является ли функция f наследственно 2-нежесткой. Для этого нужно проверить свойство 2-нежесткости для f и всех ее остаточных функций по любому множеству переменных. Приведем список функций, который достаточно будет проверить с учетом того факта, что если функция является 2-нежесткой, то это свойство выполняется и для любой обобщенно однотипной с ней функции.

- 1) $f = (1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 0100\ 0100\ 0100\ 1101)$,
- 2) $f_1 = (1111\ 1111\ 0100\ 1101)$,
- 3) $f_2 = (1111\ 1111\ 0101\ 0111)$,
- 4) $f_3 = (1111\ 1111\ 0000\ 0001)$,
- 5) $f_4 = (1111\ 0100)$,
- 6) $f_5 = (0100\ 1101)$,
- 7) $f_6 = (0000\ 0001)$,
- 8) $f_7 = (0100)$.

1) Найдем остаточные функции от функции f по каждой переменной:

$$\begin{aligned} f_{x_1}^0 &= (1111\ 1111\ 1111\ 1111), \delta(f_{x_1}^0) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}; \\ f_{x_1}^1 &= (0100\ 0100\ 0100\ 1101), \delta(f_{x_1}^1) = \emptyset; \\ f_{x_2}^0 &= (1111\ 1111\ 0100\ 0100), \delta(f_{x_2}^0) = \{x_3\}; \\ f_{x_2}^1 &= (1111\ 1111\ 0100\ 1101), \delta(f_{x_2}^1) = \emptyset; \\ f_{x_3}^0 &= (1111\ 1111\ 0100\ 0100), \delta(f_{x_3}^0) = \{x_2\}; \\ f_{x_3}^1 &= (1111\ 1111\ 0100\ 1101), \delta(f_{x_3}^1) = \emptyset; \\ f_{x_4}^0 &= (1111\ 1111\ 0101\ 0111), \delta(f_{x_4}^0) = \emptyset; \\ f_{x_4}^1 &= (1111\ 1111\ 0000\ 0001), \delta(f_{x_4}^1) = \emptyset; \\ f_{x_5}^0 &= (1111\ 1111\ 0000\ 0010), \delta(f_{x_5}^0) = \emptyset; \\ f_{x_5}^1 &= (1111\ 1111\ 1010\ 1011), \delta(f_{x_5}^1) = \emptyset. \end{aligned}$$

Как видно, f является обобщенно монотонной по каждой переменной. Очевидно, что любая остаточная функция от функции f по любому множеству переменных также является обобщенно монотонной по каждой переменной, поэтому проверку на это свойство в дальнейшем будем пропускать. Для переменных x_1, x_2, x_3 выполняется второе условие определения 2-нежесткой функции, убедимся, что для x_4 и x_5 выполняется третье условие. Действительно, это верно в силу того, что $\delta(f_{x_4}^0) = \emptyset, \delta(f_{x_5}^0) = \emptyset, \delta((f_{x_4}^0)'_{x_2}) = \{x_5\}, \delta((f_{x_5}^0)'_{x_2}) = \{x_4\}$. Итак, функция f является 2-нежесткой.

2) Найдем остаточные функции от функции f_1 по каждой переменной:

$$\begin{aligned} (f_1)_{x_1}^0 &= (1111\ 1111), \delta((f_1)_{x_1}^0) = \{x_2, x_3, x_4\}; \\ (f_1)_{x_1}^1 &= (0100\ 1101), \delta((f_1)_{x_1}^1) = \emptyset; \\ (f_1)_{x_2}^0 &= (1111\ 0100), \delta((f_1)_{x_2}^0) = \emptyset; \\ (f_1)_{x_2}^1 &= (1111\ 1101), \delta((f_1)_{x_2}^1) = \emptyset; \\ (f_1)_{x_3}^0 &= (1111\ 0111), \delta((f_1)_{x_3}^0) = \emptyset; \\ (f_1)_{x_3}^1 &= (1111\ 0001), \delta((f_1)_{x_3}^1) = \emptyset; \\ (f_1)_{x_4}^0 &= (1111\ 0010), \delta((f_1)_{x_4}^0) = \emptyset; \\ (f_1)_{x_4}^1 &= (1111\ 1011), \delta((f_1)_{x_4}^1) = \emptyset. \end{aligned}$$

Очевидно, что для x_1 выполняется второе условие определения 2-нежесткой функции. Для остальных переменных выполняется третье условие 2-нежесткой функции, так как $\delta((f_1)_{x_2}^0) = \emptyset, \delta(((f_1)_{x_2}^0)'_{x_4}) = \{x_3\}, \delta((f_1)_{x_3}^0) = \emptyset, \delta(((f_1)_{x_3}^0)'_{x_4}) = \{x_2\}, \delta((f_1)_{x_4}^0) = \emptyset, \delta(((f_1)_{x_4}^0)'_{x_3}) = \{x_2\}$. Итак, функция f_1 является 2-нежесткой.

3) Найдем остаточные функции от функции f_2 по каждой переменной:

$$\begin{aligned}
(f_2)_{x_1}^0 &= (1111\ 1111), \delta((f_2)_{x_1}^0) = \{x_2, x_3, x_4\}; \\
(f_2)_{x_1}^1 &= (0101\ 0111), \delta((f_2)_{x_1}^1) = \emptyset; \\
(f_2)_{x_2}^0 &= (1111\ 0101), \delta((f_2)_{x_2}^0) = \{x_3\}; \\
(f_2)_{x_2}^1 &= (1111\ 0111), \delta((f_2)_{x_2}^1) = \emptyset; \\
(f_2)_{x_3}^0 &= (1111\ 0101), \delta((f_2)_{x_3}^0) = \{x_2\}; \\
(f_2)_{x_3}^1 &= (1111\ 0111), \delta((f_2)_{x_3}^1) = \emptyset; \\
(f_2)_{x_4}^0 &= (1111\ 0001), \delta((f_2)_{x_4}^0) = \emptyset; \\
(f_2)_{x_4}^1 &= (1111\ 1111), \delta((f_2)_{x_4}^1) = \{x_1, x_2, x_3\}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что для x_1, x_2, x_3 выполняется второе условие определения 2-нежесткой функции, а для x_4 выполняется первое условие. Итак, функция f_2 является 2-нежесткой.

4) Найдем остаточные функции от функции f_3 по каждой переменной:

$$\begin{aligned}
(f_3)_{x_1}^0 &= (1111\ 1111), \delta((f_3)_{x_1}^0) = \{x_2, x_3, x_4\}; \\
(f_3)_{x_1}^1 &= (0000\ 0001), \delta((f_3)_{x_1}^1) = \emptyset; \\
(f_3)_{x_2}^0 &= (1111\ 0000), \delta((f_3)_{x_2}^0) = \{x_3, x_4\}; \\
(f_3)_{x_2}^1 &= (1111\ 0001), \delta((f_3)_{x_2}^1) = \emptyset; \\
(f_3)_{x_3}^0 &= (1111\ 0000), \delta((f_3)_{x_3}^0) = \{x_2, x_4\}; \\
(f_3)_{x_3}^1 &= (1111\ 0001), \delta((f_3)_{x_3}^1) = \emptyset; \\
(f_3)_{x_4}^0 &= (1111\ 0000), \delta((f_3)_{x_4}^0) = \{x_2, x_3\}; \\
(f_3)_{x_4}^1 &= (1111\ 0001), \delta((f_3)_{x_4}^1) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Очевидно, что для x_1, x_2, x_3, x_4 выполняется второе условие определения 2-нежесткой функции. Итак, функция f_3 является 2-нежесткой.

5) Найдем остаточные функции от функции f_4 по каждой переменной:

$$\begin{aligned}
(f_4)_{x_1}^0 &= (1111), \delta((f_4)_{x_1}^0) = \{x_2, x_3\}; \\
(f_4)_{x_1}^1 &= (0100), \delta((f_4)_{x_1}^1) = \emptyset; \\
(f_4)_{x_2}^0 &= (1101), \delta((f_4)_{x_2}^0) = \emptyset; \\
(f_4)_{x_2}^1 &= (1100), \delta((f_4)_{x_2}^1) = \{x_3\}; \\
(f_4)_{x_3}^0 &= (1100), \delta((f_4)_{x_3}^0) = \{x_2\}; \\
(f_4)_{x_3}^1 &= (1110), \delta((f_4)_{x_3}^1) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Очевидно, что для x_1, x_3 выполняется второе условие определения 2-нежесткой функции, а для x_2 выполняется первое условие. Итак, функция f_4 является 2-нежесткой.

6) Найдем остаточные функции от функции f_5 по каждой переменной:

$$\begin{aligned}
(f_5)_{x_1}^0 &= (0100), \delta((f_5)_{x_1}^0) = \emptyset; \\
(f_5)_{x_1}^1 &= (1101), \delta((f_5)_{x_1}^1) = \emptyset; \\
(f_5)_{x_2}^0 &= (0111), \delta((f_5)_{x_2}^0) = \emptyset; \\
(f_5)_{x_2}^1 &= (0001), \delta((f_5)_{x_2}^1) = \emptyset; \\
(f_5)_{x_3}^0 &= (0010), \delta((f_5)_{x_3}^0) = \emptyset; \\
(f_5)_{x_3}^1 &= (1011), \delta((f_5)_{x_3}^1) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Для x_1, x_2, x_3 выполняется третье условие 2-нежесткой функции, так как $\delta((f_5)_{x_1}') = \emptyset, \delta(((f_5)_{x_1}')_{x_2}') = \{x_3\}, \delta((f_5)_{x_2}') = \emptyset, \delta(((f_5)_{x_2}')_{x_1}') = \{x_3\}, \delta((f_5)_{x_3}') = \emptyset, \delta(((f_5)_{x_3}')_{x_1}') = \{x_2\}$. Итак, функция f_5 является 2-нежесткой.

Случаи 7) и 8) аналогичны случаю 5).

Таким образом, функция f является наследственно 2-нежесткой, поэтому по теореме 1 бесповторна в D .

Вызов алгоритма 2.

С.0. Находим $\tilde{x}_0 = \delta(f_{x_1}^0)$, $\tilde{x}_1 = \delta(f_{x_1}^1)$:

$$f_{x_1}^0 = (1111\ 1111\ 1111\ 1111), f_{x_1}^1 = (0100\ 0100\ 0100\ 1101),$$

т. е. $\tilde{x}_0 = \delta(f_{x_1}^0) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $\tilde{x}_1 = \delta(f_{x_1}^1) = \emptyset$. Очевидно, выполняется условие пункта С.1.а, поэтому переходим к нему.

С.1.а. Применив алгоритм к $f_{x_1}^1(\tilde{x}_0)$ (вызов 3), найдем неповторный терм $\Psi(\tilde{x}_0) = d_3(x_2 \cdot x_3, \bar{x}_4, x_5)$, представляющий функцию $f_{x_1}^1(\tilde{x}_0)$. Тогда искомым терм $\Phi(\tilde{x}) = \overline{x_1 \cdot d_3(x_2 \cdot x_3, \bar{x}_4, x_5)}$.

Вызов алгоритма 3.

С.0. $f(x_2, x_3, x_4, x_5) = (0100\ 0100\ 0100\ 1101)$. Находим $\tilde{x}_0 = \delta(f_{x_2}^0)$, $\tilde{x}_1 = \delta(f_{x_2}^1)$:

$$f_{x_2}^0 = (0100\ 0100), f_{x_2}^1 = (0100\ 1101),$$

т. е. $\tilde{x}_0 = \delta(f_{x_2}^0) = \{x_3\}$, $\tilde{x}_1 = \delta(f_{x_2}^1) = \emptyset$. Выполняется условие пункта С.1.с, поэтому переходим к нему.

С.1.с. Находим $\tilde{u} = \{x_2, x_3\}$, $\tilde{v} = \{x_4, x_5\}$. Вычисляем остаточные функции от f по x_1, x_2 :

$$f_1(x_4, x_5) = (0100), f_2(x_4, x_5) = (1101).$$

Находим функции $h(z, x_4, x_5) = (0100\ 1101)$ и $g(x_2, x_3) = (0001)$.

Применив алгоритм к $h(z, x_4, x_5) = (0100\ 1101)$ (вызов 4), найдем неповторный терм $\Psi_h(z, x_4, x_5) = d_3(z, \bar{x}_4, x_5)$. Применив алгоритм к $g(x_2, x_3) = (0001)$ (вызов 5), найдем неповторный терм $\Psi_g(x_2, x_3) = x_2 \cdot x_3$. Тогда искомым терм $\Phi(x_2, x_3, x_4, x_5) = d_3(x_2 \cdot x_3, \bar{x}_4, x_5)$.

Вызов алгоритма 4.

С.0. $f(z, x_4, x_5) = (0100\ 1101)$. Для любой переменной множества \tilde{x}_0 и \tilde{x}_1 являются пустыми, переходим к С.2.

С.2. Поскольку $f \in K$, имеем искомым терм $\Phi(z, x_4, x_5) = d_3(z, \bar{x}_4, x_5)$.

Вызов алгоритма 5.

С.0. $f(x_2, x_3) = (0001)$. Находим $\tilde{x}_0 = \delta(f_{x_2}^0)$, $\tilde{x}_2 = \delta(f_{x_2}^1)$:

$$f_{x_2}^0 = (00), f_{x_2}^1 = (01),$$

т. е. $\tilde{x}_0 = \delta(f_{x_2}^0) = \{x_3\}$, $\tilde{x}_1 = \delta(f_{x_2}^1) = \emptyset$. Очевидно, выполняется условие пункта С.1.а, поэтому переходим к нему.

С.1.а. Применив алгоритм к $f_{x_2}^1(x_3)$ (вызов 6), найдем неповторный терм $\Psi(x_3) = x_3$, представляющий функцию $f_{x_2}^1(x_3)$. Тогда искомым терм

$$\Phi(x_2, x_3) = x_2 \cdot x_3.$$

Вызов алгоритма 6.

В. $f(x_3) = (01)$. Функция f одноместная, поэтому искомым терм $\Phi(x_3) = x_3$.

REFERENCES

- [1] A.V. Kuznetsov, *On non-repeating contact schemes and non-repeating superpositions of functions of algebra of logic*, Tr. Mat. Inst. Steklova, **51** (1958), 186–225. Zbl 0092.25304
- [2] S.F. Vinokurov (ed.), N.A. Peryazev (ed.), *Selected problems in the theory of Boolean functions*, Fizmatlit, Moscow, 2001. Zbl 0979.06001
- [3] N.A. Peryazev, I.K. Sharankhaev, *Criteria for a Boolean function to be a repetition free in the pre-elementary bases of rank 3*, Discrete Math. Appl., **15:3** (2005), 299–311. Zbl 1103.94039
- [4] N.A. Peryazev, *Fundamentals of the theory of Boolean functions*, Fizmatlit, Moscow, 1999.

IVAN KONSTANTINOVICH SHARANKHAEV
DORZHI BANZAROV BURYAT STATE UNIVERSITY,
24A, SMOLINA STR.,
ULAN-UDE, 670000, RUSSIA
Email address: goran5@mail.ru