

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

*Том 19, №2, стр. 1038–1053 (2022)*

УДК 519.6

DOI 10.33048/semi.2022.19.084

MSC 76D05

**ЧИСЛЕННОЕ ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ  
ГИДРОДИНАМИКИ НА СЕТКАХ, СОДЕРЖАЩИХ  
НЕСОГЛАСОВАННЫЕ СЕТОЧНЫЕ ИНТЕРФЕЙСЫ**

А. В. КОРОТКОВ, А. С. КОЗЕЛКОВ

**ABSTRACT.** The paper describes a numerical method, which considers specific CFD (computational fluid dynamics) aspects of viscous incompressible flow simulations in the vicinity of interfaces between nonconforming grid fragments. An example implementation of the method is presented for the case of the finite-volume approximation of the Navier-Stokes equations. The method is based on the GGI (General Grid Interface) principle, which does not require initial grid modification and involves conservative flux interpolation. This method enables simulations of viscous incompressible flow simulations on grid models of complex-geometry structures composed of several independently constructed grid fragments, which have nonconforming grids at adjacent boundaries and can be joined together through nonconforming interfaces. The paper reports simulation results for turbulent flow in a circular tube with an abrupt reduction in diameter on a grid model composed of nonconforming unstructured grid fragments. The effect of the nonconforming interface on the accuracy of solution and the rate of convergence of iterations is demonstrated.

**Keywords:** hydrodynamic flows, unmatched grids, General Grid Interface, SIMPLE algorithm, unmatched grid interface.

---

KOROTKOV A., KOZELKOV A., THREE-DIMENSIONAL NUMERICAL SIMULATIONS OF FLUID DYNAMICS PROBLEMS ON GRIDS WITH NONCONFORMING INTERFACES.

© 2022 Коротков А.В., Козелков А.С.

The publication was prepared under the Program for Creation and Development of World-Class Scientific Center “Supersonic” in 2020–2025 with financial support of the Russian Ministry of Education and Science (Agreement No. 075-15-2020-924, dated November 16, 2020).

The results have been obtained with financial support from the Science and Universities National Project under the Young Scientists Lab Program of the RF Ministry of Education and Science # FSWE-2021-0009 (Research Topic: Development of CFD methods, models and algorithms to simulate liquids and gases in natural and industrial environments under normal and critical conditions on petascale supercomputers).

*Поступила 16 февраля 2022 г., опубликована 29 декабря 2022 г.*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время значительно возросла потребность в численном моделировании гидродинамики, основанном на решении трехмерных уравнений Навье-Стокса, в промышленных объектах с использованием моделей большой размерности. Примером таких задач могут быть задачи атомной энергетики, судостроения, авиастроения и другие производственные задачи, где производится моделирование гидродинамических течений в геометрически сложных конструкциях [1, 2, 3]. В большинстве случаев для решения таких задач строится единая сетка, которая может содержать более миллиарда расчетных точек (ячеек). Построение такого рода сеточных моделей с учетом всех особенностей протекающих в расчетной модели физических процессов является нетривиальной и, как правило, достаточно трудоемкой и ресурсоемкой задачей. Разбиение сложной исходной геометрии на более простые фрагменты значительно упрощает задачу построения, позволяет получить сетки лучшего качества и значительно сэкономить вычислительные ресурсы. Например, выборочное сгущение сетки в отдельных фрагментах, дает возможность выполнить более точное решение без существенного увеличения количества ячеек в сеточной модели. Построенные таким образом сеточные модели, как правило, состоят из несогласованных фрагментов сетки, на смежных границах которых количество и расположение узлов в общем случае не совпадает. Численное моделирование задач гидродинамики на таких сеточных моделях невозможно проводить с использованием стандартных подходов и требует разработки специальных методов. Ключевой особенностью численного моделирования задач гидродинамики на таких сеточных моделях является необходимость связывания несогласованных фрагментов сетки в единую расчетную модель с помощью специальных несогласованных сеточных интерфейсов. Основной проблемой несогласованных сеточных интерфейсов является отсутствие консервативности, что может стать причиной неустойчивого решения или возникновения возмущений [4].

Среди предлагаемых в литературе методов согласования сеточных интерфейсов существует ряд алгоритмов, осуществляющих геометрическое слияние фрагментов произвольных неструктурированных сеток в единую сеточную модель [5, 6, 7]. Слияние осуществляется за счет модификации исходной сетки и преобразования интерфейсных граней в набор внутренних граней. Данные методы обеспечивают сохранение консервативности расчета сеточной модели, однако процесс геометрического слияния произвольных неструктурированных сеток на границах произвольной формы требует использования множества алгоритмов в области вычислительной геометрии (точное определение координат новых узлов, объединение узлов, проекция полученных узлов на ребра и грани и т.д.), и при этом не исключает возможность образования областей, содержащих «плохие» ячейки, критерии качества которых выходят за рамки допустимых.

Другая группа методов «buffer/zipper layer» [8, 9] основана на формировании в области несогласованных сеточных интерфейсов промежуточного слоя неструктурированной сетки, связывающего несогласованные фрагменты сетки. Данные методы также обеспечивают сохранение консервативности расчета сеточной модели. Недостатком данной группы методов является их неприменимость к сеточным моделям, содержащим произвольные неструктурированные

сетки, что сильно ограничивает их применение для решения промышленно-ориентированных задач на сетках произвольной геометрии.

С точки зрения вычислительной эффективности наиболее привлекательными являются консервативные методы, основанные на интерполяции величин в области несогласованных интерфейсов. Такие методы не модифицируют и не перестраивают исходную сетку на интерфейсах, что значительно упрощает их программную реализацию. Примером такого подхода является метод «patched grid» [10], широко используемый при расчете на многообластных моделях. Недостатком данного метода является требование наличия высококачественной структурированной сетки.

Примером метода, основанного на интерполяции величин, позволяющим связывать несогласованные неструктурированные сеточные интерфейсы является метод GGI (General Grid Interface) [11]. Алгоритм работы GGI не требует модификации исходной сетки и основан на применении весовых коэффициентов, определяемых по соотношению площадей виртуальных граней, образованных при проецировании граней одного из интерфейсов на противоположный. На основе метода GGI был разработан и успешно реализован метод расчета на подвижных сетках без перекрытия [12]. Авторами метода GGI показана консервативность интерфейса и его модификаций в случае удовлетворения используемых весовых коэффициентов определенным условиям, однако не показано, что такие коэффициенты всегда могут быть найдены (например, для несогласованных неструктурированных интерфейсов). Также авторами не приводится способ интерполяции величин на гранях несогласованных интерфейсов, что требует разработки дополнительных алгоритмов.

В данной работе представлено описание метода, позволяющего учитывать особенности решения уравнений Навье-Стокса при моделировании течений вязкой несжимаемой жидкости в области смежных границ несогласованных произвольных неструктурированных фрагментов сетки. В основу метода положен принцип работы метода GGI. В отличие от метода GGI, в разработанном методе не требуется рассчитывать весовые коэффициенты, так как консервативность метода гарантируется за счет формирования идентичного набора виртуальных граней на смежных интерфейсных границах. Предложен способ интерполяции величин на гранях несогласованных интерфейсов основанный на методе усреднения по площади. Полученный метод позволяет объединять смежные несогласованные фрагменты сетки в единую расчетную область, учитывающую связь смежных ячеек через виртуальные грани, что позволяет сократить время решения задачи.

Численные методы, представленные в данной статье, реализованы на базе отечественного пакета программ ЛОГОС [13, 14]. Работоспособность представленного метода демонстрируется на примере трехмерного моделирования задачи турбулентного течения несжимаемой жидкости в круглой трубе с внезапным сужением, сеточная модель которой, состоит из несогласованных фрагментов неструктурированной сетки. Результаты расчетов сравниваются с аналогичными расчетами на согласованных сетках.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

**2.1. Математическая модель.** Рассматривается математическая модель изотермического течения вязкой несжимаемой жидкости. При данных допущениях, течение описывается системой уравнений Навье-Стокса, которая имеет следующий вид [15, 16]:

$$(1) \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = -\nabla p, \\ \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{u} \varphi) - \nabla \cdot (\Gamma \nabla \varphi) = 0. \end{cases}$$

где  $\rho$  - плотность моделируемой среды,  $t$  - время,  $\mathbf{u}$  - вектор скорости осредненного течения в трехмерной декартовой системе координат,  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_\mu + \boldsymbol{\tau}_\tau$  - сумма молекулярной и турбулентной составляющих вязкой части тензора напряжений,  $p$  - давление,  $\Gamma$  - коэффициент диффузии,  $\varphi$  - скалярная величина.

Система уравнений (1) решается путем численного интегрирования на конечно-объемной расчетной сетке. Дискретизацию уравнений (1) методом конечных объемов рассмотрим на примере дискретизации уравнения переноса скалярной величины  $\varphi$ :

$$(2) \quad \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{u} \varphi) - \nabla \cdot (\Gamma \nabla \varphi) = 0$$

Первый член уравнения (2) представляет собой нестационарное слагаемое, второй - конвективное слагаемое, далее - диффузионное слагаемое. Для упрощения дальнейшего изложения будем считать коэффициент диффузии константой. В общем случае полный вид дискретного аналога дифференциального уравнения переноса скалярной величины (2) с учетом вышеперечисленных допущений, при аппроксимации временного слагаемого с помощью неявной схемы Эйлера [17] для контрольного объема (ячейки)  $P$  определяется выражением:

$$(3) \quad \rho \frac{\varphi_P - \varphi_P^{t-1}}{\Delta t} V_P + C_P - D_P = 0$$

где  $\varphi_P$  - скалярная величина в центре ячейки  $P$  на текущем временном шаге,  $\varphi_P^{t-1}$  - скалярная величина в центре ячейки  $P$  на предыдущем временном шаге,  $C_P$  - конвективное слагаемое для ячейки  $P$  на текущем временном шаге,  $D_P$  - диффузионное слагаемое для ячейки  $P$  на текущем временном шаге.

Дальнейшее описание метода представлено на примере дискретных аналогов конвективного и диффузионного слагаемых для случая согласованного интерфейса и их модификации для случая несогласованного интерфейса. Рассмотрим расчетную модель, состоящую из двух фрагментов сетки, представляющих собой расчетные области А и В, смежные границы которых соответствуют друг другу по количеству и расположению узлов, образуя согласованный интерфейс (Рисунок 1). При аппроксимации на конечно-объемной сетке конвективное и диффузионное слагаемые на текущем временном шаге для ячейки, лежащей в области согласованного интерфейса определяются выражениями:

$$(4) \quad C_P = \sum_{f=\text{face}(P_{\text{inner}}, P_{\text{bound}})} \rho \varphi_f (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f) + \sum_{f=\text{face}(P_{\text{interface}})} \rho \varphi_f (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f)$$

$$(5) \quad D_P = \sum_{f=\text{face}(P_{\text{inner}}, P_{\text{bound}})} \Gamma (\nabla \varphi_f \cdot \mathbf{S}_f) + \sum_{f=\text{face}(P_{\text{interface}})} \Gamma (\nabla \varphi_f \cdot \mathbf{S}_f)$$

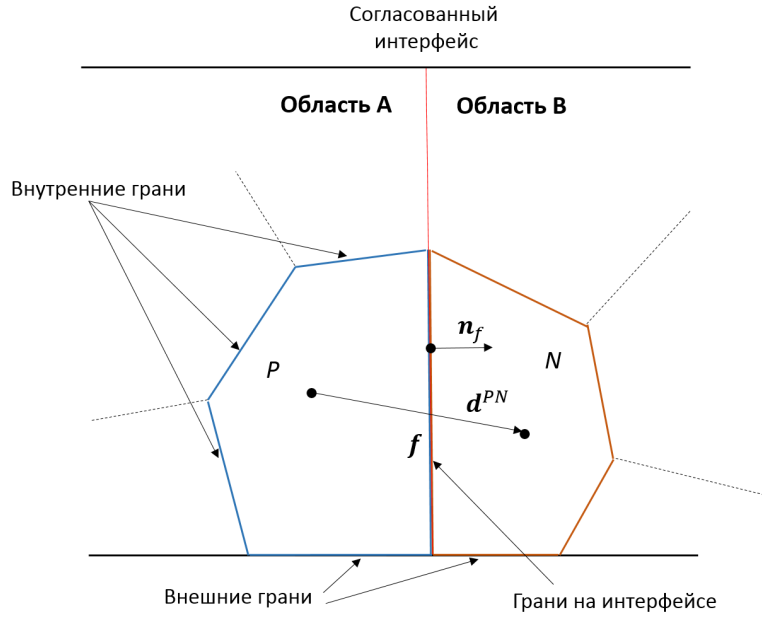


Рис. 1. Схематичный пример сетки с согласованным внутренним интерфейсом

где  $\mathbf{S}_f = S_f \mathbf{n}_f$  - площадь, ориентированная по нормали к грани  $f$ ,  $S_f$  - площадь грани  $f$ ,  $\varphi_f$  - скалярная величина в центре грани  $f$  на текущем временном шаге,  $\mathbf{u}_f$  - скорость в центре грани  $f$  на текущем временном шаге,  $\nabla \varphi_f$  - градиент скалярной величины на грани  $f$  на текущем временном шаге,  $f = \text{face}(P_{inner}, P_{bound})$  - суммирование по всем внутренним и внешним граням, ограничивающим ячейку  $P$ ,  $f = \text{face}(P_{interface})$  - суммирование по всем интерфейсным граням, ячейки  $P$ .

Значения неизвестных величин  $\varphi_f$  и  $\mathbf{u}_f$  для внутренних и интерфейсных граней могут быть вычислены по любой из известных схем аппроксимации [16].

В случае использования схемы аппроксимации CD значения величин  $\varphi_f$  и  $\mathbf{u}_f$  на гранях ячейки  $P$  (Рисунок 1) определяются выражениями:

$$(6) \quad \varphi_f = \lambda_f \varphi_P + (1 - \lambda_f) \varphi_N$$

$$(7) \quad \mathbf{u}_f = \lambda_f \mathbf{u}_P + (1 - \lambda_f) \mathbf{u}_N$$

где значение геометрического интерполяционного коэффициента  $\lambda_f$  для ячейки  $P$  граничащей с ячейкой  $N$  через грань  $f$  (Рисунок 1) определяется выражением:

$$(8) \quad \lambda_f = \frac{|\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{d}^{PN}|}{|\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{d}^{PN}| + |\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{d}^{NP}|}$$

где  $\mathbf{d}^{PN}$  и  $\mathbf{d}^{NP}$  - вектора, построенные между центрами ячеек (Рисунок 1).

Вычисление градиента на грани на произвольных неструктурированных сетках выполняется с учетом поправки на неортогональность [18]. Значение градиента  $\nabla \varphi_f^n$  на интерфейсной грани  $f$  ячейки  $P$  (Рисунок 1) на итерации  $n$

текущего временного шага определяется выражением:

$$(9) \quad \nabla \varphi_f^n = (\varphi_N^n - \varphi_P^n) \frac{\mathbf{S}_f}{\mathbf{S}_f \cdot \mathbf{d}_{PN}} + \overline{\nabla \varphi_f^{n-1}} - (\overline{\nabla \varphi_f^{n-1}} \cdot \mathbf{d}_{PN}) \frac{\mathbf{S}_f}{\mathbf{S}_f \cdot \mathbf{d}_{PN}}$$

где  $\overline{\nabla \varphi_f^{n-1}} = \lambda_f \nabla \varphi_P^{n-1} + (1 - \lambda_f) \nabla \varphi_N^{n-1}$  - интерполированная величина градиента скалярной величины на грани  $f$  на предыдущей итерации.

В свою очередь градиент  $\nabla \varphi_P$  в центре ячейки  $P$  может быть вычислен по алгоритму Грина-Гаусса [16] (аналогично находится для ячейки  $N$ ):

$$(10) \quad \nabla \varphi_P = \frac{1}{V_P} \sum_{f=face(P)} \varphi_f \mathbf{S}_f$$

Окончательный вид дискретного аналога дифференциального уравнения переноса скалярной величины (3) может быть представлен в виде системы алгебраических уравнений (СЛАУ) в которой для каждой ячейки расчетной области (Рисунок 1) составляется уравнение:

$$(11) \quad a_P \varphi_P + a_{PN} \varphi_N + \sum_{i=nb(P)} a_i \varphi_i = b_P$$

где  $a_P$  - диагональный коэффициент ячейки  $P$ ,  $a_{PN}$  - недиагональный коэффициент определяющий связь ячейки  $P$  с ячейкой  $N$  через согласованный интерфейс,  $a_i$  - недиагональные коэффициенты определяющие связь ячейки  $P$  с ячейками в расчетной области  $A$  через общие (внутренние) грани,  $b_P$  - правая часть,  $i = nb(P)$  - суммирование по всем соседним ячейкам  $i$  имеющим общие грани с ячейкой  $P$ .

**2.2. Метод связывания несогласованных интерфейсов.** Рассматривается расчетная модель, состоящую из двух фрагментов сетки, представляющих собой расчетные области  $A$  и  $B$ , смежные границы которых образуют несогласованный интерфейс (Рисунок 2). Под несогласованным интерфейсом подразумевается пара смежных границ несогласованных фрагментов сетки, на которых, количество и расположение узлов и ребер в общем случае не совпадают.

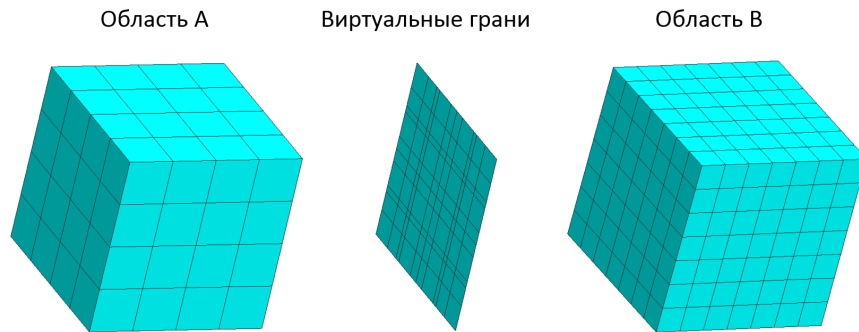


Рис. 2. Формирование виртуальных граней

Связывание смежных границ на несогласованных интерфейсах происходит путем замены исходных граней на набор виртуальных (Рисунок 2). Геометрические параметры виртуальных граней определяются в результате последовательно проецирования исходных граней области А на все исходные грани области В. Для определения координат узлов, образуемых при пересечении граней может быть использован любой из алгоритмов построения пересечений многоугольников [20]. Полученный набор виртуальных граней образует виртуальный интерфейс, позволяющий установить связь между ячейками несогласованных смежных областей сетки.

В общем случае виртуальный интерфейс состоит из набора внутренних и внешних виртуальных граней (Рисунок 3). Внешние виртуальные грани не имеют связи с ячейками на противоположной границе интерфейса и должны быть обработаны в соответствии с выбранными граничными условиями. Внутренние виртуальные грани формируют связь между смежными ячейками на интерфейсе.

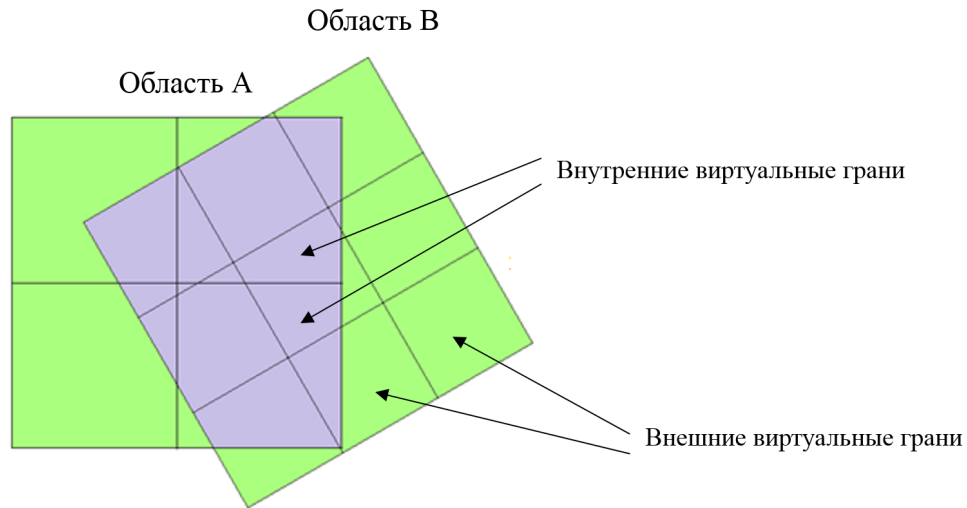


Рис. 3. Формирования виртуальных граней на несогласованном интерфейсе

Рассмотрим модификацию конвективного (4) и диффузионного (5) слагаемых при переходе от исходных к виртуальным граням на примере ячейки  $P$ , лежащей на несогласованном интерфейсе (Рисунок 4).

Дискретный аналог конвективной составляющей (4) для ячейки  $P$ , лежащей на несогласованном интерфейсе представим в виде:

$$(12) \quad C_P = \sum_{f=\text{face}(P_{\text{inner}}, P_{\text{bound}})} \rho \varphi_f (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f) + \sum_{f=\text{face}(P_{\text{interface}})} \sum_v \rho \varphi_{f^v} (\mathbf{u}_{f^v} \cdot \mathbf{S}_{f^v})$$

где  $\varphi_{f^v}$  и  $\mathbf{u}_{f^v}$  - скалярная величина и скорость на виртуальной грани  $f^v$ , образовавшейся на исходной грани  $f$  на текущем временном шаге,  $\mathbf{S}_{f^v}$  - площадь виртуальной грани  $f^v$  ориентированная по нормали к исходной грани  $f$ .

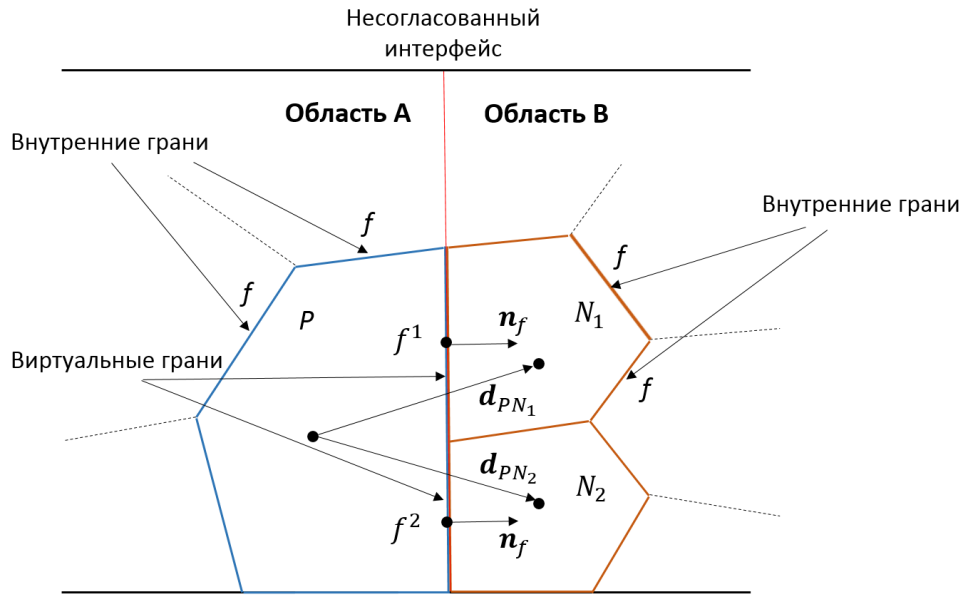


Рис. 4. Схематичный пример сетки с несогласованным внутренним интерфейсом

Дискретный аналог диффузионной составляющей (5) для ячейки  $P$ , лежащей на несогласованном интерфейсе представим в виде:

$$(13) \quad D_P = \sum_{f=\text{face}(P_{\text{inner}}, P_{\text{bound}})} \Gamma(\nabla\varphi_f \cdot \mathbf{S}_f) + \sum_{f=\text{face}(P_{\text{interface}})} \sum_v \Gamma(\nabla\varphi_{f^v} \cdot \mathbf{S}_{f^v})$$

где  $\nabla\varphi_{f^v}$  - величина градиента скалярной величины на виртуальной грани  $f^v$ .

Значения неизвестных величин  $\varphi_{f^v}$  и  $\mathbf{u}_{f^v}$ , в (12) относятся к центру виртуальной грани  $f^v$  (Рисунок 5) и могут быть вычислены по любой из известных схем [16]. Для описания метода воспользуемся схемой CD:

$$(14) \quad \varphi_{f^v} = \lambda_{f^v} \varphi_P + (1 - \lambda_{f^v}) \varphi_{N_v}$$

$$(15) \quad \mathbf{u}_{f^v} = \lambda_{f^v} \mathbf{u}_P + (1 - \lambda_{f^v}) \mathbf{u}_{N_v}$$

где  $\lambda_{f^v}$  - значение геометрического интерполяционного коэффициента для ячейки  $P$ , граничащей с ячейкой  $N_v$  через виртуальную грань  $f^v$  (Рисунок 4) определяется выражением:

$$(16) \quad \lambda_{f^v} = \frac{|\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{d}^{PN_v}|}{|\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{d}^{PN_v}| + |\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{d}^{N_v P}|}$$

Значение градиента  $\nabla\varphi_{f^v}^n$  на виртуальной грани  $f^v$  ячейки  $P$  (Рисунок 1) с учетом поправки на неортогональность на итерации  $n$  текущего временного шага равно:

$$(17) \quad \nabla\varphi_{f^v}^n = (\varphi_{N_v}^n - \varphi_P^n) \frac{\mathbf{S}_{f^v}}{\mathbf{S}_{f^v} \cdot \mathbf{d}_{PN_v}} + \overline{\nabla\varphi_{f^v}^{n-1}} - (\overline{\nabla\varphi_{f^v}^{n-1}} \cdot \mathbf{d}_{PN_v}) \frac{\mathbf{S}_{f^v}}{\mathbf{S}_{f^v} \cdot \mathbf{d}_{PN_v}}$$

где  $\overline{\nabla\varphi_{f^v}^{n-1}} = \lambda_{f^v} \nabla\varphi_P^{n-1} + (1 - \lambda_{f^v}) \nabla\varphi_{N_v}^{n-1}$  - интерполированная величина градиента скалярной величины на грани  $f^v$  полученная на предыдущей итерации.



Значение градиента  $\nabla\varphi_P$  в центре ячейки  $P$ , лежащей на несогласованном интерфейсе вычисляется по алгоритму Грина-Гаусса (аналогично находится для ячеек  $N_v$ ):

$$(18) \quad \nabla\varphi_P = \frac{1}{V_P} \left( \sum_{f=face(P_{inner}, P_{bound})} \varphi_f \mathbf{S}_f + \sum_{f=face(P_{interface})} \varphi_f^{av} \mathbf{S}_f \right)$$

где  $\varphi_f^{av} = \frac{\sum_v \varphi_{fv} S_{fv}}{\sum_v S_{fv}}$  - осредненное значение скалярной величины на интерфейсной грани  $f$ .

В результате описанных выше преобразований в дискретный аналог уравнения переноса (11) для каждой ячейки  $P$ , лежащей на несогласованном интерфейсе (Рисунок 5), добавляются слагаемые, учитывающие связь смежных ячеек через виртуальные грани. В общем случае, для сеточной модели, состоящей из двух несогласованных счетных областей А и В (Рисунок 5), формируется СЛАУ (19), которая может быть решена одним из итерационных методов [20].

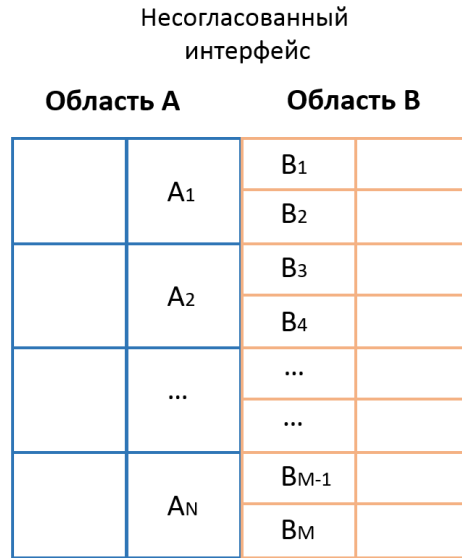


Рис. 5. Схематичный пример сетки с несогласованным интерфейсом

$$(19) \quad \left( \begin{array}{cccccccc} a_{A_1} & \dots & 0 & a_{A_1, B_1} & a_{A_1, B_2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{A_N} & 0 & 0 & \dots & a_{A_N, B_{M-1}} & a_{A_N, B_M} \\ a_{A_1, B_1} & \dots & 0 & a_{B_1} & \dots & \dots & 0 & 0 \\ a_{A_1, B_2} & \dots & 0 & \dots & a_{B_2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{A_N, B_{M-1}} & 0 & 0 & \dots & a_{B_{M-1}} & 0 \\ 0 & \dots & a_{A_N, B_M} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{B_M} \end{array} \right) (\varphi) = (b)$$

где  $a_{A_i}$ ,  $i \in [1...N]$  - диагональные коэффициенты ячеек области А,  $a_{B_j}$ ,  $j \in [1...M]$  - диагональные коэффициенты ячеек области В,  $a_{A_i, B_j}$  - недиагональные коэффициенты определяющие связь ячеек  $A_i$  с ячейками  $B_j$  через виртуальные грани,  $(\varphi)$  - вектор искомой скалярной величины,  $(b)$  - вектор правой части.

Для упрощения изложения в СЛАУ (19) не показаны недиагональные коэффициенты, определяющие связь ячеек через внутренние грани. Запишем вид диагонального коэффициента СЛАУ для ячеек в области А без учета граничных условий на итерации  $n$  текущего временного шага (для ячеек в области В записывается аналогично):

$$(20) \quad a_{A_i} = \rho \frac{\varphi_{A_i}^n}{\Delta t} V_{A_i} + a_{A_i}^{inner} + a_{A_i}^{interface}$$

Слагаемое  $a_{A_i}^{inner}$  в (20) формируется за счет соседства ячейки  $A_i$  с ячейками в области А через внутренние грани:

$$(21) \quad a_{A_i}^{inner} = \sum_{f=face(A_{inner})} (\rho \lambda_f \mathbf{u}_f^n \cdot \mathbf{S}_f - \Gamma \frac{S_f}{\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{d}^{A_i A_j}})$$

где  $A_i$  - ячейка смежная с ячейкой  $A_j$  через внутреннюю грань  $f$ .

Слагаемое  $a_{A_i}^{interface}$  в (20) формируется за счет соседства ячейки  $A_i$  с ячейками  $B_j$  через виртуальные грани несогласованного интерфейса:

$$(22) \quad a_{A_i}^{interface} = \sum_{f=face(A_{interface})} \sum_v (\rho \lambda_{f^v} \mathbf{u}_{f^v}^n \cdot \mathbf{S}_{f^v} - \Gamma \frac{S_{f^v}}{\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{d}^{A_i B_j}})$$

где  $A_i$  - ячейка смежная с ячейкой  $B_j$  через виртуальную грань  $f^v$ .

Недиагональные коэффициенты СЛАУ (19) определяющие связь ячейки  $A_i$  с ячейкой  $B_j$  через виртуальные грани несогласованного интерфейса на итерации  $n$  текущего временного шага определяются выражением:

$$(23) \quad a_{A_i B_j} = a_{B_j A_i} = \sum_{f=face(A_{interface})} \sum_v (\rho (1 - \lambda_{f^v}) \mathbf{u}_{f^v}^n \cdot \mathbf{S}_{f^v} + \Gamma \frac{S_{f^v}}{\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{d}^{A_i B_j}})$$

где  $B_j$ ,  $j \in [1...M]$  - ячейки, имеющие соседство с ячейкой  $A_i$  через виртуальные грани  $f^v$ .

Коэффициенты правой части СЛАУ для ячеек в области А без учета граничных условий на итерации  $n$  определяются выражением (для ячеек в области В определяются аналогично):

$$(24) \quad b_{A_i}^n = \rho \frac{\varphi_{A_i}^{t-1}}{\Delta t} V_{A_i} + b_{A_i}^{inner} + b_{A_i}^{interface}$$

где слагаемое  $b_{A_i}^{inner}$  определяется как:

$$(25) \quad b_{A_i}^{inner} = \sum_{f=face(P_{inner})} \Gamma S_f \left[ ((\overline{\nabla \varphi}_f \cdot \mathbf{n}_f - \frac{\overline{\nabla \varphi}_f \cdot \mathbf{d}^{A_i A_j}}{\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{d}^{A_i A_j}}) \right]^{n-1}$$

а слагаемое  $b_{A_i}^{interface}$  имеет вид:

$$(26) \quad b_{A_i}^{interface} = \sum_{f=face(P_{interface})} \sum_v \left[ \Gamma S_{f^v} \left( (\overline{\nabla \varphi}_{f^v} \cdot \mathbf{n}_f - \frac{\overline{\nabla \varphi}_{f^v} \cdot \mathbf{d}^{A_i B_j}}{\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{d}^{A_i B_j}}) \right) \right]^{n-1}$$

Описанный метод демонстрирует способ объединения смежных несогласованных областей сетки в единую расчетную область с помощью формируемых виртуальных интерфейсов и может быть применим для всех уравнений системы (1). Метод не требует модификации исходной сетки и учитывает связь смежных ячеек через набор виртуальных граней формируя дополнительные слагаемые в СЛАУ расчетной модели. Таким образом, применение вышеописанного метода для расчета на моделях, состоящих из несогласованных сеточных областей по вычислительным затратам не отличается от расчета на согласованных сеточных моделях, при этом существенно сокращая затраты на построение сеточной модели.

В следующем разделе рассмотрена эффективность представленного алгоритма на примере решения задач турбулентного течения в круглой трубе с внезапным сужением и турбулентного течения в круглом диффузоре.

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Описанный метод реализован на базе отечественного пакета программ ЛОГОС, предназначенного для моделирования трехмерных задач тепломассопереноса [13]. Ниже представлена работа реализованного метода на примере численного эксперимента, являющимся широко известным тестом, основанным на эмпирических расчетах [21]. Пакет программ ЛОГОС успешно прошел верификацию на серии задач гидродинамики [22], поэтому целью численного эксперимента ставилось лишь сравнение результатов расчета идентичных моделей на сетках, состоящих из согласованных и несогласованных фрагментов.

**3.1. Задача турбулентного течения несжимаемой жидкости в круглой трубе с внезапным сужением.** Рассмотрим работу метода на примере численного моделирования турбулентного течения несжимаемой жидкости в круглой трубе с внезапным сужением [21]. Геометрия расчетной модели и расположение контрольных сечений показанная на рисунке 6. Для проверки работы представленного метода выполнены сравнительные расчеты на согласованной и несогласованной сеточных моделях.

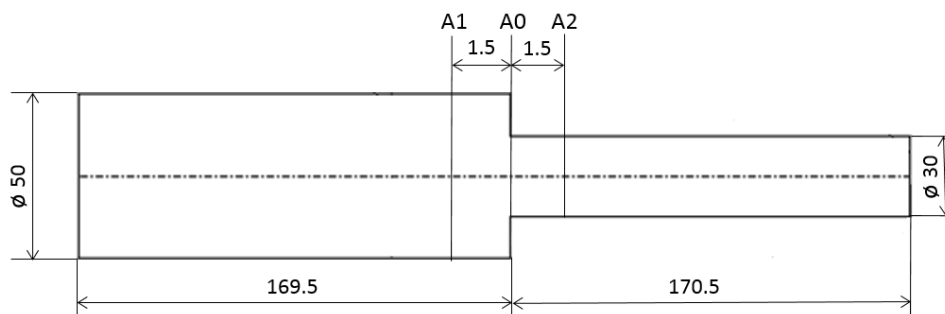


Рис. 6. Геометрия модели и расположение контрольных сечений. Размеры указаны в мм

Несогласованная сеточная модель состоит из двух несогласованных фрагментов сетки, построенных независимо друг от друга с помощью препроцессора пакета программ ЛОГОС. Фрагменты несогласованной сетки в области

сужения представлены на рисунке 7. Согласованная сеточная модель получена путем сшивки фрагментов несогласованной модели, методом геометрического слияния, выполненной с помощью препроцессора пакета программ ЛОГОС.

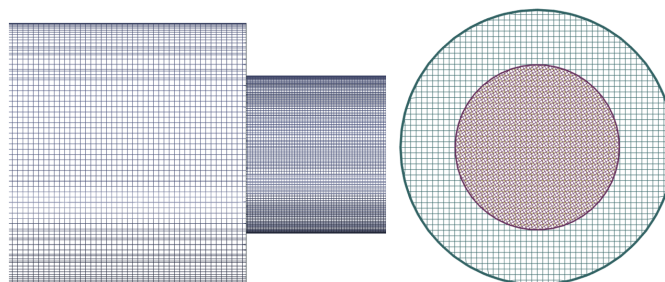


Рис. 7. Фрагменты несогласованной сетки в продольном и поперечном сечениях

Для расчетных моделей определяющими параметрами являются: плотность жидкости, равная  $998,2 \text{ кг/м}^3$  и динамическая вязкость, равная  $0,00101 \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$ . Для моделирования турбулентности используется RANS SST модель турбулентности [23] с параметрами: интенсивность турбулентности равная  $0,05\%$  и длиной перемешивания равная  $0,001 \text{ м}$ . Для аппроксимации конвективных слагаемых в расчетах используется противопоточная схема первого порядка точности UD [16].

На рисунке 8 показано расположение граничных условий расчетных моделей. Внешние стенки заданы как непроницаемые жесткие стенки с прилипанием. Скорость потока на входе  $V = 0,4227 \text{ м/с}$ . На выходе задано давление  $P = 0 \text{ Па}$ . Для согласования решения в модели состоящей из несогласованных областей использованы интерфейсы (Рисунок 8), реализованные в пакете программ ЛОГОС в соответствии с вышеописанным методом.

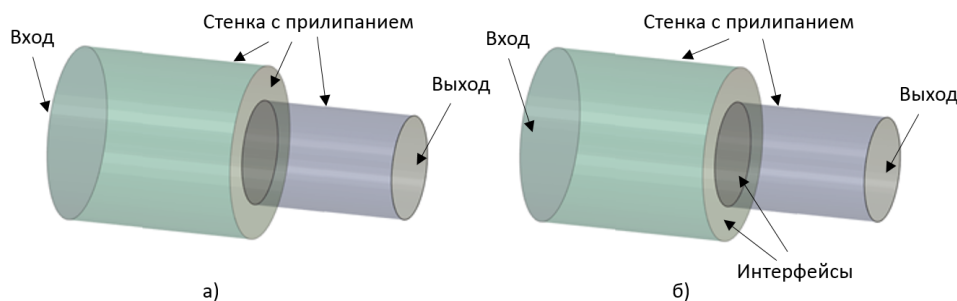


Рис. 8. Граничные условия: а) для согласованной сеточной модели, б) для несогласованной сеточной модели

Расчеты задач выполнены в пакете программ ЛОГОС в параллельном режиме на 80 процессорах в стационарной постановке до сходимости по массе порядка  $10^{-6} \text{ кг}$ . График сходимости итерационного процесса задач представлен на рисунке 9.

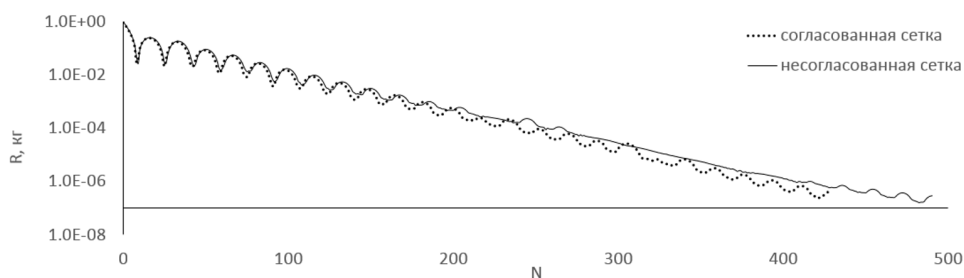


Рис. 9. График сходимости (R – невязка по массе, N – номер шага)

При анализе результатов сравниваются профили модуля скорости ( $V$ ) и давления ( $P$ ) вдоль горизонтальной линии, проходящей через середину канала (Рисунок 10), а также профили скорости и давления в контрольных сечениях (Рисунок 11, 12).

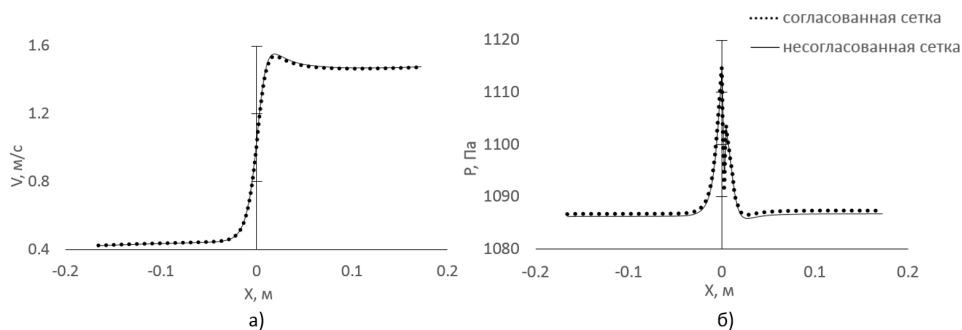


Рис. 10. Профили величин вдоль канала: а) модуля скорости, б) давления

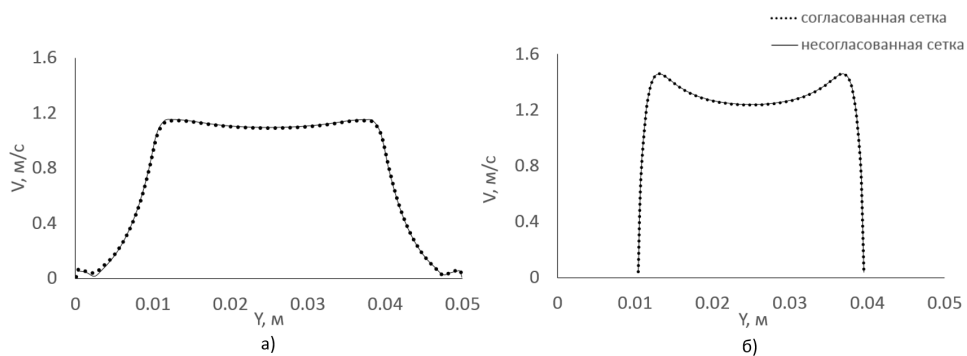


Рис. 11. Профили скорости в контрольных сечениях: а) – в сечении А1, б) – в сечении А2

Полученные профили скорости и давления в продольном и поперечных сечениях показывают хорошее согласие результатов, полученных при расчетах

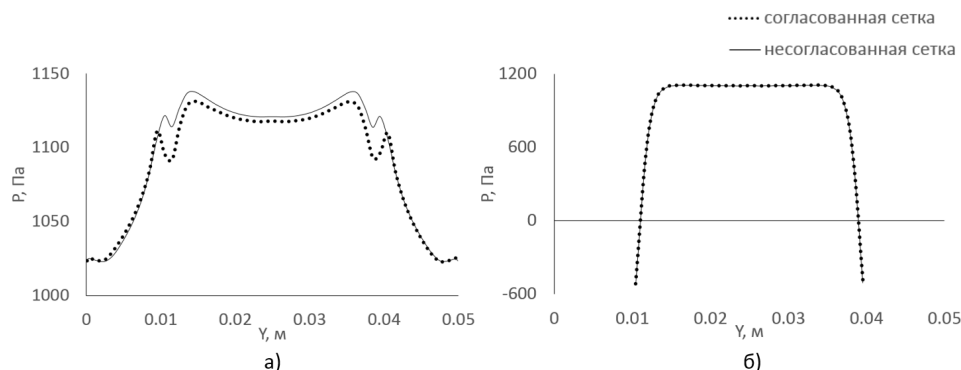


Рис. 12. Профили давления в контрольных сечениях: а) – в сечении А1, б) – в сечении А2

на согласованной и несогласованной сеточных моделях. Из графиков сходимости видно, что наличие несогласованного интерфейса несущественно влияет на скорость сходимости итерационного процесса.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено описание численного метода, учитывающего особенности решения уравнений Навье-Стокса при моделировании течений вязкой несжимаемой жидкости в области смежных границ несогласованных произвольных неструктурированных фрагментов сетки. Метод позволяет объединять смежные несогласованные фрагменты неструктурированной сетки в единую расчетную область с помощью формируемых виртуальных интерфейсов, учитывающих связи смежных ячеек через виртуальные грани. Алгоритм метода был реализован в составе пакета программ ЛОГОС в части решателя гидродинамики, с помощью которого проводились тестовые расчеты. Представленные результаты решения задач с применением данного метода на сеточных моделях, содержащих согласованные и несогласованные сетки. Показано, что наличие несогласованных интерфейсов не оказывает существенного влияния на картину течения и скорость сходимости решения.

#### REFERENCES

- [1] V. Efremov, A. Kozelkov, S. Dmitriev, A. Kurkin, V. Kurulin, D. Utkin, *Technology of 3D simulation of high-speed damping processes in the hydraulic brake device*, in K. Volkov ed., *Computational Models in Engineering*, Kingston University, London, 2018.
- [2] A.V. Struchkov, A.S. Kozelkov, K. Volkov, A.A. Kurkin, R.N. Zhuchkov, A.V. Sarazov, *Numerical simulation of aerodynamic problems based on adaptive mesh refinement method*, *Acta Astronautica*, **172** (2020), 7–15.
- [3] A.S. Kozelkov, M.A. Pogosyan, D.Y. Strelets, N.V. Tarasova, *Application of mathematical modeling to solve the emergency water landing task in the interests of passenger aircraft certification*, *Aerospace Systems*, **4** (2021), 75–89.
- [4] M. Berger, *On conservation at grid interfaces*, *SIAM J. Numer. Anal.*, **24**:5 (1987), 967–984. Zbl 0633.65086
- [5] H. Jasak, Z. Tukovic, *Automatic mesh motion for the unstructured finite volume method*, *Transactions of FAMENA*, **30**:2 2007, 1–20.

- [6] Erik Bjerklund, *A modification of the movingConeTopoFvMesh library. Report for the PhD course in OpenFOAM at Chalmers TH*, Gteborg, Sverige, 2009.
- [7] F. Piscaglia, A. Montorfano, A. Onorati, *Development of fully-automatic parallel algorithms for mesh handling in the openFOAM -2.2.x Technology*, SAE Technical Paper 2013-24-0027, 2013.
- [8] N. Qin, G. Carnie, A. LeMoigne, X. Liu, S. Shahpar, *Buffer layer method for linking two non-matching multi-block structured grids*, in *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 05 January 2009 – 08 January 2009 Orlando, Florida*, 2009, 5–8.
- [9] Y. Wang, N. Qin, G. Carnie, S. Shahpar, *Zipper layer method for linking two dissimilar structured meshes*, *J. Comput. Phys.*, **255** (2013), 130–148. Zbl 1349.65672
- [10] Y. Zhang, H. Chen, S. Fu, *Improvement to patched grid technique with high-order conservative remapping method*, *J. Aircr.*, **48**:3 (2011), 884–893.
- [11] M. Beaudoin, H. Jasak, *Development of generalized grid interface for turbomachinery simulation with OpenFOAM*, in *Proceedings of the OpenSource CFD International Conference*, Berlin, 2008.
- [12] M. Beaudoin, H. Nilsson, Page M, H. Jasak, *Evaluation of an improved mixing plane interface for OpenFOAM*, *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science*, **22**, Computational and Experimental Techniques, 22 022004.
- [13] A.S. Kozelkov, V.V. Kurulin, S.V. Lashkin, R.M. Shagaliev, A.V. Yalozo, *Investigation of supercomputer capabilities for the scalable numerical simulation of computational fluid dynamics problems in industrial applications*, *Comput. Math. Math. Phys.*, **56**:8 (2016), 1506–1516. Zbl 1445.76003
- [14] S.V. Lashkin, A.S. Kozelkov, A.V. Yalozo, V.Yu. Gerasimov, D.K. Zelensky, *Efficiency analysis of the parallel implementation of the SIMPLE algorithm on multiprocessor computers*, *J. Appl. Mech. Tech. Physics*, **58**:7 (2017), 1242–1259.
- [15] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Fluid mechanics*, Pergamon Press, Oxford etc., 1987. Zbl 0655.76001
- [16] J.H. Ferziger, M. Perić, *Computational method for fluid dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 2002. Zbl 0998.76001
- [17] R.D. Moser, J. Kim, N.N. Mansour, *Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 590$* , *Phys. Fluids*, **11**:4 (1999), 943–945. Zbl 1147.76463
- [18] H. Jasak, *Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flow*, PhD Thesis, Imperial College London, London, 1996.
- [19] O.V. Chentsov, A.V. Skvortsov, *Overview of polygon overlay construction algorithms*, *Bulletin of Tomsk State University*, **280** (2003), 338–345.
- [20] Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, SIAM, Philadelphia, 2003. Zbl 1031.65046
- [21] I.E. Idel’chik, *Handbook of hydraulic resistance*, Mashinostroenie, Moscow, 1992.
- [22] E.S. Tyatyushkina, A.S. Kozelkov, A.A. Kurkin, E.N. Pelinovsky, V.V. Kurulin, K.S. Plygunova, D.A. Utkin, *Verification of the LOGOS software package for tsunami simulations*, *Geosciences*, **10**:10 (2020), 385.
- [23] F.R. Menter, A.V. Garbaruk, Y. Egorov, *Explicit algebraic Reynolds stress models for anisotropic wall-bounded flows* in *Proc. of 3rd European Conference for Aero-Space Sciences (EUCASS), July 6-9th, 2009, Versailles*, 2009.

ALEXEY VLADIMIROVICH KOROTKOV

FEDERAL STATE UNITARY ENTERPRISE “RUSSIAN FEDERAL NUCLEAR CENTER - ALL-RUSSIAN RESEARCH INSTITUTE OF EXPERIMENTAL PHYSICS” (FSUE “RFNC-VNIIEF”),

SAROV, RUSSIA,

FEDERAL STATE-FUNDED HIGHER EDUCATION INSTITUTION “NIZHNY NOVGOROD STATE TECHNICAL UNIVERSITY N.A. R.E. ALEXEYEV”,

NIZHNY NOVGOROD, RUSSIA

*Email address: alvladkor79@mail.ru*

ANDREY SERGEEVICH KOZELKOV  
FEDERAL STATE UNITARY ENTERPRISE "RUSSIAN FEDERAL NUCLEAR CENTER - ALL-RUSSIAN  
RESEARCH INSTITUTE OF EXPERIMENTAL PHYSICS" (FSUE "RFNC-VNIEF"),  
SAROV, RUSSIA,  
FEDERAL STATE-FUNDED HIGHER EDUCATION INSTITUTION "NIZHNY NOVGOROD STATE  
TECHNICAL UNIVERSITY N.A. R.E. ALEXEYEV",  
NIZHNY NOVGOROD, RUSSIA,  
MOSCOW AVIATION INSTITUTE (NATIONAL RESEARCH UNIV.),  
MOSCOW, RUSSIA  
*Email address: ASKozelkov@mail.ru*