S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 19, №2, стр. 1088–1093 (2022) УДК 514.7
DOI 10.33048/semi.2022.19.087 MSC 53D25, 37J35

НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ МНОГОМЕРНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ И АЛГЕБРЫ ЛИ

С.В. АГАПОВ

Abstract. In this paper, we construct explicit local examples of multidimensional Riemannian metrics whose geodesic flows have non-polynomial first integrals and are completely integrable. We rely on a construction described in a recent paper by A.V. Galajinsky which allows one to construct such examples via the Casimir invariants of finite-dimensional Lie algebras.

Keywords: Riemannian metric, geodesic flow, non-polynomial first integral, Lie algebra, Casimir invariant.

1. Введение

Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{x}^j = \{x^j, H\}, \quad \dot{p}_j = \{p_j, H\}, \quad i, j = 1, \dots, n \tag{1.1}$$

с гамильтонианом и скобкой Пуассона следующего вида:

$$H = \frac{1}{2} g^{ij}(x) p_i p_j, \qquad \{F, H\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x^i} \right), \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Система (1.1) задает геодезический поток римановой метрики $dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ на n-мерном многообразии с координатами $x = (x^1, \dots, x^n)$. Первым интегралом гамильтоновой системы (1.1) называется такая функция $F(x, p)$, что $\dot{F} = \{F, H\} \equiv 0$. Геодезический поток называется вполне интегрируемым,

---

Agapov, S.V., Non-polynomial integrals of multidimensional geodesic flows and Lie algebras.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-41-00018).

Поступила 4 ноября 2022, опубликована 29 декабря 2022.

если найдутся n функционально независимых п.в. первых интегралов $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$, находящихся попарно в инволюции: $\{F_i, F_j\} = 0$, $i, j = 1, \dots, n$.

Наиболее изученными являются двумерные геодезические потоки. Локальный аспект этой задачи исследовался еще в работах Биркгофа (см. [1]), им же были классифицированы метрики, допускающие линейный или квадратичный по импульсам первый интеграл. В [2], [3] доказано существование двумерных метрик с дополнительным полиномиальным интегралом сколь угодно высокой степени (локально). В [4] построен локальный пример метрики с интегралом четвертой степени. А в [5] классифицированы линейные и квадратичные интегралы на двумерных сфере и торе.

Неполиномиальные интегралы геодезических потоков, *которые только и будут интересовать нас в дальнейшем*, также исследовались во многих работах (см., например, [6] — [16]). Так, например, в [15] построено большое количество явных примеров двумерных римановых метрик с дополнительным интегралом в виде рациональной функции по импульсам.

В [16] предложена конструкция, позволяющая по каждой конечномерной вещественной алгебре Ли построить некоторую риманову метрику, геодезический поток которой обладает дополнительными первыми интегралами, соответствующими инвариантам Казимира исходной алгебры Ли. Опишем вкратце эту конструкцию.

Рассмотрим произвольную алгебру Ли размерности n с порождающими e_k и структурными соотношениями:

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \qquad c_{ij}^k = -c_{ji}^k.$$

Пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$ и $p = (p_1, \dots, p_n)$ — канонические координаты и импульсы. Положим $e_i = c_{ij}^k x^j p_k$ и построим гамильтониан $H = \frac{1}{2}\left(\alpha_1^2 e_1^2 + \dots \alpha_n^2 e_n^2\right)$, где α_j — произвольные вещественные постоянные. Построенный таким образом гамильтониан будет отвечать геодезическому потоку некоторой невырожденной римановой метрики (возможно, после соответствующей редукции по циклическим переменным, если такие возникнут). Предположим теперь, что $L(e)$ — инвариант Казимира исходной алгебры Ли: $[L(e), e_k] = 0$, $k = 1, \dots, n$. Переписав его в терминах x, p, получим первый интеграл геодезического потока, коммутирующий с гамильтонианом относительно стандартной скобки Пуассона.

При помощи вышеописанной конструкции в [16] построено несколько примеров римановых метрик и неполиномиальных интегралов. В данной работе мы, пользуясь той же самой конструкцией, дополняем этот список примеров. Список соответствующих алгебр Ли вместе с коммутационными соотношениями и инвариантами Казимира можно найти в [17].

Любопытно, что во всех построенных примерах дополнительные интегралы вообще не зависят от координат.

2. Примеры двумерных метрик

Первые два интегрируемых примера относятся к двумерным метрикам.

Трехмерная алгебра Ли $A_{3,3}$ (мы следуем обозначениям, принятым в [17]) имеет следующие ненулевые коммутационные соотношения:

$$[e_1, e_3] = e_1, \qquad [e_2, e_3] = e_2,$$

то есть $c_{13}^1 = c_{23}^2 = 1$. Инвариант Казимира имеет вид $L = e_2/e_1$. Следуя вышеописанной конструкции, положим

$$e_1 = c_{13}^1 x^3 p_1 = x^3 p_1, \quad e_2 = c_{23}^2 x^3 p_2 = x^3 p_2,$$

$$e_3 = c_{31}^1 x^1 p_1 + c_{32}^2 x^3 p_2 = -(x^1 p_1 + x^2 p_2).$$

Построим гамильтониан $H = \frac{1}{2}\left(\alpha_1^2 e_1^2 + \alpha_2^2 e_2^2 + \alpha_3^2 e_3^2\right)$. Поскольку импульс p_3 не входит в H, то положим $p_3 = 0$, $x^3 = s$, где s — произвольная постоянная. Инвариант Казимира L в переменных x, p принимает вид $L = p_2/p_1$. В итоге получаем

Пример 1. *(Алгебра $A_{3,3}$ в [17]).*

Пусть s, α_k — произвольные постоянные, $k = 1, 2, 3$. Тогда

$$H = \frac{1}{2} g^{ij}(x) p_i p_j = \frac{1}{2}\left(s^2\left(p_1^2\alpha_1^2 + p_2^2\alpha_2^2\right) + (x^1 p_1 + x^2 p_2)^2 \alpha_3^2\right), \ F = \frac{p_2}{p_1}, \ \{F, H\} = 0.$$

Риманова метрика имеет вид $dl^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j$, где

$$g_{11} = \frac{\alpha_3^2 (x^2)^2 + \alpha_2^2 s^2}{\alpha_3^2 s^2 (\alpha_2^2 (x^1)^2 + \alpha_1^2 (x^2)^2) + s^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2},$$

$$g_{12} = -\frac{\alpha_3^2 x^1 x^2}{\alpha_3^2 s^2 (\alpha_2^2 (x^1)^2 + \alpha_1^2 (x^2)^2) + s^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2},$$

$$g_{22} = \frac{\alpha_3^2 (x^1)^2 + \alpha_1^2 s^2}{\alpha_3^2 s^2 (\alpha_2^2 (x^1)^2 + \alpha_1^2 (x^2)^2) + s^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2}.$$

Гауссова кривизна K построенной метрики постоянна и равна $K \equiv -\alpha_3^2$.

Пример 1 допускает следующее обобщение.

Пример 2. *(Алгебра $A_{3,5}^a$ в [17]).*

Пусть s, a, α_k — произвольные постоянные, $k = 1, 2, 3$. Тогда

$$H = \frac{1}{2}\left(s^2\left(p_1^2\alpha_1^2 + a^2 p_2^2\alpha_2^2\right) + (x^1 p_1 + a x^2 p_2)^2 \alpha_3^2\right), \quad F = \frac{p_2}{p_1^a}, \quad \{F, H\} = 0.$$

Риманова метрика имеет вид $dl^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j$, где

$$g_{11} = \frac{\alpha_3^2 (x^2)^2 + \alpha_2^2 s^2}{\alpha_3^2 s^2 (\alpha_2^2 (x^1)^2 + \alpha_1^2 (x^2)^2) + s^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2},$$

$$g_{12} = -\frac{\alpha_3^2 x^1 x^2}{a\alpha_3^2 s^2 (\alpha_2^2 (x^1)^2 + \alpha_1^2 (x^2)^2) + a s^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2},$$

$$g_{22} = \frac{\alpha_3^2 (x^1)^2 + \alpha_1^2 s^2}{a^2\alpha_3^2 s^2 (\alpha_2^2 (x^1)^2 + \alpha_1^2 (x^2)^2) + a^2 s^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2}.$$

Гауссова кривизна построенной метрики, вообще говоря, непостоянная. При $a = 1$ получим $K \equiv -\alpha_3^2$.

3. Примеры трехмерных метрик

Аналогичным образом строятся примеры трехмерных метрик. Поскольку выражения для компонент g_{ij} получаются весьма громоздкими, мы не будем их выписывать в явном виде. Отметим лишь, что все компоненты имеют "рациональный" вид, как в Примерах 1, 2.

Пример 3. *(Алгебра $A_{4,2}^a$ в [17]).*

Пусть s, a, α_k — произвольные постоянные, $k = 1, \ldots, 4$. Положим

$$g^{11} = a^2(\alpha_4^2(x^1)^2 + \alpha_1^2 s^2)), \quad g^{12} = a\alpha_4^2 x^1(x^2 + x^3), \quad g^{13} = a\alpha_4^2 x^1 x^3,$$

$$g^{22} = \alpha_4^2(x^2+x^3)^2+(\alpha_2^2+\alpha_3^2)s^2, \; g^{23} = \alpha_4^2 x^3(x^2+x^3)+s^2\alpha_3^2, \; g^{33} = \alpha_4^2(x^3)^2 x^4+s^2\alpha_3^2.$$

Тогда

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j, \qquad F_2 = \frac{p_2^a}{p_1}, \qquad F_3 = p_2 e^{-p_3/p_2},$$

$$\{F_2, H\} = \{F_3, H\} = \{F_2, F_3\} = 0.$$

Пример 4. *(Алгебра $A_{4,4}$ в [17]).*

Пусть s, α_k — произвольные постоянные, $k = 1, \ldots, 4$. Положим

$$g^{11} = \alpha_4^2(x^1+x^2)^2+(\alpha_1^2+\alpha_2^2)s^2, \; g^{12} = \alpha_4^2(x^1+x^2)(x^2+x^3)+s^2\alpha_2^2, \; g^{13} = \alpha_4^2 x^3(x^1+x^2),$$

$$g^{22} = \alpha_4^2(x^2+x^3)^2+(\alpha_2^2+\alpha_3^2)s^2, \; g^{23} = \alpha_4^2 x^3(x^2+x^3)+s^2\alpha_3^2, \; g^{33} = \alpha_4^2(x^3)^2+s^2\alpha_3^2.$$

Тогда

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j, \qquad F_2 = p_1 e^{-p_2/p_1}, \qquad F_3 = \frac{p_2^2 - 2p_1 p_3}{p_1^2},$$

$$\{F_2, H\} = \{F_3, H\} = \{F_2, F_3\} = 0.$$

Пример 5. *(Алгебра $A_{4,5}^{ab}$ в [17]).*

Пусть s, a, b, α_k — произвольные постоянные, $k = 1, \ldots, 4$. Положим

$$g^{11} = \alpha_4^2(x^1)^2 + \alpha_1^2 s^2, \qquad g^{12} = a\alpha_4^2 x^1 x^2, \qquad g^{13} = b\alpha_4^2 x^1 x^3,$$

$$g^{22} = a^2(\alpha_4^2(x^2)^2 + \alpha_2^2 s^2), \qquad g^{23} = ab\alpha_4^2 x^2 x^3, \qquad g^{33} = b^2(\alpha_4^2(x^3)^2 + \alpha_3^2 s^2).$$

Тогда

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j, \qquad F_2 = \frac{p_1^a}{p_2}, \qquad F_3 = \frac{p_1^b}{p_3},$$

$$\{F_2, H\} = \{F_3, H\} = \{F_2, F_3\} = 0.$$

4. Примеры четырехмерных метрик

Наконец, приведем несколько интегрируемых примеров четырехмерных метрик.

Пример 6. *(Алгебра $A_{5,7}^{abc}$ в [17]).*

Пусть s, a, b, c, α_k — произвольные постоянные, $k = 1, \ldots, 5$. Положим

$$g^{11} = \alpha_5^2(x^1)^2 + \alpha_1^2 s^2, \; g^{12} = a\alpha_5^2 x^1 x^2, \; g^{13} = b\alpha_5^2 x^1 x^3, \qquad g^{14} = c\alpha_5^2 x^1 x^4,$$

$$g^{22} = a^2(\alpha_5^2(x^2)^2 + \alpha_2^2 s^2), \qquad g^{23} = ab\alpha_5^2 x^2 x^3, \qquad g^{24} = ac\alpha_5^2 x^2 x^4,$$

$$g^{33} = b^2(\alpha_5^2(x^3)^2 + \alpha_3^2 s^2), \qquad g^{34} = bc\alpha_5^2 x^3 x^4, \qquad g^{44} = c^2(\alpha_5^2(x^4)^2 + \alpha_4^2 s^2).$$

Тогда

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j, \qquad F_2 = \frac{p_1^a}{p_2}, \qquad F_3 = \frac{p_1^b}{p_3}, \qquad F_4 = \frac{p_1^c}{p_4},$$

$$\{F_2, H\} = \{F_3, H\} = \{F_4, H\} = \{F_2, F_3\} = \{F_2, F_4\} = \{F_3, F_4\} = 0.$$

Пример 7. *(Алгебра $A^{bc}_{5,9}$ в [17]).*

Пусть s, b, c, α_k — произвольные постоянные, $k = 1, \dots, 5$. Положим

$$g^{11} = \alpha_5^2(x^1+x^2)^2+(\alpha_1^2+\alpha_2^2)s^2,\ g^{12} = s^2\alpha_2^2+\alpha_5^2x^2(x^1+x^2),\ g^{13} = b\alpha_5^2(x^1+x^2)x^3,$$

$$g^{14} = c\alpha_5^2(x^1+x^2)x^4, \quad g^{22} = \alpha_5^2(x^2)^2+\alpha_2^2s^2, \quad g^{23} = b\alpha_5^2x^2x^3, \qquad g^{24} = c\alpha_5^2x^2x^4,$$

$$g^{33} = b^2(\alpha_5^2(x^3)^2 + \alpha_3^2s^2), \qquad g^{34} = bc\alpha_5^2x^3x^4, \qquad g^{44} = c^2(\alpha_5^2(x^4)^2 + \alpha_4^2s^2).$$

Тогда

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j, \qquad F_2 = \frac{p_1^b}{p_3}, \qquad F_3 = \frac{p_1^c}{p_4}, \qquad F_4 = p_1e^{-\frac{p_2}{p_1}},$$

$$\{F_2, H\} = \{F_3, H\} = \{F_4, H\} = \{F_2, F_3\} = \{F_2, F_4\} = \{F_3, F_4\} = 0.$$

Пример 8. *(Алгебра $A^{c}_{5,11}$ в [17]).*

Пусть s, c, α_k — произвольные постоянные, $k = 1, \dots, 5$. Положим

$$g^{11} = \alpha_5^2(x^1+x^2)^2+(\alpha_1^2+\alpha_2^2)s^2, \quad g^{12} = s^2\alpha_2^2+\alpha_5^2(x^1+x^2)(x^2+x^3), \quad g^{13} = \alpha_5^2(x^1+x^2)x^3,$$

$$g^{14} = c\alpha_5^2(x^1+x^2)x^4, \qquad g^{22} = \alpha_5^2(x^2+x^3)^2+(\alpha_2^2+\alpha_3^2)s^2, \qquad g^{23} = \alpha_3^2s^2+\alpha_5^2(x^2+x^3)x^3,$$

$$g^{24} = c\alpha_5^2(x^2+x^3)x^4, \quad g^{33} = \alpha_5^2(x^3)^2+\alpha_3^2s^2, \quad g^{34} = c\alpha_5^2x^3x^4, \quad g^{44} = c^2(\alpha_5^2(x^4)^2+\alpha_4^2s^2).$$

Тогда

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j, \qquad F_2 = \frac{p_1^c}{p_4}, \qquad F_3 = p_1e^{-\frac{p_2}{p_1}}, \qquad F_4 = \frac{2p_1p_3 - p_2^2}{p_1^2},$$

$$\{F_2, H\} = \{F_3, H\} = \{F_4, H\} = \{F_2, F_3\} = \{F_2, F_4\} = \{F_3, F_4\} = 0.$$

Пример 9. *(Алгебра $A^{a,r,s}_{5,13}$ в [17]).*

Пусть w, a, r, s, α_k — произвольные постоянные, $k = 1, \dots, 5$. Положим

$$g^{11} = \alpha_5^2(x^1)^2+\alpha_1^2w^2, \quad g^{12} = a\alpha_5^2x^1x^2, \quad g^{13} = \alpha_5^2x^1(rx^3+sx^4), \quad g^{14} = \alpha_5^2x^1(rx^4-sx^3),$$

$$g^{22} = a^2(\alpha_5^2(x^2)^2+\alpha_2^2w^2), \qquad g^{23} = a\alpha_5^2x^2(rx^3+sx^4), \qquad g^{24} = a\alpha_5^2x^2(rx^4-sx^3),$$

$$g^{33} = w^2(\alpha_3^2r^2+\alpha_4^2s^2)+\alpha_5^2(rx^3+sx^4)^2, \qquad g^{34} = w^2rs(\alpha_4^2-\alpha_3^2)+\alpha_5^2(rx^3+sx^4)(rx^4-sx^3),$$

$$g^{44} = w^2(\alpha_3^2s^2 + \alpha_4^2r^2) + \alpha_5^2(rx^4 - sx^3)^2.$$

Тогда

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j, \qquad F_2 = \frac{p_1^a}{p_2}, \qquad F_3 = \frac{p_1^{2r}}{p_3^2 + p_4^2}, \qquad F_4 = p_1^{2s}e^{-\arctan z},$$

где $z = \frac{2(sp_3+rp_4)(rp_3-sp_4)}{(rp_3-sp_4)^2-(sp_3+rp_4)^2}$, *и*

$$\{F_2, H\} = \{F_3, H\} = \{F_4, H\} = \{F_2, F_3\} = \{F_2, F_4\} = \{F_3, F_4\} = 0.$$

5. Заключение

Во всех построенных примерах геодезический поток обладает полным набором первых интегралов, находящихся попарно в инволюции, то есть является вполне интегрируемым. Большое количество других интегрируемых примеров многомерных метрик с неполиномиальными интегралами можно построить аналогичным образом для различных алгебр Ли.

Было бы интересно модифицировать эту конструкцию для того, чтобы строить, скажем, новые интегрируемые примеры магнитных геодезических потоков.

References

[1] G.D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Colloquium Publications Vol. 9, American Mathematical Society, New York, 1927. JFM 53.0732.01

[2] V.V. Kozlov, *Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1996. Zbl 0843.58068

[3] V.V. Ten, *Local integrals of geodesic flows*, Regul. Chaotic Dyn., **2**:2 (1997), 87–89. Zbl 1083.37510

[4] G. Abdikalikova, A.E. Mironov, *On exact solutions of a system of quasi-linear equations describing integrable geodesic flows on a surface*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **16** (2019), 949–954. Zbl 1421.35211

[5] V.N. Kolokol'tsov, *Geodesic flows on two-dimensional manifolds with an additional first integral that is polynomial in the velocities*, Math. USSR, Izv., **21** (1983), 291–306. Zbl 0548.58028

[6] G. Darboux, *Lessons on the general theory of surfaces and the geometric applications of infinitesimal calculus*, Gauthier-Villars & Fils, Paris, 1889. JFM 21.0744.02

[7] G. Heilbronn, *Intégration des équations différentielles ordinaires par la méthode de Drach*, Gauthier-Villars, Paris, 1956. Zbl 0071.29801

[8] J. Hietarinta, *New integrable Hamiltonians with transcendental invariants*, Phys. Rev. Lett., **52**:1057 (1984).

[9] C.D. Collinson, *A note on the integrability conditions for the existence of rational first integrals of the geodesic equations in a Riemannian space*, Gen. Relativ. Gravitation, **18**:2 (1986), 207–214. Zbl 0581.53010

[10] A.M. Perelomov, *Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras*, Birkhäuser, Basel etc., 1990. Zbl 0699.70003

[11] C.D. Collinson, P.J. O'Donnell, *A class of empty spacetimes admitting a rational first integral of the geodesic equation*, Gen. Relativ. Gravitation, **24**:4 (1992), 451–455. Zbl 0756.53033

[12] A.J. Maciejewski, M. Przybylska, *Darboux polynomials and first integrals of natural polynomial Hamiltonian systems*, Phys. Lett., A, **326**:3-4 (2004), 219–226. Zbl 1138.37321

[13] V.V. Kozlov, *On rational integrals of geodesic flows*, Regul. Chaotic Dyn., **19**:6 (2014), 601–606. Zbl 1343.37047

[14] A. Aoki, T. Houri, K. Tomoda, *Rational first integrals of geodesic equations and generalised hidden symmetries*, Classical Quantum Gravity, **33**:19 (2016), Article ID 195003. Zbl 1349.83013

[15] S. Agapov, V. Shubin, *Rational integrals of 2-dimensional geodesic flows: new examples*, J. Geom. Phys., **170** (2021), Article ID 104389. Zbl 1484.53114

[16] A. Galajinsky, *Some metrics admitting nonpolynomial first integrals of the geodesic equation*, Phys. Lett., B, **820** (2021), Article ID 136483. Zbl 7414482

[17] J. Patera, R.T. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenhaus, *Invariants of real low dimension Lie algebras*, J. Math. Phys., **17** (1976) 986–994. Zbl 0357.17004

Sergei Vadimovich Agapov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: agapov@math.nsc.ru