S ⓔMR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 19, №2, стр. 404–414 (2022) УДК 514.13
DOI 10.33048/semi.2022.19.035 MSC 51M09

ОБ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕОРЕМЫ ПТОЛЕМЕЯ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

А.В. КОСТИН

Abstract. The article considers some variations on the theme of Ptolemy's theorem and its generalizations on the Lobachevsky plane. Some of the statements are hyperbolic analogues of the Euclidean theorems in terms of the figures involved in them. Other statements describe formal relations coinciding with Euclidean ones, but connecting other types of figures specific to the Lobachevsky plane. One of the generalizations is Fuhrmann's theorem — an analog of Ptolemy's theorem for an inscribed hexagon. If a hexagon on the Lobachevsky plane is inscribed in a circle, then the proof of the corresponding statement is not required: on the hyperbolic plane of curvature equal to minus one, it is obtained by standard substitution instead of the lengths of the segments of doubled hyperbolic sines by half their lengths. This article initially proves this statement for a hexagon inscribed in a horocycle and one branch of an equidistant line. In these cases, the sides and diagonals of the hexagon are related by the same relationship as for a hexagon inscribed in a circle. Then the cases are considered when from one to three vertices of the inscribed hexagon lie on the second branch of the equidistant line. In these cases, the analytical notation of the relations in Fuhrmann's theorem differs from the previous ones by replacing some hyperbolic sines of half the lengths of segments by hyperbolic cosines. In addition, analogues of Fuhrmann's theorem for six circles tangent to one fixed circle or horocycle are considered.

Keywords: Ptolemy's theorem, Casey's theorem, Fuhrmann's theorem, Lobachevsky plane.

Kostin, A.V., On generalizations of Ptolemy's theorem on the Lobachevsky plane.

This paper has been supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program ("Priority-2030") .

Поступила 24 мая 2022 г., опубликована 25 июля 2022 г.

1. Введение

Теорема Птолемея вместе с обратной к ней представляют один из критериев вписанности четырехугольника:
на евклидовой плоскости выпуклый четырехугольник является вписанным тогда и только тогда, когда произведение длин его диагоналей равно сумме произведений длин противоположных сторон.
Для произвольных четырех точек A, B, C, D евклидовой плоскости выполняется неравенство Птолемея:

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BD.$$

Равенство достигается для вершин вписанного четырехугольника и четырех точек прямой. Аналогичные утверждения имеют для шести точек на евклидовой плоскости. В работе будет использоваться ослабленный вариант теоремы для вписанного шестиугольника.

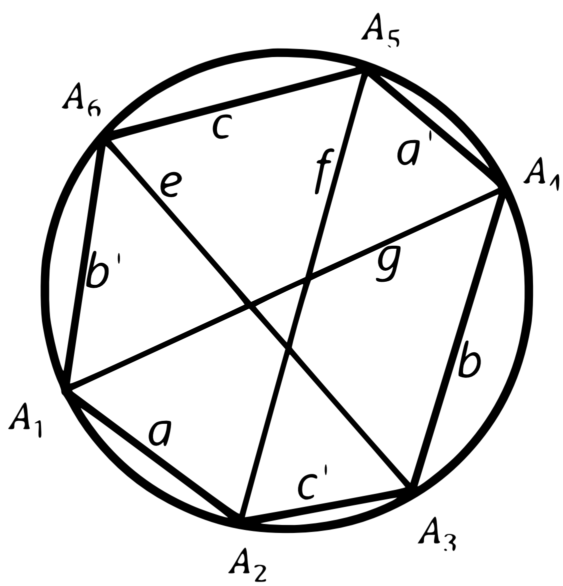

Рис. 1. Вписанный шестиугольник.

Теорема 1. *Пусть вершины вписанного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ в указанном порядке располагаются на евклидовой окружности. Тогда имеет место соотношение:*

$$A_1A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_3A_6 = A_1A_2 \cdot A_3A_6 \cdot A_4A_5 + A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6 +$$
$$+ A_2A_3 \cdot A_1A_4 \cdot A_5A_6 + A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot A_1A_6 + A_3A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_1A_6$$

Слева в этом соотношении стоит произведение трех "больших" диагоналей, справа — три произведения пар противоположных сторон и не пересекающих их "больших" диагоналей, и два произведения троек различных сторон, взятых через одну (Рис.1):

$$efg = aa'e + abc + cc'g + a'b'c' + bb'f.$$

Это утверждение называют теоремой Птолемея для вписанного шестиугольника, или теоремой Фурмана (Fuhrmann).

Теорема Кези (Кейси, Casey) [3] является обобщением теоремы Птолемея. Вместо вписанного четырехугольника рассматриваются четыре окружности, касающиеся одной фиксированной окружности, вместо длин сторон и диагоналей берутся длины отрезков общих касательных соответствующих окружностей. Пусть окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ в указанном порядке касаются окружности ω. Пусть $t_{ij}-$ длина отрезка общей касательной окружностей ω_i и ω_j. При этом берется внешняя касательная, если эти окружности касаются окружности ω одинаково – либо обе внутренним, либо обе внешним образом. Если же эти окружности касаются окружности ω по-разному, то берется внутренняя касательная. При указанных условиях имеет место соотношение:

$$t_{13} \cdot t_{24} = t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14}.$$

Гиперболический аналог теоремы Птолемея независимо получен Т.Куботой [1] и П.А. Широковым [2]. Гиперболический аналог теоремы Кези доказан в работе Н.В. Абросимова и Л.А. Микайыловой [4]. Интерпретации евклидовой теоремы Кези и ее гиперболического аналога приведены в работе [5]. Обзор смежных идей приведен в статье Х. Маехары и Х. Мартини [6]. Многомерное обобщение теоремы Кези получено Н.В. Абросимовым и В.В. Асеевым в работе [7]. Обобщения теоремы Птолемея в евклидовом пространстве рассмотрены в статье Н.С. Астапова и И.С. Астапова [8]. Необходимые сведения из неевклидовых геометрий имеются в монографии Б.А. Розенфельда [9].

Целью работы является получение различных гиперболических аналогов теоремы Фурмана, обобщающих теоремы Птолемея и Кези.

2. Теорема Фурмана для шестиугольников, вписанных в орицикл или ветвь эквидистанты

Для шестиугольника, вписанного в окружность на плоскости Лобачевского, доказательство аналога теоремы Фурмана не требуется. Оно автоматически получается вследствие связи между дугой и хордой орицикла. Если кривизна плоскости Лобачевского равна -1, то соответствующее равенство получится заменой длин отрезков гиперболическими синусами их половин:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}\frac{e}{2}\operatorname{sh}\frac{f}{2}\operatorname{sh}\frac{g}{2} = \operatorname{sh}\frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{a'}{2}\operatorname{sh}\frac{e}{2} + \operatorname{sh}\frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{b}{2}\operatorname{sh}\frac{c}{2} + \\ + \operatorname{sh}\frac{c}{2}\operatorname{sh}\frac{c'}{2}\operatorname{sh}\frac{g}{2} + \operatorname{sh}\frac{a'}{2}\operatorname{sh}\frac{b'}{2}\operatorname{sh}\frac{c'}{2} + \operatorname{sh}\frac{b}{2}\operatorname{sh}\frac{b'}{2}\operatorname{sh}\frac{f}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

В этом соотношении

$$A_1A_2 = a,\ A_3A_4 = b,\ A_5A_6 = c,\ A_4A_5 = a',\ A_1A_6 = b',\ A_2A_3 = c'$$

.

Теорема 2. *Пусть вершины шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ в указанном порядке (с точностью до циклической перестановки) располагаются на орицикле или одной ветви эквидистанты на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1$. Пусть $a_{ij}-$ длина отрезка A_iA_j. Тогда имеет место соотношение*

$$\begin{aligned}(2)\qquad &\operatorname{sh}\frac{a_{14}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{25}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{36}}{2}=\operatorname{sh}\frac{a_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{45}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{36}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{34}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{56}}{2}\\ &+\operatorname{sh}\frac{a_{56}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{14}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{45}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{16}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{34}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{16}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{25}}{2}.\end{aligned}$$

Доказательство. На плоскости Лобачевского соотношение в аналоге теоремы Птолемея для четырехугольника, вписанного в орицикл или одну ветвь эквидистанты имеет тот же вид, что и для четырехугольника, вписанного в окружность. Запишем его для четырехугольников $A_1A_2A_4A_5$, $A_2A_3A_4A_6$, $A_1A_4A_5A_6$, $A_1A_2A_5A_6$:

$$(3)\qquad \operatorname{sh}\frac{a_{14}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{25}}{2}=\operatorname{sh}\frac{a_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{45}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{24}}{2},$$

$$(4)\qquad \operatorname{sh}\frac{a_{24}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{36}}{2}=\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{46}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{26}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{34}}{2},$$

$$(5)\qquad \operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{46}}{2}=\operatorname{sh}\frac{a_{14}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{56}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{16}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{45}}{2},$$

$$(6)\qquad \operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{26}}{2}=\operatorname{sh}\frac{a_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{56}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{16}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{25}}{2}.$$

Умножим равенство (3) на $\operatorname{sh}\frac{a_{36}}{2}$:

$$(7)\qquad \operatorname{sh}\frac{a_{14}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{25}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{36}}{2}=\operatorname{sh}\frac{a_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{45}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{36}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{24}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{36}}{2}.$$

В (7) во втором слагаемом справа $\operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{24}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{36}}{2}$ выразим $\operatorname{sh}\frac{a_{24}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{36}}{2}$ из (4), получим:

$$(8)\qquad \operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{46}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{26}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{34}}{2}.$$

Аналогично в (8) заменим $\operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{46}}{2}$ из (5) и $\operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{26}}{2}$ из (6). Подставив все в (7), получим соотношение (2).

□

3. Теорема Фурмана для шестиугольника с вершинами на двух ветвях эквидистанты

На Рис.2 изображены две ветви γ и γ' эквидистанты прямой на плоскости Лобачевского и вписанный в эквидистанту шестиугольник. Сама прямая — база эквидистанты — изображена пунктиром.

Теорема 3. *Пусть пять вершин A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 шестиугольника лежат на одной ветви эквидистанты, а одна вершина A_6— на другой ветви на плоскости Лобачевского кривизны $K=-1$. Пусть a_{ij} — длина отрезка A_iA_j. Тогда имеет место соотношение:*

$$\begin{aligned}(9)\qquad &\operatorname{sh}\frac{a_{14}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{25}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{36}}{2}=\operatorname{sh}\frac{a_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{45}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{36}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{34}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{56}}{2}\\ &+\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{14}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{56}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{45}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{16}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{34}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{25}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{16}}{2}.\end{aligned}$$

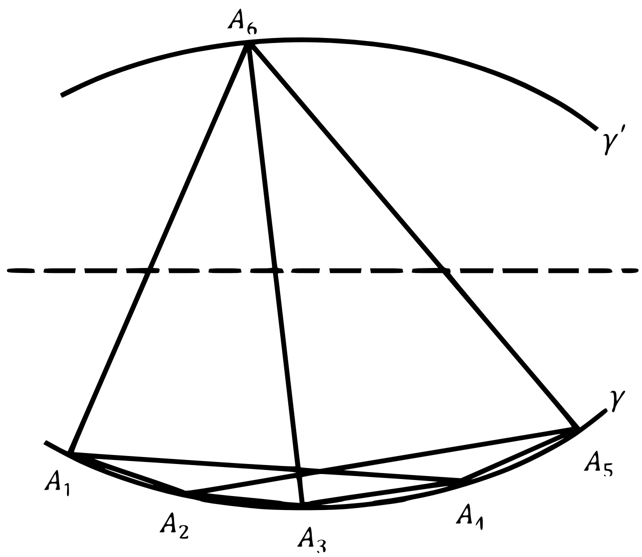

Рис. 2. Шестиугольник с одной вершиной на второй ветви эквидистанты.

Доказательство. Для четырехугольника $ABCD$, вершины A, B, C которого лежат на одной ветви эквидистанты, а вершина D — на второй, симметричной первой ветви относительно общей базы, имеет место равенство (см. [2]):

$$\operatorname{sh}\frac{AC}{2}\operatorname{ch}\frac{BD}{2}=\operatorname{sh}\frac{AB}{2}\operatorname{ch}\frac{CD}{2}+\operatorname{sh}\frac{BC}{2}\operatorname{ch}\frac{AD}{2}.$$

Учитывая это, запишем соотношения из теоремы Птолемея для четырехугольников $A_1A_2A_4A_5$, $A_2A_3A_4A_6$, $A_1A_4A_5A_6$, $A_1A_2A_5A_6$. Для четырехугольника $A_1A_2A_4A_5$ это будет равенство 3. Для остальных получим следующие соотношения:

$$\operatorname{sh}\frac{a_{24}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{36}}{2}=\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{46}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{34}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{26}}{2}, \tag{10}$$

$$\operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{46}}{2}=\operatorname{sh}\frac{a_{14}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{56}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{45}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{16}}{2}, \tag{11}$$

$$\operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{26}}{2}=\operatorname{sh}\frac{a_{12}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{56}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{25}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{16}}{2}. \tag{12}$$

Умножим равенство 3 на $\operatorname{ch}\frac{a_{36}}{2}$:

$$\operatorname{sh}\frac{a_{14}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{25}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{36}}{2}=\operatorname{sh}\frac{a_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{45}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{36}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{24}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{36}}{2}. \tag{13}$$

В (13) в выражении $\operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{24}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{36}}{2}$ выразим $\operatorname{sh}\frac{a_{24}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{36}}{2}$ из 10, получим:

$$\operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{46}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{26}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{34}}{2}. \tag{14}$$

В (14), учитывая (11), первое слагаемое будет равно

$$\operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{46}}{2}=\operatorname{sh}\frac{a_{14}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{56}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{45}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{16}}{2}, \tag{15}$$

а второе слагаемое с учетом (12) будет равно

$$\operatorname{sh}\frac{a_{15}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{26}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{34}}{2}=\operatorname{sh}\frac{a_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{34}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{56}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{25}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{34}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{16}}{2}. \tag{16}$$

Заменив в (13) второе слагаемое суммой правых частей равенств (15) и (16), получим соотношение (9). □

Совершенно аналогично рассматриваются случаи, когда четыре вершины шестиугольника находятся на одной ветви эквидистанты , а две на другой, или на разных ветвях эквидистанты находятся по три вершины шестиугольника. Нужно только учесть, что если у четырехугольника $ABCD$ вершины A, B лежат на одной ветви эквидистанты, а $C, D-$ на другой, то имеет место равенство

$$\operatorname{ch}\frac{AC}{2}\operatorname{ch}\frac{BD}{2}=\operatorname{sh}\frac{AB}{2}\operatorname{sh}\frac{CD}{2}+\operatorname{ch}\frac{BC}{2}\operatorname{ch}\frac{AD}{2}.$$

В сферической геометрии этим утверждениям соответствуют случаи расположения вершин многоугольника на двух симметричных относительно центра сферы окружностях.

Теорема 4. *Пусть четыре вершины A_1, A_2, A_3, A_4 шестиугольника лежат на одной ветви эквидистанты, а вершины A_5, A_6- на другой ветви на плоскости Лобачевского кривизны $K=-1$. Пусть $a_{ij}-$ длина отрезка A_iA_j. Тогда имеет место соотношение:*

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}\frac{a_{14}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{25}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{36}}{2}&=\operatorname{sh}\frac{a_{12}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{45}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{36}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{34}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{56}}{2}\\&+\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{14}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{56}}{2}+\operatorname{ch}\frac{a_{45}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{16}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{34}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{25}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{16}}{2}.\end{aligned} \tag{17}$$

Теорема 5. *Пусть вершины A_1, A_2, A_3 шестиугольника лежат на одной ветви эквидистанты, а вершины A_4, A_5, A_6- на другой ветви на плоскости Лобачевского кривизны $K=-1$. Пусть a_{ij} $-$ длина отрезка A_iA_j. Тогда имеет место соотношение:*

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}\frac{a_{14}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{25}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{36}}{2}&=\operatorname{sh}\frac{a_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{45}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{36}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{12}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{34}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{56}}{2}\\&+\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{14}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{56}}{2}+\operatorname{sh}\frac{a_{45}}{2}\operatorname{sh}\frac{a_{23}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{16}}{2}+\operatorname{ch}\frac{a_{34}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{25}}{2}\operatorname{ch}\frac{a_{16}}{2}.\end{aligned} \tag{18}$$

4. Теорема Кези-Фурмана

Для шести окружностей, касающихся одной фиксированной окружности, можно доказать утверждение, обобщающее и теорему Кези, и теорему Фурмана. Это утверждение будем называть теоремой Кези-Фурмана.

Теорема 6. *Пусть окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ касаются внутренним образом окружности ω на плоскости Лобачевского кривизны $K=-1$. Пусть t_{ij} $-$ длина отрезка общей внешней касательной окружностей ω_i, ω_j (см. Рис. 3). Тогда имеет место соотношение:*

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}\frac{t_{14}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{25}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{36}}{2}&=\operatorname{sh}\frac{t_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{45}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{36}}{2}+\operatorname{sh}\frac{t_{12}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{34}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{56}}{2}\\&+\operatorname{sh}\frac{t_{56}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{23}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{14}}{2}+\operatorname{sh}\frac{t_{45}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{16}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{23}}{2}+\operatorname{sh}\frac{t_{34}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{16}}{2}\operatorname{sh}\frac{t_{25}}{2}.\end{aligned} \tag{19}$$

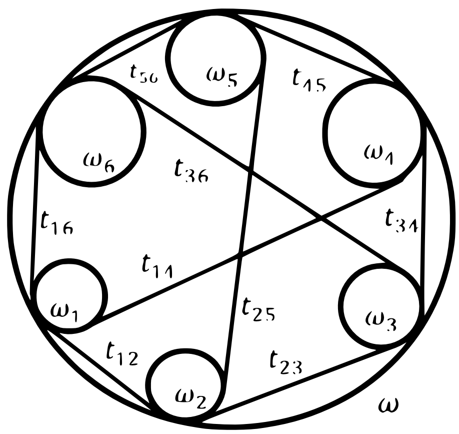

Рис. 3. Шесть окружностей, касающихся внутренним образом одной окружности.

Доказательство. Пусть O_i, O_j — центры окружностей ω_i, ω_j с радиусами R_i, R_j соответственно, K_i, K_j — точки касания этих окружностей с окружностью ω радиуса R.

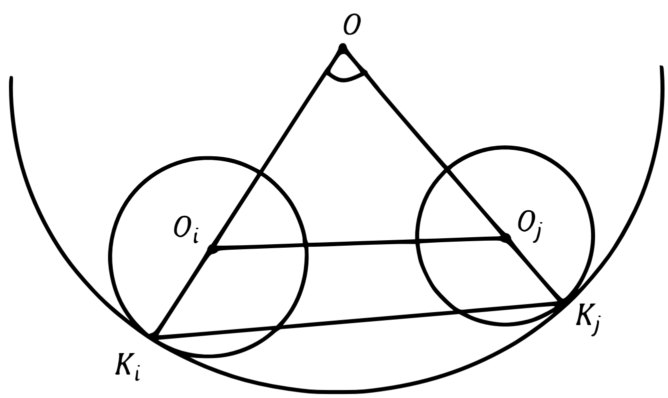

Рис. 4. Окружности, касающиеся внутренним образом одной окружности.

В статье [4] с использованием стандартных формул гиперболической тригонометрии найдено выражение для длины отрезка, соединяющего точки касания окружностей ω_i, ω_j с окружностью ω:

$$\operatorname{sh}\frac{K_iK_j}{2} = \operatorname{sh}\frac{t_{ij}}{2}\operatorname{sh}R\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{ch}R_i\operatorname{ch}R_j}{\operatorname{sh}(R-R_i)\operatorname{sh}(R-R_j)}}, \tag{20}$$

Для вписанного шестиугольника $K_1K_2K_3K_4K_5K_6$ выполняется равенство (3):

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sh}\frac{K_1K_4}{2}\operatorname{sh}\frac{K_2K_5}{2}\operatorname{sh}\frac{K_3K_6}{2}\\
&=\operatorname{sh}\frac{K_1K_2}{2}\operatorname{sh}\frac{K_4K_5}{2}\operatorname{sh}\frac{K_3K_6}{2}+\operatorname{sh}\frac{K_1K_2}{2}\operatorname{sh}\frac{K_3K_4}{2}\operatorname{sh}\frac{K_5K_6}{2}\\
&+\operatorname{sh}\frac{K_5K_6}{2}\operatorname{sh}\frac{K_2K_3}{2}\operatorname{sh}\frac{K_1K_4}{2}+\operatorname{sh}\frac{K_4K_5}{2}\operatorname{sh}\frac{K_1K_6}{2}\operatorname{sh}\frac{K_2K_3}{2}\\
&+\operatorname{sh}\frac{K_3K_4}{2}\operatorname{sh}\frac{K_1K_6}{2}\operatorname{sh}\frac{K_2K_5}{2}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Подставив в (21) выражения для $\operatorname{sh}\frac{K_iK_j}{2}$ из (20), после сокращения получим требуемое соотношение.

□

Если аргументы в соотношении (19) малы по сравнению с радиусом кривизны, то оно перейдет в соответствующее евклидово равенство, связывающее сами длины отрезков касательных без посредства гиперболических функций. Эта теорема, как и теорема Кези, допускает обобщения как для разных способов касания, так и для других типов линий постоянной кривизны. Приведем один из вариантов обобщения.

Теорема 7. *Пусть окружности $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6$ касаются внутренним образом орицикла Ω на плоскости Лобачевского кривизны $K=-1$. Пусть t_{ij} — длина отрезка общей внешней касательной окружностей ω_i,ω_j. Тогда имеет место соотношение* (9).

Доказательство. Можно было бы задать орицикл Ω уравнением $y=1$ (см.Рис. 5) в модели Пуанкаре с метрикой $ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

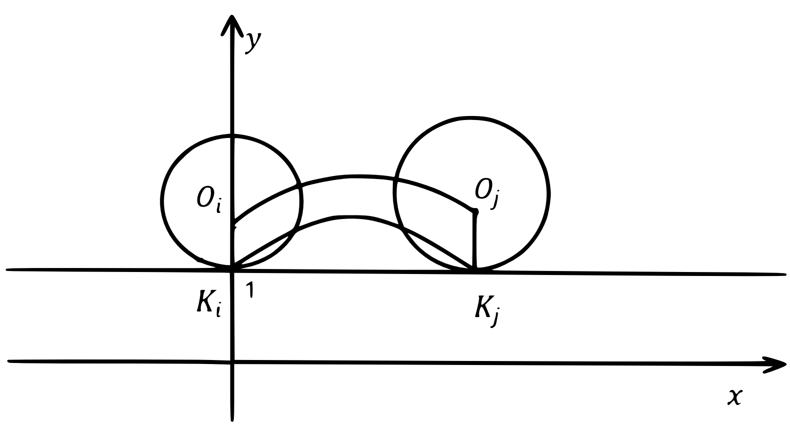

Рис. 5. Окружности, касающиеся внутренним образом орицикла.

Тогда длина дуги K_iK_j орицикла Ω будет равна $2\operatorname{sh}\frac{K_iK_j}{2}$ (здесь под знаком гиперболического синуса стоит длина геодезического отрезка, соединяющего точки K_i,K_j). Неевклидовы центры окружностей ω_i,ω_j можно задать координатами $O_i(0,e^{R_i}),O_j(2\operatorname{sh}\frac{K_iK_j}{2},e^{R_j})$. Углы при вершинах K_i,K_j в четырехугольнике $K_iK_jO_jO_i$ являются углами параллельности отрезка $\frac{K_iK_j}{2}$. После этого можно было бы определить остальные метрические характеристики конфигурации. Но в данном случае можно поступить проще. Перейдем в соотношении 20 к пределу при $R \to \infty$. Получим в пределе:

$$\operatorname{sh}\frac{K_iK_j}{2} = \operatorname{sh}\frac{t_{ij}}{2} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{ch} R_i \operatorname{ch} R_j}{e^{-R_i}e^{-R_j}}}, \tag{22}$$

Окружность, которой касались шесть окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$, в пределе перейдет в орицикл. Для шестиугольника $K_1K_2K_3K_4K_5K_6$, вписанного в орицикл, выполняется равенство 21. Подставив в него выражения для $sh\frac{K_iK_j}{2}$ из 22, после сокращения получим требуемое соотношение. □

5. Интерпретации евклидовой и гиперболической теорем Кези-Фурмана

Евклидову теорему Кези-Фурмана о шести окружностях, касающихся одной окружности, и касательных расстояниях между ними, как и теорему Кези, можно интерпретировать как теорему Фурмана для пространственного шестиугольника, вписанного в изотропную сферу трехмерного псевдоевклидова пространства с индефинитной метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dR^2$ (см. [5]), если евклидовой окружности с центром в точке (x, y) и радиусом R сопоставить точку с координатами (x, y, R) в псевдоевклидовом пространстве (Рис. 6). Окружности ω, которой касаются остальные окружности, сопоставляется вершина A "основного" изотропного конуса, остальным окружностям — точки $A_i, i = 1...6$, касательным расстояниям — псевдоевклидовы "расстояния" между точками A_i. Условие касания окружностей определяет то, что отрезки A_iA изотропны, а следовательно, все вершины A_i будут принадлежать изотропной сфере с центром в точке A.

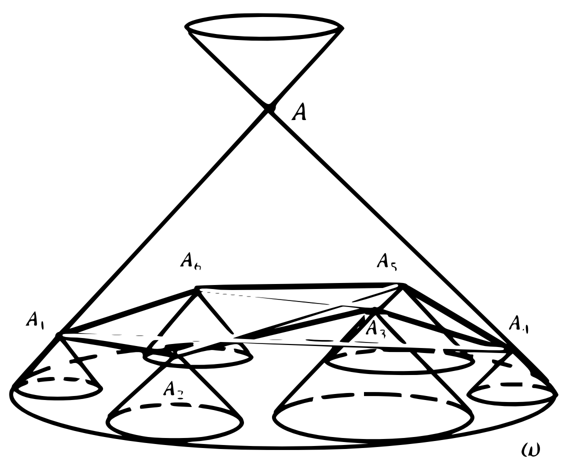

Рис. 6. Интерпретация на изотропной сфере псевдоевклидова пространства.

При этом вместе с окружностями и касательными расстояниями естественно рассматривать преобразования, сохраняющие такие касательные расстояния [10]. Эти преобразования истолковываются как движения псевдоевклидова пространства. Наряду с этими преобразованиями можно рассматривать их аналоги в многообразии орициклов плоскости Лобачевского [11]. Преобразования в многообразии орициклов будут сохранять длину дуги орицикла, касающегося двух циклов общего вида на плоскости Лобачевского. "Орициклическое" касательное расстояние также истолковывается как псевдоевклидов инвариант. Это соответствие позволяет рассматривать своеобразные аналоги теоремы Кези-Фурмана, в которых аналитически выражения будут совпадать с соответствующими евклидовыми, но вместо отрезков касательных геодезических будут фигурировать дуги касательных орициклов.

Гиперболический аналог теоремы Кези-Фурмана — теорему 5, подобно интерпретации гиперболического аналога теоремы Кези, можно интерпретировать как теорему Фурмана для шестиугольника, вписанного в изотропную сферу трехмерного псевдогиперболического пространства ${}^2S_3$.

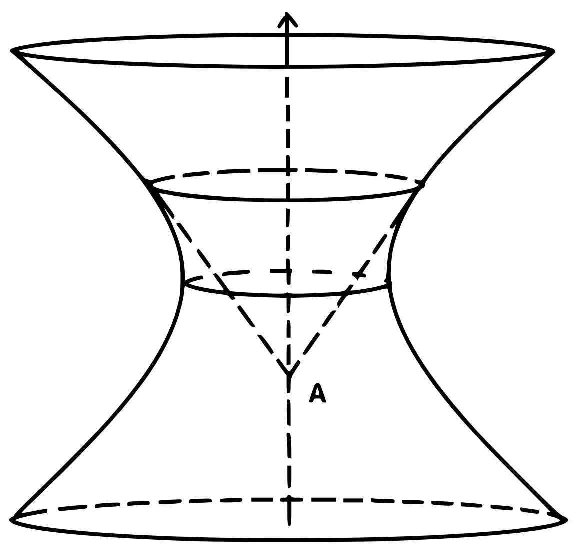

Рис. 7. Интерпретация на изотропной сфере псевдогиперболического пространства.

Абсолютом пространства является квадрика, в однородных координатах $(x^1 : x^2 : x^3 : x^4)$ задаваемая уравнением

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0.$$

Абсолют гомеоморфен тору. В неоднородных координатах

$$x = \frac{x^1}{x^4}, y = \frac{x^2}{x^4}, z = \frac{x^3}{x^4}$$

абсолют представляет собой однополостный гиперболоид. Если в качестве абсолюта плоскости Лобачевского в проективной модели взять горловое сечение $z = 0$ этого гиперболоида, а центр окружности ω взять в центре этого сечения, то при изотропной проекции (см.[12]) окружности ω сопоставится точка на оси вращения гиперболоида. Изотропная сфера с аффинной точки зрения будет конусом (Рис. 7), как и при интерпретации евклидовой теоремы в псевдоевклидовом пространстве. Точки, соответствующие шести окружностям, будут лежать на этом конусе. Если же в качестве абсолюта плоскости Лобачевского взять сечение, в аффинной карте параллельное горловому сечению то можно подобрать радиус окружности ω так, что при изотропной проекции ей сопоставится несобственная ("бесконечно удаленная") точка оси вращения гиперболоида. В этом случае изотропная сфера будет с аффинной точки зрения цилиндром. Как и прежде, шести окружностям сопоставятся шесть точек на этой поверхности, а касательным расстояниям — "расстояния" между точками в псевдоримановой метрике пространства ${}^2S_3$.

References

[1] T. Kubota, *On the extended Ptolomy's theorem in hyperbolic geometry*, Tôhoku Sc. Rep. 1 (1913), 131–156. JFM 44.0666.04

[2] P.A. Širokov, *Etudes on the Lobachevskii geometry*, Izvestia Kazanǐ, Bull. Soc. phys.-math. (2), **24**:1 (1924), 26–32.

[3] J. Casey, *Plane trigonometry; containing an account of the hyperbolic functions*, Hodges, Figgis and Co., Dublin, 1888. JFM 19.0538.06

[4] N.V. Abrosimov, L.A. Mikaiylova, *Casey's theorem in hyperbolic geometry*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **12** (2015), 354–360. Zbl 1408.51017

[5] A.V. Kostin, N.N. Kostina, *An interpretation of Casey's theorem and its hyperbolic analogue*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **13** (2016), 242–251. Zbl 1433.51013

[6] H. Maehara, H. Martini, *Bipartite sets of spheres and Casey-type theorems*, Results Math., **74**:1 (2019), Paper No. 47. Zbl 1409.51016

[7] N.V. Abrosimov, V.V. Aseev, *Generalizations of Casey's theorem for higher dimensions*, Lobachevskii J. Math., **39**:1 (2018), 1–12. Zbl 1392.51003

[8] N.S. Astapov, I.S. Astapov, *The variety of generalizations of the Ptolemy's theorem*, Dal'nevost. Mat. Zh., **19**:2 (2019), 129–137. Zbl 1436.52005

[9] B.A. Rosenfel'd, *Non-Euclidean spaces*, Nauka, Moscow, 1969. Zbl 0176.18901

[10] I.M. Yaglom, *Complex numbers and their application to the geometry*, Mat. Prosveschenie, **6** (1961), 61–106. Zbl 0136.15505

[11] M.A. Mikenberg, *The Laguerre geometry and its analogue*, Dissertaciia kand. f.-m. nauk, Kazan, 1994.

[12] Z.A. Skopets, I.M.Yaglom, *Laguerre transformations of the Lobachevskii plane and Möbius transformations of a dual variable. Problems of the differential and non-Euclidean geometries*, Izdatelstvo MGPI, Moscow, 1965.

Andrey Viktorovich Kostin
Elabuga Institute of Kazan Federal University,
89, Kazanskaya str.,
Elabuga, 423604, Russia
Email address: kostin_andrei@mail.ru