S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 19, №2, стр. 415–425 (2022) УДК 512.7
DOI 10.33048/semi.2022.19.036 MSC 14D20

О ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ НЕКОТОРЫХ РАССЛОЕНИЙ И ИХ ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ НА $\mathbb{P}^3$

А.А. КЫТМАНОВ, Н.Н. ОСИПОВ, С.А. ТИХОМИРОВ, Т.В. ЗЫКОВА

Abstract. We obtain formulas in the explicit form for the spectra of a family of stable rank 2 vector bundles on $\mathbb{P}^3$ which isomorphism classes constitute the so-called Ein components in the Gieseker–Maruyama moduli scheme. We also obtain formulas in the explicit form for dimensions of the moduli space of the modified instanton bundles, and for their spectra. We show that Vedernikov and Hartshorne families in the Gieseker–Maruyama moduli scheme are particular cases of the Ein components.

Keywords: stable vector bundle, Chern classes, Ein component, modified instanton bundles.

Для $e \in \{-1, 0\}$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ через $M(e, n)$ будем обозначать пространство модулей Гизекера-Маруямы стабильных векторных расслоений ранга 2 с классами Черна $c_1 = e$, $c_2 = n$ на пространстве $\mathbb{P}^3$. В работе [5] Р. Хартсхорн показал, что $M(e, n)$ — квазипроективная схема, являющаяся непустой для произвольного $n \geqslant 1$ в случае $e = 0$ и, соответственно, для четных $n \geqslant 2$ в случае $e = -1$. Из теории деформаций известно, что всякая неприводимая компонента $M(e, n)$ имеет размерность не меньше, чем $8n - 3 + 2e$.

Для любых целых чисел a, b, c, таких что $b \geqslant a \geqslant 0$, $c > a + b$, рассмотрим монаду вида

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-c + e) \to \mathcal{H} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c) \to 0, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{H} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-a + e) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-b + e), \tag{2}$$

Kytmanov, A.A., Osipov, N.N., Tikhomirov, S.A., Zykova, T.V., On numerical characteristics of some bundles and their isomorphism classes on $\mathbb{P}^3$.

Работа поддержана РНФ (грант 18-71-10007-П).

Поступила 15 ноября 2021 г., опубликована 25 июля 2022 г.

такая что когомологический пучок E этой монады локально свободен. В [11, Утв. 3.1] было показано, что такие монады существуют и их когомологическое векторное расслоение E ранга 2 стабильно. Будем называть E *обобщенным нулькорреляционным расслоением* и обозначать через $N(e,a,b,c)^{\mathrm{nc}}$ множество классов изоморфизма всех обобщенных нулькорреляционных расслоений для введенных выше чисел e,a,b,c. В работе [3] Эйн показал, что $N(e,a,b,c)^{\mathrm{nc}}$ — плотное и открытое по Зарисскому подмножество неприводимой компоненты $N(e,a,b,c)$ пространства $M(e,n)$, где

$$n = c^2 - a^2 - b^2 - e(c-a-b). \tag{3}$$

Пользуясь терминологией работ [8] и [9] будем называть компоненты $N(e,a,b,c)$ *компонентами Эйна* пространств $M(e,n)$.

Таким образом, для заданных значений первого и второго классов Черна $c_1 = e$, $c_2 = n$, компонента $N(e,a,b,c)$ задается тройкой целых чисел (a,b,c), таких что

$$\begin{cases} c^2 - a^2 - b^2 - e(c-a-b) = n, \\ 0 \leqslant a \leqslant b, \\ c > a+b. \end{cases} \tag{4}$$

Для определения второго объекта, изучаемого в работе, рассмотрим введенное в статье [1] пространство модулей векторных расслоений ранга 2 с первым классом Черна, равным 0, и вторым классом Черна, равным a^2+k, где $a \geqslant 2$ и $k \geqslant 1$, возникающих как когомологии монад вида

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^{\oplus k} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus(2k+4)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^{\oplus k} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a) \to 0. \tag{5}$$

По аналогии с [1] будем обозначать его через $\mathcal{G}(a,k)$ и называть *пространством модулей модифицированных инстантонных расслоений.*

Настоящая работа посвящена изучению таких числовых характеристик, как спектры стабильных векторных расслоений ранга 2, классы изоморфизма которых образуют компоненты Эйна $N(e,a,b,c)$, а также размерность пространства $\mathcal{G}(a,k)$ и спектры модифицированных инстантонных расслоений. Отметим, что данные характеристики вносят вклад в понимание геометрии и географии компонент в пространствах $M(e,n)$.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 приводятся используемые в дальнейшем предварительные сведения. В разделах 2 и 3 содержатся основные результаты работы, сформулированные в теоремах 1, 2, 3 и 4. В частности, в теоремах 1 и 2 получены явные формулы для спектров стабильных векторных расслоений ранга 2, классы изоморфизма которых образуют компоненты Эйна $N(e,a,b,c)$ для случаев $e=0$ и $e=-1$, соответственно. В теореме 3 приведена формула для нахождения размерности пространства $\mathcal{G}(a,k)$, а в теореме 4 — формула для спектров модифицированных инстантонных расслоений. Также в замечаниях 5 и 6 мы доказываем, что все семейства Ведерникова и семейство Хартсхорна в схеме модулей Гизекера-Маруямы являются частными случаями компонент Эйна. Основное поле $\mathbf{k}$ в работе считается алгебраически замкнутым характеристики 0.

1. Предварительные сведения

В работе [9] была получена комбинаторная формула (формула 2.1) для вычисления размерностей компонент Эйна $N(e,a,b,c)$:

$$\begin{aligned}(6)\quad \dim N(e,a,b,c) = \binom{c+a-e+3}{3} + \binom{c+b-e+3}{3} + \binom{c-a+3}{3} + \\ + \binom{c-b+3}{3} - \binom{a+b-e+3}{3} - \binom{b-a+3}{3} - \\ - \binom{2a-e+3}{3} - \binom{2b-e+3}{3} - 3 - t(e,a,b),\end{aligned}$$

где

(7)

$$t(0,a,b) = \begin{cases} 4, & \text{при } a=b=0, \\ 1, & \text{при } 0=a<b \text{ или } a=b>0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad t(-1,a,b) = \begin{cases} 1, & \text{при } a=b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вычисляя биномиальные коэффициенты и приводя подобные слагаемые в (6), получаем формулы для вычисления размерностей $N(0,a,b,c)$ и $N(-1,a,b,c)$ в виде

$$\begin{aligned}(8)\quad \dim N(0,a,b,c) = \frac{1}{3}\left(2c^3-4a^3-5b^3\right) + \left(a^2c+b^2c-a^2b\right) + \\ + 4\left(c^2-a^2-b^2\right) + \frac{11}{3}(2c-a-2b) - 3 - t(0,a,b)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\dim N(-1,a,b,c) = \frac{1}{3}\left(2c^3-4a^3-5b^3\right) + \left(a^2c+b^2c-a^2b\right) + \\ + \left(5c^2-6a^2-6b^2\right) + (ac+bc-ac) + \frac{1}{3}(37c-26a-37b) - 6 - t(-1,a,b),\end{aligned}$$

где $t(0,a,b)$ и $t(-1,a,b)$ определяются равенствами (7).

Также нас будут интересовать спектры расслоений, классы изоморфизма которых образуют компоненты Эйна, а также спектры модифицированных инстантонных расслоений. В связи с этим нам потребуется определение спектра стабильного расслоения ранга 2 на $\mathbb{P}^3$, которое в случае произвольной характеристики основного поля было введено Хартсхорном в [6].

Определение 1. *(см. [6], [7]). Спектром стабильного расслоения ранга* 2 *с классами Черна* $c_1 = e$ *и* $c_2 = n$ *назовем набор*

$$Spec\, E = (k_1, \ldots, k_n),$$

где $k_1, \ldots, k_n$ *— неубывающая последовательность целых чисел*

$$k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_n,\ k_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, \ldots, n\},$$

обладающая свойствами

- *(S1) симметричность:* $k_{n-j+1} + e = -k_j$ *для любого* $j \in \{1, \ldots, n\}$*;*
- *(S2) связность: если* $q \in \mathbb{Z}$ *и* $p < q < r$*, где* $p, r \in Spec\, E$*, то* $q \in Spec\, E$*;*
- *(S3) если число* $l_0\colon 1 \leqslant l_0 \leqslant k_n$ *присутствует в* $Spec\, E$ *только один раз, то любое число* $l\colon l_0 \leqslant l \leqslant k_n$ *также присутствует в* $Spec\, E$ *только один раз.*

Число n будем называть длиной спектра.

Замечание 1. В случае $e = 0$, в силу свойства симметричности, спектр однозначно задается своей правой половиной $\left(k_{(n+1)/2}, \ldots, k_n\right)$ при нечетном n или $\left(k_{n/2+1}, \ldots, k_n\right)$ при четном n. При этом, в силу свойств (S1) и (S2) средние элементы спектра (элемент $k_{(n+1)/2}$ при нечетном n или элементы $k_{n/2}$ и $k_{n/2+1}$ при четном n) равны нулю. Более того, спектры длины $n = 2m$ могут быть получены из спектров длины $n = 2m - 1$ добавлением одного нулевого элемента в середину. В случае $e = -1$, в силу свойства симметричности, спектр однозначно задается своей правой половиной $(k_{n/2+1}, \ldots, k_n)$.

Известно, что для расслоения ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ спектр существует и единственен (см. [6, Теорема 7.1]). В работе [2] В. Барт привел алгоритм нахождения спектров, соответствующих компонентам (семействам) расслоений. В случае расслоений, классы изоморфизма которых образуют компоненты Эйна, для этого необходимо вычислять размерности групп нулевых когомологий «открученного» пучка $K(-i)$ по формуле

$$h^0 K(-i) = \sum_{j=1}^{n} h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_j - i), \quad i = 0, 1, \ldots, c-1, \tag{9}$$

где $K = \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_j)$, а k_j пробегают весь спектр. Спектр, для которого выполняются равенства

$$h^0 K(-i) = h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c-1-i) - h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(b-1-i) - h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a-1-i) \tag{10}$$

и будет искомым спектром, соответствующим неприводимой компоненте

$$N(e, a, b, c).$$

Замечание 2. Число $S(2n)$ спектров длины $2n$ зависит экспоненциально от n. В частности, вычислительный эксперимент показывает, что $S(2n) > 1.6^n$ для $n \geqslant 5$.

Таким образом, алгоритм поиска подходящего спектра состоит в получении всех спектров заданной длины n и выбора из них спектра, для которого выполняются равенства (10). Однако, получение спектров представляет собой вычислительно емкую задачу (см. замечание 2), которая не может быть реализована за удовлетворительное время для длин больше 100. Кроме того, к настоящему времени точные формулы для спектров расслоений были известны лишь в специальных случаях компонент Эйна, рассмотренных В. К. Ведерниковым (см. замечание 5). Тем самым, встает вопрос о получении явной формулы для спектров расслоений, классы изоморфизма которых составляют компоненты Эйна, в общем случае, о чем и пойдет речь в следующем параграфе.

2. Спектры расслоений, классы изоморфизма которых образуют компоненты Эйна

Нам потребуется следующий результат комбинаторного характера.

Лемма 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{0, \ldots, n\}$ имеет место равенство*

$$\sum_{i=1}^{n-k} i(n+1-i) = \frac{(n-k)(n-k+1)(n+2k+2)}{6}. \tag{11}$$

Доказательство. Данное тождество легко доказывается либо методом математической индукции, либо прямым применением хорошо известных формул

$$\sum_{i=1}^{l} i = \frac{l(l+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{l} i^2 = \frac{l(l+1)(2l+1)}{6}$$

при $l = n - k \geqslant 0$. □

Замечание 3. Частный случай

$$\sum_{i=1}^{n} i(n+1-i) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \tag{12}$$

равенства (11) при $k = 0$ можно доказать следующим комбинаторным рассуждением. Правая часть (12) — это число сочетаний C^3_{n+2}, т. е. количество троек (x, y, z) целых чисел с условием $1 \leqslant x < y < z \leqslant n+2$. При фиксированном $y = i+1$ количество таких троек равно $i(n+1-i)$ (здесь i может изменяться от 1 до n). Следовательно, общее количество троек (x, y, z), т. е. C^3_{n+2}, выражается суммой в левой части (12).

Основной результат докажем сначала для случая первого класса Черна $c_1 = 0$. В этом случае компонента $N(0, a, b, c)$ задается тройкой целых чисел (a, b, c), таких что

$$\begin{cases} c^2 - a^2 - b^2 = n, \\ 0 \leqslant a \leqslant b, \\ c > a + b. \end{cases} \tag{13}$$

Теорема 1. *Спектры расслоений, классы изоморфизма которых образуют компоненты Эйна $N(0, a, b, c)$, имеют вид $\chi = -\chi^+ \cup \chi^+$, где*

$$\chi^+ = 0^{c-a-b} 1^{c-a-b+1} \dots (a-1)^{c-b-1} a^{c-b} \dots b^{c-b} (b+1)^{c-b-1} \dots (c-2)^2 (c-1)^1, \tag{14}$$

здесь $0 \leqslant a \leqslant b$, $c > a + b$, χ^+ обозначает неотрицательную часть спектра, а «показатели степеней» обозначают число вхождений конкретных элементов (чисел) в спектр.

Доказательство. Заметим, что отрицательных аргументов в правых частях данных равенств не будет в силу того, что $i \leqslant c - 1$ и $c > b \geqslant a \geqslant 0$ для троек (a, b, c) из (4). Фактически, нам нужно показать справедливость равенств (10) для $i = 0, \dots, c-1$.

I. Докажем равенство для $i = 0$. В этом случае его можно записать в виде

$$F_1(a, b, c) + F_2(a, b, c) + F_3(a, b, c) = G(a, b, c),$$

где слагаемые F_1, F_2, F_3

$$F_1 = F_1(a, b, c) = 1 \cdot (c - b - a) + \dots + a \cdot (c - b - 1), \tag{15}$$

$$F_2 = F_2(a, b, c) = (a+1) \cdot (c - b) + \dots + (b+1) \cdot (c - b), \tag{16}$$

$$F_3 = F_3(a, b, c) = (b+2) \cdot (c - b - 1) + \dots + c \cdot 1 \tag{17}$$

составляют левую часть (10), а G — правая часть этого равенства

$$G = G(a, b, c) = \frac{c(c+1)(c+2)}{6} - \frac{a(a+1)(a+2)}{6} - \frac{b(b+1)(b+2)}{6}. \tag{18}$$

Используя тождества (12) для F_1 и (11) для F_3, получаем

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{a(a+1)}{2}(c-b) - \frac{a(a+1)(a+2)}{6}, \\ F_2 &= \frac{(a+b+2)(b-a+1)}{2}(c-b), \\ F_3 &= \frac{(c-b-1)(c-b)(c+2b+4)}{6}. \end{aligned}$$

Далее, суммируя и приводя подобные слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} F_1+F_2+F_3 &= \frac{c-b}{6}(c^2+bc+b^2+3b+3c+2) - \frac{a(a+1)(a+2)}{6} = \\ &= \frac{c^3+3c^2+2c-b^3-3b^2-2b}{6} - \frac{a(a+1)(a+2)}{6} = G. \end{aligned}$$

Легко видеть, что в вырожденных случаях, когда $a=b=0$, $0=a<b$ или $0<a=b$, некоторые слагаемые в левой части равенства могут обращаться в нуль, не влияя, однако, на справедливость самого равенства.

II. Докажем теперь равенство (10) для случая $0<a<b$ для произвольного $i=0,\ldots,c-1$. В случае $i<a$ имеем

$$\begin{aligned} F_1 &= 1\cdot(c-b-a+i)+\ldots+(a-i)\cdot(c-b-1), \\ F_2 &= (a-i+1)\cdot(c-b)+\ldots+(b-i+1)\cdot(c-b), \\ F_3 &= (b-i+2)\cdot(c-b-1)+\ldots+(c-i)\cdot 1, \\ G &= \frac{(c-i+2)!}{3!(c-i-1)!} - \frac{(a-i+2)!}{3!(a-i-1)!} - \frac{(b-i+2)!}{3!(b-i-1)!}. \end{aligned}$$

Легко показать, что (10) может быть записано в виде

$$F_1(a',b',c')+F_2(a',b',c')+F_3(a',b',c')=G(a',b',c'),$$

где $a'=a-i$, $b'=b-i$, $c'=c-i$, а F_1, F_2, F_3 и G определены равенствами (15–18).

Заметим, что случаи $a\leqslant i<b$ и $b\leqslant i<c$ могут также быть сведены указанной подстановкой к вырожденным случаям ($a=b=0$ или $0=a<b$), рассмотренным в первой части доказательства. Теорема доказана. □

Для случая первого класса Черна $c_1=-1$ компонента $N(-1,a,b,c)$ задается тройкой целых чисел (a,b,c), таких что

$$\begin{cases} c^2-a^2-b^2+c-a-b=n, \\ 0\leqslant a\leqslant b, \\ c>a+b. \end{cases} \tag{19}$$

Легко видеть, что такие тройки находятся во взаимно-однозначном соответствии с тройками (A,B,C) положительных нечётных чисел $A=2a+1$, $B=2b+1$ и $C=2c+1$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} C^2-A^2-B^2=4n-1, \\ C>A+B. \end{cases}$$

Теорема 2. *Спектры расслоений, классы изоморфизма которых образуют компоненты Эйна $N(-1,a,b,c)$, имеют вид $\chi = -(\chi^+ + 1) \cup \chi^+$, где*
(20)
$$\chi^+ = 0^{c-a-b}1^{c-a-b+1}\ldots(a-1)^{c-b-1}a^{c-b}\ldots b^{c-b}(b+1)^{c-b-1}\ldots(c-2)^2(c-1)^1,$$
здесь $0 \leqslant a \leqslant b$, $c > a+b$, χ^+ обозначает неотрицательную часть спектра, а «показатели степеней» обозначают число вхождений конкретных элементов (чисел) в спектр.

Доказательство. Доказательство совпадает с доказательством теоремы 1, поскольку отрицательная часть спектра не дает вклада в равенства (9) и (10), а неотрицательные части у спектров (14) и (20) совпадают. □

Замечание 4. В разделе 9 работы [9] были приведены списки всех компонент Эйна в $M(e,n)$ для $n \leqslant 20$ и $e \in \{0,-1\}$ с указанием их размерностей, свойства быть рациональными либо стабильно рациональными, а также значений задающих их параметров a, b, c. Формула (14) позволяет найти спектры, имеющие расслоения, классы изморфизма которых образуют приведенные в [9] компоненты.

Замечание 5. В работе [13] В. К. Ведерниковым были рассмотрены два семейства многообразий модулей стабильных векторных расслоений (Теоремы 1 и 2), являющихся частными случаями компонент $N(0,a,b,c)$, и одно семейство (Теорема 3), являющееся частным случаем компонент $N(-1,a,b,c)$, рассматриваемых в данной работе. А именно, семейство, рассматриваемое в Теореме 1 работы [13] может быть получено из (13) подстановкой $a=0$, $b=k+1-l$, $c=k+1$. Семейство, рассматриваемое в Теореме 2 работы [13] может быть получено из (13) подстановкой $a=l$, $b=l$, $c=k+1$. Семейство, рассматриваемое в Теореме 3 работы [13] может быть получено из (19) подстановкой $a=l-1$, $b=l-1$, $c=k+1$. Приведенные в этих теоремах формулы для спектров могут быть получены с помощью указанных подстановок из формул (14) и (20), соответственно. Таким образом, формулы (14) и (20) обобщают формулы для спектров расслоений из семейств, рассмотренных в [13]. Тем самым получаем, что семейства, рассмотренные В. К. Ведерниковым являются компонентами и содержатся среди компонент Эйна $N(e,a,b,c)$. Кроме того, в работе [14] В. К. Ведерниковым были рассмотрены семейства так называемых супернулькорреляционных расслоений (Теорема, с. 368). С помощью подстановки $a=0$, $b=0$, $c=k+1$ нетрудно убедиться, что данные семейства снова являются частными случаями компонент Эйна. В работе [10] было продолжено исследование компонент Ведерникова, где были получены точные формулы для нахождения числа таких компонент из Теорем 1 и 2 его статьи [13], получивших в [10] название *компонент Ведерникова-Эйна.*

Замечание 6. Положим в (8) $a=0$, $b=k-1$ и $c=k$, тогда $c_2 = k^2-(k-1)^2 = 2k-1$ и
$$\dim N(0,0,k-1,k) = \frac{1}{3}\left(2k^3 - 5(k-1)^3\right) + k(k-1)^2 + 4\left(k^2-(k-1)^2\right) + \\ + \frac{11}{3}\left(2k-2(k-1)\right) - 3 - t(0,0,k-1) = 3k^2+4k+2-t(0,0,k-1).$$
При $k \geqslant 2$ получаем
$$\dim N(0,0,k-1,k) = 3k^2+4k+1,$$

что совпадает с формулой для размерности семейства Харстхорна – неприводимого рационального и гладкого семейства стабильных векторных расслоений из теоремы 9.9 статьи [6].

Делая аналогичную подстановку ($a = 0$, $b = k - 1$, $c = k$) в формуле (14), получаем, что спектры расслоений, классы изоморфизма которых образуют компоненты Эйна $N(0, 0, k - 1, k)$, имеют вид $\chi = -\chi^+ \cup \chi^+$, где

$$\chi^+ = 0^1 1^1 \ldots (k-1)^1,$$

и совпадают со спектрами расслоений из теоремы 9.9 статьи [6] (такие спектры принято называть *максимальными*). Вместе с тем, в доказательстве этой теоремы автор ссылается на результат из [4], где показано, что такое семейство является компонентой в соответствующем пространстве модулей. Таким образом, получаем, что семейство Хартсхорна также является компонентой Эйна.

3. Характеристики модифицированных инстантонных расслоений и их пространства модулей

Как уже было сказано выше, пространство $\mathcal{G}(a, k)$ модулей модифицированных инстантонных расслоений было введено в работе [1]. Там же было доказано, что в случае $k = 1$ при каждом $a \geqslant 2$, не равном 3, данное пространство является неособым плотным подмножеством рациональной неприводимой компоненты пространства $M(0; a^2 + 1)$. Имеет место следующая

Теорема 3. *Для произвольных $a \geqslant 2$ и $k \geqslant 1$ размерность μ пространства $\mathcal{G}(a, k)$ модулей модифицированных инстантонных расслоений $\mathcal{G}(a, k)$ вычисляется по формуле*

$$7k^2 + 16k + (4 + 2k)\binom{a+3}{3} - k\binom{a+2}{3} - 1 - 10\binom{k}{2} - k\binom{a+4}{3} - \binom{2k+5}{2} \tag{21}$$

или, в упрощенном виде,

$$\mu = 10k + \frac{2}{3}a^3 + 4a^2 - ka + \frac{22}{3}a - 7. \tag{22}$$

Доказательство. Нам потребуется следующий результат, изложенный В. Бартом в работе [2]. Пусть A, B и C — фиксированные прямые суммы линейных расслоений на $\mathbb{P}^3$, такие что $\mathrm{Hom}\,(C, B) = 0$. Тогда формула вычисления размерностей μ множеств локально замкнутых в $M(0, n)$ классов стабильных векторных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ для монады

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

представляется в виде:

$$\mu = d_1 - d_2 - d_3 - d_4, \tag{23}$$

где $d_1 = \dim \mathrm{Hom}\,(B, C)$, $d_2 = \dim GL(C)$, $d_3 = h^0(\Lambda^2 C)$, $d_4 = h^0(S^2 B)$.

Поскольку монада (5) удовлетворяет условиям Барта, то, подставляя

$$d_1 = \dim \mathrm{Hom}\,((4 + 2k) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, k \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a)) =$$
$$= h^0(4k + 2k^2)\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) + (4 + 2k)h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a) = 8k^2 + 16k + (4 + 2k)\binom{a+3}{3},$$

$$\begin{aligned}d_2 = \dim GL(k\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a))\\ = \dim \mathrm{Hom}\,(k\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a), k\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a))\\ = h^0k^2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} + h^0k\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a-1)+1 = k^2 + k\binom{a+2}{3}+1,\end{aligned}$$

$$d_3 = h^0(\Lambda^2(k\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a))) = h^0C_k^2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)+h^0k\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a+1) = 10\binom{k}{2}+k\binom{a+4}{3},$$

$$d_4 = h^0S^2(4+2k)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} = \binom{2k+5}{2}$$

в (23) и приводя подобные слагаемые, получаем требуемое. □

Замечание 7. При $k = 1$ формула (21) обращается в формулу

(24) $$4\cdot\binom{a+3}{3} - a - 1,$$

полученную в [1].

Замечание 8. Размерность пространства I модулей обычных инстантонов, также являющихся частными случаями стабильных расслоений, в случае $c_1 = 0$ равна $8c_2 - 3$ (см., например, [12]), т. е. при $c_2 = a^2 + k$ имеем

(25) $$\dim I = 8\left(a^2+k\right) - 3.$$

Выясним при каких условиях эта размерность (иногда называемая *ожидаемой*) совпадает с размерностью пространства $\mathcal{G}(a,k)$, приведенной в (22), т.е. при каких условиях обнуляется разность этих размерностей.

Вычитая правую часть (25) из правой части (22), получим

$$2k + \frac{2}{3}a^3 - 4a^2 - ka + \frac{22}{3}a - 4 = \frac{1}{3}(a-2)\left(2a^2 - 8a - 3k + 6\right).$$

Видно, что при $a = 2$ число k может быть любым. Выясним, при каких натуральных a и k имеет место равенство

$$2a^2 - 8a - 3k + 6 = 0.$$

Имеем

$$k = \frac{2a^2-8a}{3} + 2.$$

Ясно, что k является целым тогда и только тогда, когда $a \not\equiv 2 \pmod 3$ (т.е. a либо делится на 3, либо имеет остаток 1 от деления на 3).

Таким образом, размерности совпадают либо когда $a = 2$, k — любое, либо когда $a \not\equiv 2 \pmod 3$, $k = \frac{1}{3}(2a^2 - 8a) + 2$.

Теперь сформулируем основной результат, касающийся спектров модифицированных инстантонных расслоений.

Теорема 4. *Для произвольных $a \geqslant 2$ и $k \geqslant 1$ спектры модифицированных инстантонных расслоений имеют вид $\chi = -\chi^+ \cup \chi^+$, где*

(26) $$\chi^+ = 0^{a+k}1^{a-1}2^{a-2}\dots(a-2)^2(a-1)^1,$$

здесь χ^+ обозначает неотрицательную часть спектра, а «показатели степеней» обозначают число вхождений конкретных элементов (чисел) в спектр.

Доказательство. Покажем, что для указанного спектра для $i = 0, 1, \ldots, a-1$ выполняются равенства

$$h^0 K(-i) = h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a-1-i) + k \cdot h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-i), \tag{27}$$

где

$$h^0 K(-i) = \sum_{k_j - i \geqslant 0} h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_j - i),$$

k_j, $j = 1, \ldots, n$ — элементы спектра.

При $i = 0$ имеем

$$h^0 K(0) = \sum_{k_j \geqslant 0} h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_j) = \sum_{k_j \geqslant 0} (k_j + 1) = 1 \cdot (a+k) + 2 \cdot (a-1) + 3 \cdot (a-2) + \ldots + a \cdot 1 =$$

$$= k + 1 \cdot a + 2 \cdot (a-1) + \ldots + a \cdot 1 = k + \frac{a(a+1)(a+2)}{6}$$

в силу равенства (12). С другой стороны,

$$h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a-1) = \frac{a(a+1)(a+2)}{6} \quad \text{и} \quad h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(0) = 1,$$

откуда получаем равенство (27).

Пусть теперь $i > 0$. Тогда

$$h^0 K(0) = \sum_{k_j - i \geqslant 0} h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_j - i) =$$

$$= 1 \cdot (a-i) + 2 \cdot (a-i-1) + \ldots + (a-i) \cdot 1 = \frac{(a-i)(a-i+1)(a-i+2)}{6}$$

аналогично в силу (12). С другой стороны, имеем

$$h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a-i-1) = \frac{(a-i)(a-i+1)(a-i+2)}{6} \quad \text{и} \quad h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-i) = 0,$$

откуда получаем равенство (27). □

Замечание 9. В работе [1] было показано, что замыкание пространства $\mathcal{G}(2,1)$ дает неприводимую компоненту размерности 37 в $M(0,5)$, а также что расслоения, классы изоморфизма которых образуют $\mathcal{G}(2,1)$, имеют спектр $(-1,0,0,0,1)$. Данные результаты могут быть получены подстановкой $a = 2$ и $k = 1$ в формулы (22) и (26).

References

[1] C. Almeida, M. Jardim, A.S. Tikhomirov, S.A. Tikhomirov, *New moduli components of rank 2 bundles on projective space*, Sb. Math., **212**:11 (2021), 1503–1552. Zbl 7480678

[2] W. Barth, *Stable vector bundles on $\mathbb{P}_3$, some experimental data*, in Douady, A. (ed.) et al., *Les équations de Yang-Mills. Seminaire E.N.S. 1977-1978*, Astérisque, **71-72**, Societe Mathematique de France, Paris, 1980, 205–218. Zbl 1382.14015

[3] L. Ein, *Generalized null correlation bundles*, Nagoya Math. J., **111** (1988), 13–24. Zbl 0663.14012

[4] G. Ellingsrud, S.A. Strømme, *Stable rank-2 vector bundles on $\mathbb{P}^3$ with $c_1 = 0$ and $c_2 = 3$*, Math. Ann., **255**:1 (1981), 123–135. Zbl 0438.14009

[5] R. Hartshorne, *Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$*, Math. Ann., **238**:3 (1978), 229–280. Zbl 0411.14002

[6] R. Hartshorne, *Stable reflexive sheaves*, Math. Ann., **254** (1980), 121–176. Zbl 0431.14004

[7] R. Hartshorne, A.P. Rao, *Spectra and monads of stable bundles*, J. Math. Kyoto Univ., **31**:3 (1991), 789–806. Zbl 0762.14010

[8] A.A. Kytmanov, N.N. Osipov, S.A. Tikhomirov, *Finding Ein components in the moduli spaces of stable rank 2 bundles on the projective 3-space*, Sib. Math. J., **57**:2 (2016), 322–329. Zbl 1366.14016

[9] A.A. Kytmanov, A.S. Tikhomirov, S.A. Tikhomirov, *Series of rational moduli components of stable rank two vector bundles on* $\mathbb{P}^3$, Sel. Math., New Ser., **25**:2 (2019), Paper No. 29. Zbl 1440.14055

[10] N.N. Osipov, S.A. Tikhomirov, *On the number of Vedernikov–Ein irreducible components of the moduli space of stable rank* 2 *bundles on the projective space*, Sib. Math. J., **59**:1 (2018), 107–112. Zbl 1428.14020

[11] P. Rao, *A note on cohomology modules of rank two bundles*, J. Algebra, **86** (1984), 23–34. Zbl 0528.14008

[12] A.S. Tikhomirov, *Moduli of mathematical instanton vector bundles with odd* c_2 *on projective space*, Izv. Math., **76**:5 (2012), 991–1073. Zbl 1262.14053

[13] V.K. Vedernikov, *Moduli of stable vector bundles of rank* 2 *on* $\mathbb{P}^3$ *with fixed spectrum*, Math. USSR, Izv., **25** (1985), 301–313. Zbl 0589.14017

[14] V. Vedernikov, *The moduli of super-null correlation bundles on* $\mathbb{P}^3$, Math. Ann., **176**:3 (1987), 365–383. Zbl 0596.14005

Alexey Alexandrovich Kytmanov
Siberian Federal University,
79, Svobodny ave.,
Krasnoyarsk, 660041, Russia
Laboratory of Artificial Intelligence, Neurotechnology, and Business Analytics,
Plekhanov Russian University of Economics,
36, Stremyanny lane,
Moscow, 117997, Russia
Email address: aakytm@gmail.com

Nikolay Nikolaevich Osipov
Siberian Federal University,
79, Svobodny ave.,
Krasnoyarsk, 660041, Russia
Email address: nnosipov@rambler.ru

Sergey Alexandrovich Tikhomirov
K.D. Ushinsky Yaroslavl State Pedagogical University,
108, Respublikanskaya str.,
Yaroslavl, 150000, Russia
Email address: satikhomirov@mail.ru

Tatiana Viktorovna Zykova
Siberian Federal University,
79, Svobodny ave.,
Krasnoyarsk, 660041, Russia
Email address: zykovatv@mail.ru