S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 19, №2, стр. 460–483 (2022) УДК 517.51
DOI 10.33048/semi.2022.19.040 MSC 46E35

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА ОДНОРОДНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.С. РОМАНОВ

Abstract. On s-homogeneous metric spaces with measure for Sobolev-type functions with "smoothness" $\alpha \leq 1$ we prove the property s/α-absolute continuity, in the case when the characteristics that define "smoothness" belong to the corresponding Lorentz space.

Keywords: Lorentz space, Sobolev type functions, homogeneous metric spaces, absolute continuity.

Согласно классической теореме вложения на шаре $B \subset R^n$ функции из пространства Соболева $W^1_p(B)$ при $p > n$ являются непрерывными и удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\alpha = 1 - n/p$, а при $p \leq n$ пространства Соболева $W^1_p(B)$ содержат разрывные функции. В рамках стандартной шкалы пространств Соболева этот результат неулучшаем. Рассматривая иные классы функций с обобщенными производными, можно получить более тонкие результаты.

Если $f \in W^1_{1,\,loc}(B)$, а градиент функции f принадлежит пространству Лоренца $L_{n,1}(B)$, то, согласно работе [1], функция f является n-абсолютно непрерывной, т.е. для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого семейства непересекающихся шаров $B(x_k, r_k) \subset B$ из условия

$$\sum_k r_k^n < \delta$$

Romanov, A.S., On the continuity of Sobolev-type functions on homogeneous metric spaces.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-0007).

Поступила 25 апреля 2022 г., опубликована 19 августа 2022 г.

следует

$$\sum_k (\operatorname*{osc}_{B_k} f)^n < \varepsilon.$$

Рассмотрим семейство функций $L_n^*(B) = \bigcup\limits_{p>n} L_p(B)$. Легко проверить, что пространство Лоренца $L_{n,1}(B)$ расположено "между" пространством Лебега $L_n(B)$ и семейством $L_n^*(B)$, т. е. при $p > n$ выполняются вложения

$$L_p(B) \subset L_{n,1}(B) \subset L_n(B).$$

Поэтому результат работы [1] можно считать уточнением классической соболевской теоремы вложения. Условие n-абсолютной непрерывности является довольно сильным, в частности, всякое n-абсолютно непрерывное отображение $F : B \to R^n$ обладает N-свойством Лузина и является почти всюду дифференцируемым.

Вполне аналогична ситуация с абсолютной непрерывностью функций соболевского типа на однородных метрических пространствах (X, d) с s-регулярной мерой μ : если "метрический аналог градиента" функции $u : X \to R$ принадлежит пространству Лоренца $L_{s,1}(X)$, то функция u является s-абсолютно непрерывной [2]. В параграфе 3 будет доказано, что результат работы [2] является точным в том смысле, что в рамках рассматриваемой шкалы функциональных пространств найденые условия на показатели являются оптимальными.

В параграфе 4 изучается вопрос об абсолютной непрерывности функций соболевского типа, имеющих "гладкость" меньше единицы. Доказательства для пространств $M^{\alpha}_{p,q}$ основаны на модификации результатов и методов работы [2]. Для функциональных классов типа пространств Бесова приходится использовать другие подходы.

В параграфе 5 получены достаточные условия γ-абсолютной непрерывности для классов функций, осцилляция которых удовлетворяет интегральной оценке специального вида. Этот результат является метрической модификацией евклидовых результатов работы [1]. Основной проблемой в данном случае является ограниченность технических возможностей в метрическом случае по сравнению с евклидовым.

I. Пространства Лоренца

Поскольку в работе рассматриваются классы функций, связанные с пространствами Лоренца, то мы начнём с краткой информации о пространствах Лоренца $L_{p,q}(X)$.

Пусть (X, d) — метрическое пространство, μ — борелевская мера на X и $\mu(X) < \infty$. Для произвольной измеримой функции $f : X \to R$ обозначим через $\omega(\lambda)$ функцию распределения, полагая при $\lambda \geq 0$

$$\omega(\lambda) = \mu(\{x \in X \mid \ |f(x)| > \lambda\}),$$

а через f^* обозначим невозрастающую перестановку функции f, полагая при $t > 0$

$$f^*(t) = \inf\{\tau \geq 0 \mid \ \omega(\tau) \leq t\}.$$

В силу равноизмеримости функций f и f^* для всякой функции $f \in L_p(X)$ при $1 \le p < \infty$ мы имеем

$$\left(\int\limits_X |f(x)|^p d\,\mu\right)^{1/p} = \left(\int\limits_0^{\mu(X)} (f^*(t))^p d\,t\right)^{1/p}. \qquad (1)$$

При $1 \le p, q < \infty$ пространство Лоренца $L_{p,q}(X)$ определяется как множество всех измеримых функций, для которых конечен функционал

$$\Lambda_{p,q}(f) = \left(\frac{q}{p}\int\limits_0^{\mu(X)} (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{d\,t}{t}\right)^{1/q}.$$

Иногда нам будет удобнее использовать эквивалентное описание функционала $\Lambda_{p,q}(f)$ через функцию распределения

$$\Lambda_{p,q}(f) = \left(\frac{q}{p}\int\limits_0^{\mu(X)} (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{d\,t}{t}\right)^{1/q} = \left(q\int\limits_0^{\infty} \lambda^{q-1}(\omega(\lambda))^{q/p} d\lambda\right)^{1/q} < \infty. \qquad (2)$$

Тождество (2) содержится в работе [1] в предложении 2.1. В книге [3] показано, что для доказательства различных соотношений для пространств Лоренца достаточно проверить выполнение их для простых функций. В [3] для простых функций приведены явные формулы для $\omega(s)$ и $f^*(t)$, позволяющие легко проверить тождество (2).

Пространство Лоренца $L_{p,p}(X)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(X)$. При фиксированном показателе p и $q_1 < q_2$ выполняется вложение $L_{p,q_1}(X) \subset L_{p,q_2}(X)$ и $\Lambda_{p,q_2}(f) \le \Lambda_{p,q_1}(f)$, т. е. при увеличении показателя q пространство становится более широким [3].

Нам понадобится еще одно вложение в шкале пространств Лоренца. Предположим, что $r > p, 1 < q, \tau < \infty$ и мера множества X конечна. Используя неравенство Гельдера и пересчитывая показатели степени, получаем

$$\Lambda_{p,1}(f) = \frac{1}{p}\int\limits_0^{\mu(X)} t^{1/p} f^*(t)\frac{d\,t}{t} = \frac{1}{p}\int\limits_0^{\mu(X)} \left(\frac{t^{1/r} f^*(t)}{t^{1/q}}\right)\cdot t^{-1+1/q+1/p-1/r}\,dt$$

$$\le \frac{1}{p}\left(\int\limits_0^{\mu(X)} (t^{1/r} f^*(t))^q \frac{d\,t}{t}\right)^{1/q}\cdot\left(\int\limits_0^{\mu(X)} t^{-1+q(r-p)/(rp(q-1))}\,dt\right)^{1/q'}.$$

Поскольку $q(r-p)/(rp(q-1)) > 0$, то последний интеграл сходится. Следовательно, $\Lambda_{p,1}(f) \le C\,\Lambda_{r,q}(f)$ и выполняются вложения

$$L_{r,1}(X) \subset L_{r,q}(X) \subset L_{p,1}(X) \subset L_{p,\tau}(X). \qquad (3)$$

Символом χ_E будем обозначать характеристическую функцию множества E. Легко заметить, что для всякого измеримого множества $E \subset X$ выполняется

$$\Lambda_{p,q}(\chi_E) = (\mu(E))^{1/p}.$$

Вообще говоря, $\Lambda_{p,q}(f)$ не всегда является нормой, поскольку в общем случае может не выполняться неравенство треугольника. Однако при $p > 1$ в работе [3] определена норма $||f||_{p,q}$, удовлетворяющая оценке

$$\Lambda_{p,q}(f) \le ||f||_{p,\,q} \le \frac{p}{p-1}\Lambda_{p,q}(f),$$

относительно которой пространство Лоренца $L_{p,q}(X)$ будет банаховым. Норма в пространствах Лоренца является монотонной, т. е. из условия, что $0 \le f(x) \le g(x)$ выполняется почти всюду следует неравенство $||f||_{p,q} \le ||g||_{p,q}$. Во многих случаях вместо оценки нормы $||f||_{p,q}$ проще получить эквивалентную оценку для функционала $\Lambda_{p,q}(f)$.

Введение в теорию пространств Лоренца можно найти в книге [3].

II. Функции соболевского типа на метричесих пространствах

В работе [4] П. Хайлаш предложил простое и весьма универсальное определение функциональных классов соболевского типа на метрических пространствах с мерой.

Рассмотрим метрическое пространство (X, d) с заданной на нём регулярной борелевской мерой μ. Будем предполагать, что $\mu(X) < \infty$, а диаметр метрического пространства конечен; без ограничения общности можно считать $\operatorname{diam} X = 1$.

Определение. Для произвольной μ — измеримой функции $u : X \to \overline{R}$ функцию $g : X \to [0, \infty)$ будем называть допустимой, если существует такое множество $E \subset X$, что $\mu(E) = 0$ и неравенство

$$|u(x) - u(y)| \le d(x, y)(g(x) + g(y)) \tag{4}$$

выполняется для всех точек $x, y \in X \setminus E$.

Множество всех допустимых функций для функции u обозначим через $D(u)$ и положим $D_p(u) = D(u) \cap L_p(X)$ при $p \ge 1$.

Следуя работе [4], определим функциональные классы соболевского типа $S^1_p(X, d, \mu)$ и $M^1_p(X, d, \mu)$ условиями:

$$S^1_p(X, d, \mu) = \{u : X \to \overline{R} \big| D_p(u) \ne \emptyset\},$$

$$M^1_p(X, d, \mu) = \{u \in L_p(X) \big| u \in S^1_p(X, d, \mu)\}.$$

Полунорма в пространстве $S^1_p(X, d, \mu)$ и норма в пространстве $M^1_p(X, d, \mu)$ определяются равенствами

$$||u\big|S^1_p|| = \inf_{g \in D_p(u)} ||g\big|L_p||, \quad ||u\big|M^1_p|| = ||u\big|L_p|| + ||u\big|S^1_p||.$$

Пространства $M^1_p(X, d, \mu)$ можно считать естественным обобщением пространств Соболева с первыми обобщенными производными, поскольку в евклидовых областях $G \subset R^n$ с достаточно регулярной границей (к примеру, липшицевой) классическое пространство Соболева $W^1_p(G)$ и пространство

$$M^1_p(G, |*|, m_n),$$

рассматриваемое относительно стандартной евклидовой метрики и меры Лебега, совпадают как множества функций, а их нормы эквивалентны [4].

Свойства функций из пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ очевидным образом зависят от свойств метрики и меры.

В данной работе рассматриваются однородные метрические пространства: полное метрическое пространство (X,d) будем называть s-однородным, $s>1$, если существуют такая борелевская мера μ и такие постоянные

$$0<L_1\le L_2<\infty,$$

что для всякого шара $B(x,r)\subset X$ при $r\le \operatorname{diam} X$ выполняется оценка

$$L_1r^s\le\mu(B(x,r))\le L_2r^s.$$

Легко заметить, что для меры замкнутого шара $\overline{B(x,r)}=\{y\in X\mid d(x,y)\le r\}$ выполняется такая же оценка.

Степень s называется показателем регулярности меры μ относительно метрики d.

Полное метрическое пространство (X,d) будем называть локально s-однородным, если всякий шар $B\subset X$ сам является s-однородным метрическим пространством и постоянные L_1,L_2 в условии s-однородности не зависят от выбора шара.

Далее всюду будем предполагать, что пространство (X,d) является локально s-однородным, а мера μ удовлетворяет условию s-однородности.

Символом u_E будем обозначать среднее значение функции u на множестве E

$$u_E=⨍_E u\,d\mu=\frac{1}{\mu(E)}\int_E u\,d\mu.$$

Условие s-однородности обеспечивает выполнение некоторых свойств меры μ и свойств суммируемых функций, вполне аналогичных соответствующим свойствам, связанным с мерой Лебега в R^n [5].

В частности, для всякой суммируемой функции u почти все точки множества X являются точками Лебега, в которых

$$u(x)=\lim_{r\to0}⨍_{B(x,r)} u\,d\mu.$$

Максимальный оператор

$$\mathcal{M}(u)(x)=\sup_{\rho>0}⨍_{B(x,\rho)}|u|d\mu$$

при $p>1$ ограничен в пространствах Лебега $L_p(X)$, а силу интерполяционной теоремы [3] и в пространствах Лоренца $L_{p,q}(X)$.

В теоремах вложения для пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ показатель регулярности s играет роль "размерности" метрического пространства. По аналогии с евклидовым случаем, при $p>s$ всякая функция $u\in M_p^1(X,d,\mu)$ эквивалентна некоторой непрерывной функции $\tilde u$, т. е. функция u может быть переопределена на множестве нулевой меры таким образом, что получаемая в результате функция $\tilde u$ будет непрерывной [5]. При $p\le s$ пространство $M_p^1(X,d,\mu)$ может содержать функции, имеющие неустранимые разрывы. В частности, известно, что на шаре $B\subset R^n$ при $p\le n$ пространство Соболева $W_p^1(B)$ содержит разрывные функции. При этом $W_p^1(B)=M_p^1(B,|*|,m_n)$.

III. Абсолютная непрерывность функций соболевского типа

Для получения более точных результатов, касающихся непрерывности функций соболевского типа, следует в исходном определении пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ заменить пространство Лебега $L_p(X)$ на пространство Лоренца $L_{p,q}(X)$. Двухиндексная шкала пространств Лоренца содержит пространства Лебега и позволяет изучать более тонкие свойства функций.

По аналогии с работой П. Хайлаша [4] введем классы функций соболевского типа, связанные с пространствами Лоренца.

Определение. *Функция u принадлежит пространству соболевского типа $S_{p,q}^1(X,d,\mu)$, если для неё существует допустимая функция $g\in D(u)\cap L_{p,q}(X)$. Функция u принадлежит пространству $M_{p,q}^1(X,d,\mu)$, если*

$$u\in L_p(X)\cap S_{p,q}^1(X,d,\mu).$$

Полунорма в пространстве $S_{p,q}^1(X,d,\mu)$ и норма в пространстве $M_{p,q}^1(X,d,\mu)$ определяются равенствами

$$||u\big|S_{p,q}^1||=\inf_{g\in D(u)}||g\big|L_{p,q}||,\quad ||u\big|M_{p,q}^1||=||u\big|L_p||+||u\big|S_{p,q}^1||.$$

Определение. *Функцию $f:X\to R$, определённую на метрическом пространстве (X,d) с мерой μ, будем называть γ-абсолютно непрерывной, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое значение $\delta>0$, что для всякого семейства непересекающихся шаров $B_k\subset X$ из неравенства*

$$\sum_k \mu(B_k)<\delta$$

следует, что

$$\sum_k(\operatorname*{osc}_{B_k} f)^\gamma<\varepsilon.$$

Если $\gamma<\beta$, то γ-абсолютно непрерывная функция является и β-абсолютно непрерывной.

В работе [2] доказано следующее утверждение:

Теорема 3.1. Пусть (X,d) — локально s-однородное метрическое пространство. Тогда для всякой функции $u\in M_{s,1}^1(X,d,\mu)$ существует эквивалентная ей s-абсолютно непрерывная функция.

Результат теоремы 3.1 является уточнением отмеченного в конце предыдущего параграфа вложения пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ в пространства непрерывных функций, поскольку при всех $p>s$ мы имеем

$$M_p^1(X,d,\mu)\subset M_{s,1}^1(X,d,\mu)\subset M_s^1(X,d,\mu),$$

что является непосредственным следствием вложений в шкале пространств Лоренца.

Можно показать, что рамках шкалы пространств $M_{p,q}^1(X,d,\mu)$ результат теоремы 3.1 является точным и неулучшаемым.

I. Докажем вначале, что показатель абсолютной непрерывности, равный s, является наилучшим, т .е. при любом

$$0<\lambda<s$$

пространство $M^1_{s,1}(X,d,\mu)$ содержит функцию, которая не является λ-абсолютно непрерывной.

Согласно цепочке вложений (3) при любом $p>s$ мы имеем

$$M^1_p(X,d,\mu)=M^1_{p,p}(X,d,\mu)\subset M^1_{s,1}(X,d,\mu).$$

Следовательно нам достаточно показать, что при некотором $p>s$ и произвольном $0<\lambda<s$ пространство $M^1_p(X,d,\mu)$ содержит функцию, не являющуюся λ-абсолютно непрерывной. Если функция не является λ-абсолютно непрерывной, то она не является и γ-абсолютно непрерывной при всех $0<\gamma<\lambda$. Поэтому можно считать, что значения λ и p достаточно близки к s.

Пусть

$$s/\lambda=1+2\delta,$$

по s и δ выберем значение p так, что

$$0<p-s=\delta/2.$$

Выберем положительное число α так, чтобы выполнялась оценка

$$L_2\,(2\alpha)^s\,\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)^{2s}<\mu(X).$$

Положим

$$r_k=\alpha(1/k)^2$$

и построим последовательность непересекающихся шаров $B(b_k,r_k)\subset X$. Фиксируем точку $b_1\in X$ и рассмотрим шары $B_1=B(b_1,r_1)$ и $B_1^*=B(b_1,r_1+r_2)$. Поскольку

$$\mu(\overline{B_1^*})\le\mu(\overline{B(b_1,2r_1)})\le L_2(2\alpha)^s<\mu(X),$$

то существует точка $b_2\in X$, находящаяся на расстоянии больше, чем r_2 от шара B_1, т. е. шары B_1 и $B_2=B(b_2,r_2)$ не пересекаются. Пусть $D_2=B_1\cup B_2$ и

$$D_2^*=\{x\in X\Big|d(x,D_2)\le r_3\}.$$

Поскольку

$$\mu(D_2^*)\le\mu\left(\overline{B(b_1,r_1+r_3)}\cup\overline{B(b_2,r_2+r_3)}\right)\le\mu\left(\overline{B(b_1,2r_1)}\cup\overline{B(b_2,2r_2)}\right)$$

$$\le\mu\left(\overline{B(b_1,2r_1)}\right)+\mu\left(\overline{B(b_2,2r_2)}\right)\le L_2(2\alpha)^s\left(1+(1/2)^{2s}\right)<\mu(X),$$

то существует точка $b_3\in X$, находящаяся на расстоянии большем, чем r_3 от множества D_2, поэтому шар $B_3=B(b_3,r_3)$ не пересекается с шарами B_1 и B_2. Аналогичным образом строится и вся последовательность непересекающихся шаров $\{B_k\}$. Предположим, что первые n шаров уже построены, и пусть

$$D_n=\bigcup_{k=1}^{n}B_k,\qquad D_n^*=\{x\in X\Big|d(x,D_n)\le r_{n+1}\}.$$

Поскольку

$$\mu(D_n^*) \le \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{B(b_k, 2r_k)}\right) \le L_2\,(2\alpha)^s \sum_{k=1}^{n} (1/k)^{2s} < \mu(X),$$

то существуют точка $b_{n+1} \in X \setminus D_n^*$ и шар $B_{n+1} = B(b_{n+1}, r_{n+1})$, который не пересекается с ранее построенными шарами $B_1, \dots B_n$.

Положим

$$a_k = (1/k)^{1/\lambda}$$

и рассмотрим последовательность функций $u_k : X \to R$, носители которых принадлежат соответствующим шарам $\overline{B_k}$,

$$u_k(x) = \begin{cases} a_k \left(1 - \frac{d(x,b_k)}{r_k}\right), & \text{если } d(x,b_k) \le r_k, \\ 0, & \text{если } d(x,b_k) \ge r_k. \end{cases}$$

Отметим, что $u_k(x) \le a_k$.

Легко проверить, что функция

$$g_k(x) = \begin{cases} a_k/r_k, & \text{если } d(x,b_k) \le r_k, \\ 0, & \text{если } d(x,b_k) > r_k, \end{cases}$$

является допустимой для функции u_k.

Действительно:

i) если $x, y \in B_k$, то

$$|u_k(x) - u_k(y)| = \frac{a_k}{r_k}|d(x,b_k) - d(y,b_k)| \le \frac{a_k}{r_k} d(x,y) \le d(x,y)\left(g_k(x) + g_k(y)\right);$$

ii) если $x \in B_k$ и $y \notin B_k$, то

$$|u_k(x) - u_k(y)| = \frac{a_k}{r_k}|r_k - d(x,b_k)| \le \frac{a_k}{r_k} d(x,y) \le d(x,y)\left(g_k(x) + g_k(y)\right);$$

iii) если $x, y \notin B_k$, то

$$|u_k(x) - u_k(y)| = 0 = d(x,y)\left(g_k(x) + g_k(y)\right).$$

Рассмотрим функции

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad \text{и} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x).$$

Поскольку носители функций u_k не пересекаются и носители функций g_k не пересекаются, то $u(x) = u_k(x),\ g(x) = g_k(x)$ при $x \in B_k$ и $u(x) = 0,\ g(x) = 0$ при $x \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$.

Функция g является допустимой для функции u. Чтобы это доказать, учитывая пункты i) - iii), достаточно проверить случай, когда $x \in B_k, y \in B_m$. Поскольку $u_k(y) = g_k(y) = 0$ и $u_m(x) = g_m(x) = 0$, то

$$|u(x) - u(y)| = |u_k(x) - u_m(y)| \le |u_k(x) - u_k(y)| + |u_m(x) - u_m(y)|$$

$$\le d(x,y)(g_k(x) + g_k(y)) + d(x,y)(g_m(x) + g_m(y)) = d(x,y)(g(x) + g(y)).$$

Оценим норму функции u в пространстве $L_p(X)$. Мы имеем

$$\|u|L_p\|^p \le \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} u^p \, d\mu \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k^p \, \mu(B_k) \le C \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{2s+p/\lambda} < \infty.$$

Теперь оценим норму функции u в пространстве $S^1_p(X,d,\mu)$. Учитывая неравенства
$$\frac{p}{\lambda}-2p+2s>\frac{s}{\lambda}-2(p-s)=1+2\delta-\delta=1+\delta>1,$$
мы получаем
$$\|u\big|S^1_p\|^p=\|g\big|L_p\|^p=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{r_k}\right)^p\mu(B_k)\le C_1\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{p/\lambda}\left(\frac{1}{k}\right)^{-2p}\left(\frac{1}{k}\right)^{2s}$$
$$\le C_1\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{p/\lambda-2p+2s}\le C_1\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{1+\delta}<\infty.$$
Следовательно функция u принадлежит пространству $M^1_p(X,d,\mu)$.

Сумма мер шаров B_k конечна
$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_k)\le L_2\,\alpha^s\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{2s}<\infty.$$
Поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер $N=N(\varepsilon)$, что
$$\sum_{k=N}^{\infty}\mu(B_k)<\varepsilon.$$
При этом
$$\sum_{k=N}^{\infty}(\operatorname*{osc}_{B_k}u)^{\lambda}=\sum_{k=N}^{\infty}a_k^{\lambda}=\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty.$$

Таким образом функция $u\in M^1_p(X,d,\mu)\subset M^1_{s,1}(X,d,\mu)$, но не является λ-абсолютно непрерывной. Это означает, что в теореме 3.1 показатель абсолютной непрерывности равный s является наилучшим из возможных.

II. Покажем, что при $q>1$ пространство $M^1_{s,q}(X,d,\mu)$ содержит разрывные функции.

Пусть
$$a\in X,\quad 0<r<R<\operatorname{diam}X.$$

Рассмотрим два концентрических шара $B(a,r),B(a,R)$ и непрерывную функцию
$$v_{r,R}(x)=\begin{cases}1, & \text{если } d(x,a)\le r,\\ \dfrac{\ln(R/d(x,a))}{\ln(R/r)}, & \text{если } r<d(x,a)<R,\\ 0, & \text{если } d(x,a)\ge R.\end{cases}$$

Приращение функции $v_{r,R}$ равно нулю, если $d(x,a)=d(y,a)$, а также в случаях, когда $x,y\in\overline{B(a,r)}$, либо $x,y\notin B(a,R)$.

Рассмотрим точки $x,y\in B(a,R)\setminus\overline{B(a,r)}$ и оценим приращение функции $v_{r,R}$. Для определенности будем считать $d(x,a)<d(y,a)$. Воспользовавшись теоремой Лагранжа, мы получаем
$$|v_{r,R}(x)-v_{r,R}(y)|=\frac{1}{\ln(R/r)}|\ln d(y,a)-\ln d(x,a)|=\frac{1}{\ln(R/r)}|d(y,a)-d(x,a)|\frac{1}{\xi},$$
где $d(x,a)<\xi<d(y,a)$, а $|d(y,a)-d(x,a)|\le d(x,y)$.

Таким образом
$$|v_{r,R}(x)-v_{r,R}(y)|\le d(x,y)\,\frac{1}{\ln(R/r)}\left(\frac{1}{d(x,a)}+\frac{1}{d(y,a)}\right).$$

В остальных случаях взаимного расположения точек x и y мы получаем аналогичные оценки.

Если $d(x,a) \le r$ и $r < d(y,a) < R$, то

$$|v_{r,R}(x) - v_{r,R}(y)| = \left|1 - \frac{\ln(R/d(y,a))}{\ln(R/r)}\right| = \frac{1}{\ln(R/r)}|\ln d(y,a) - \ln r|$$

$$\le d(x,y)\,\frac{1}{\ln(R/r)}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d(y,a)}\right).$$

Если $r < d(x,a) < R$ и $d(y,a) \ge R$, то

$$|v_{r,R}(x) - v_{r,R}(y)| = \frac{\ln(R/d(x,a))}{\ln(R/r)} = \frac{1}{\ln(R/r)}|\ln R - \ln d(x,a)|$$

$$\le d(x,y)\,\frac{1}{\ln(R/r)}\left(\frac{1}{d(x,a)} + \frac{1}{R}\right).$$

При $d(x,a) \le r$ и $d(y,a) \ge R$ мы получаем оценку

$$|v_{r,R}(x) - v_{r,R}(y)| \le d(x,y)\,\frac{1}{\ln(R/r)}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right).$$

Теперь легко заметить, что функция

$$g_{r,R}(x) = \frac{1}{\ln(R/r)}\begin{cases} 1/r, & \text{если } d(x,a) \le r,\\ \dfrac{1}{d(x,a)}, & \text{если } r < d(x,a) < R,\\ 1/R, & \text{если } d(x,a) \ge R,\end{cases}$$

является допустимой для функции $v_{r,R}$.

Оценим функцию распределения функции $g_{r,R}$, т.е. оценим меру множеств

$$\{x \in X \big| g_{r,R}(x) > \lambda\}.$$

Введем обозначения $\beta = \min g_{r,R}(x) = (R\ln(R/r))^{-1}$, $\tau = \max g_{r,R}(x) = (r\ln(R/r))^{-1}$.

Учитывая s-однородность метрического пространства (X,d), получаем

$$\omega(\lambda) \le \begin{cases} \mu(X), & \text{если } 0 < \lambda < \beta,\\ L_2(\lambda\ln(R/r))^{-s}, & \text{если } \beta \le \lambda \le \tau,\\ 0, & \text{если } \lambda > \tau.\end{cases}$$

Используя равенство (2), оценим функционал $\Lambda_{s,q}(g_{r,R})$. Мы имеем

$$(\Lambda_{s,q}(g_{r,R}))^q = q\int\limits_0^\infty \lambda^{q-1}(\omega(\lambda))^{q/s}d\lambda$$

$$= q\int\limits_0^\beta \lambda^{q-1}(\omega(\lambda))^{q/s}d\lambda + q\int\limits_\beta^\tau \lambda^{q-1}(\omega(\lambda))^{q/s}d\lambda = qI_1(r,R) + qI_2(r,R).$$

Оценим каждый из интегралов по отдельности. Мы имеем

$$qI_1(r,R) \le (\mu(X))^{q/s}\ (R\ln(R/r))^{-q}.$$

При фиксированном R и r, стремящемся к нулю, $qI_1(r,R) \to 0$.

Для второго интеграла получаем

$$qI_2(r,R) \le qL_2^{q/s}(\ln(R/r))^{-q}\int\limits_{\beta}^{\tau}\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$= qL_2^{q/s}(\ln(R/r))^{-q}\left[\ln\left((r\ln(R/r))^{-1}\right) - \ln\left((R\ln(R/r))^{-1}\right)\right]$$

$$= qL_2^{q/s}(\ln(R/r))^{-q}\ln\left(\frac{R\ln(R/r)}{r\ln(R/r)}\right) = \frac{qL_2^{q/s}}{(\ln(R/r))^{q-1}}.$$

Поскольку $q>1$, то при фиксированном R и r, стремящемся к нулю, то

$$qI_2(r,R) \to 0.$$

Норма функции $v_{r,R}$ в пространстве $S^1_{s,q}(X,d,\mu)$ оценивается через норму допустимой функции $g_{r,R}$ в пространстве Лоренца. При этом норма пространства Лоренца $\|g_{r,R}\|_{s,q}$ оценивается через функционал $\Lambda_{s,q}(g_{r,R})$. Поэтому при фиксированном R мы получаем

$$\|v_{r,R}\big|S^1_{s,q}(X,d,\mu)\| \le \|g_{r,R}\|_{s,q} \le C\Lambda_{s,q}(g_{r,R}) \to 0 \quad \text{при} \quad r\to 0. \tag{5}$$

Рассмотрим последовательность шаров $B_k = B(a,R_k)$, где $R_k = R/2^k$. Согласно соотношению (5) для всякого R_k можно найти такое положительное число r_k, что для функции $u_k = v_{r_k,R_k}$ будет выполняться оценка

$$\|u_k\big|S^1_{s,q}(X,d,\mu)\| < \frac{1}{2^k}.$$

Покажем, что функция

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

принадлежит пространству $M^1_{s,q}(X,d,\mu)$. Вполне очевидно, что

$$\|u\big|S^1_{s,q}(X,d,\mu)\| \le \sum_{k=1}^{\infty}\|u_k\big|S^1_{s,q}(X,d,\mu)\| < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 1.$$

При всех $k\in N$ функции u_k удовлетворяют оценке $0\le u_k(x)\le 1$. Учитывая, что носитель функции u_k лежит в шаре $\overline{B(a,R_k)}$, получаем

$$\|u\big|L_s(X)\| \le \sum_{k=1}^{\infty}\|u_k\big|L_s(X)\| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left[\mu(\overline{B(a,R_k)})\right]^{1/s} \le L_2^{1/s}R\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < \infty.$$

Таким образом $u\in M^1_{s,q}(X,d,\mu)$.

При этом каждая функция $u_k = 1$ на шаре $B(a,r_k)$, поэтому $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \infty$, т. е. функция u имеет неустранимый разрыв в точке a.

Следовательно, требование $q=1$ в теореме 3.1 ослабить нельзя.

Следствие 3.2. Поскольку функция $u\in M^1_{s,s}(X,d,\mu) = M^1_s(X,d,\mu)$, то пространство $M^1_s(X,d,\mu)$ содержит разрывные функции.

Было предположение, что при $q>1$ функции из пространства $M^1_{s,q}(X,d,\mu)$ могут оказаться γ-абсолютно непрерывными при некотором $\gamma>s$. Однако пример разрывной функции u показывают, что для пространств $M^1_{s,q}(X,d,\mu)$ при $q>1$ свойство абсолютной непрерывности теряется полность.

С одной стороны, для функций из пространства $M^1_{s,1}(X,d,\mu)$ при $\gamma > s$ свойство γ-абсолютной непрерывности, конечно же, выполняется, но не представляет особого интереса, поскольку оно слабее, чем свойство s-абсолютной непрерывности. С другой стороны, существуют функциональные пространства, функции которых обладают свойством γ-абсолютной непрерывности при некотором $\gamma > s$, и этот показатель нельзя улучшить.

IV. Гельдеровы классы функций соболевского типа

В пространствах $M^1_p(X,d,\mu)$ и $M^1_{p,q}(X,d,\mu)$ верхний индекс, равный единице, характеризует "гладкость" функций относительно метрики, и он связан с оценкой липшицевого типа (4). Несколько модифицируя оценку (4), можно определить гельдеровы классы функций соболевского типа.

При $\alpha \in (0,1)$ функцию g_α будем называть *α-допустимой* для для функции $u : X \to \overline{R}$, если существует такое множество $E \subset X$, что $\mu(E) = 0$ и неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leq [d(x,y)]^\alpha (g_\alpha(x) + g_\alpha(y)) \tag{5}$$

выполняется для всех точек $x, y \in X \setminus E$. Множество всех α-допустимых функций для функции u обозначим через $D_\alpha(u)$.

Принадлежность функции u соответствующим гельдеровым пространствам соболевского типа определим условиями:

$u \in S^\alpha_p(X,d,\mu)$, если существует α-допустимая функция $g_\alpha \in D_\alpha(u) \cap L_p(X)$;

$u \in M^\alpha_p(X,d,\mu)$, если $u \in L_p(X) \cap S^\alpha_p(X,d,\mu)$;

$u \in S^\alpha_{p,q}(X,d,\mu)$, если существует α-допустимая функция $g_\alpha \in D_\alpha(u) \cap L_{p,q}(X)$;

$u \in M^\alpha_{p,q}(X,d,\mu)$, если $u \in L_p(X) \cap S^\alpha_{p,q}(X,d,\mu)$.

При $\alpha \in (0,1)$ функция $d_\alpha(x,y) = [d(x,y)]^\alpha$ является метрикой. Легко заметить, что

$$M^\alpha_p(X,d,\mu) = M^1_p(X,d_\alpha,\mu), \qquad M^\alpha_{p,q}(X,d,\mu) = M^1_{p,q}(X,d_\alpha,\mu),$$

т. е. гельдоровы классы относительно исходной метрики, совпадают с классами функций, имеющих "единичную гладкость" относительно гельдеровой метрики d_α. Это позволяет использовать для гельдеровых классов функций полученные ранее результаты, для этого достаточно пересчитать показатель однородности метрического пространства относительно новой гельдеровой метрики.

Замечание. Сохраним обозначение $B(x,r)$ для шара в метрическом пространстве (X,d), а для шара относительно метрики d_α будем использовать обозначение $B_\alpha(x,r)$. Поскольку

$$B_\alpha(x,r) = B(x, r^{1/\alpha}),$$

то метрическое пространство (X,d_α) является s/α-однородным.

Учитывая замечание и теорему 3.1, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть (X,d) – локально s-регулярное метрическое пространство. Тогда для всякой функции $u \in M^\alpha_{s/\alpha,1}(X,d,\mu)$ существует эквивалентная ей s/α-абсолютно непрерывная функция.

При учёте s/α-однородности метрического пространства (X, d_α) утверждение теоремы 4.1 является непосредственным следствием теоремы 3.1 и совпадения пространств $M^\alpha_{s/\alpha,1}(X, d, \mu)$ и $M^1_{s/\alpha,1}(X, d_\alpha, \mu)$.

При $q > 1$ пространство $M^\alpha_{s/\alpha,q}(X, d, \mu)$ содержит разрывные функции.

Функциональные пространства $M^\alpha_p(X, d, \mu)$, быть может, не совсем привычны, но с одной стороны, они имеют простое определение, и полученные для них результаты являются весьма универсальными, с другой стороны, такие классы функций позволяют получать различные оценки для классических пространств Соболева и других классов функций с "обощенной гладкостью" в областях евклидова пространства R^n [6].

Пространства $M^\alpha_p(X, d, \mu)$ близки к пространствам Бесова $B^\alpha_{p,p}(X, d, \mu)$. Различные свойства пространств Бесова $B^\alpha_{p,q}(F, \mu)$ на однородных подмножествах F евклидова пространства R^n рассматривались в книге [7]. При $q = p$ для определения пространства $B^\alpha_{p,p}$ может быть использовано привычное условие в терминах конечности соответствующего интеграла.

На однородных метрических пространствах принадлежность функции u пространству Бесова $B^\alpha_{p,p}(X, d, \mu)$ при $\alpha \in (0, 1)$, $1 \le p < \infty$ определяется следующим образом: $u \in L_p(X)$ и

$$\int\limits_X \int\limits_X \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x, y)^{s+\alpha p}} d\mu(x) d\mu(y) < \infty. \tag{6}$$

Несложно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$B^\alpha_{p,p}(X, d, \mu) \subset M^\alpha_p(X, d, \mu) \subset B^{\alpha-\varepsilon}_{p,p}(X, d, \mu). \tag{7}$$

Доказательство этих вложений является естественной модификацией доказательства теоремы 4 работы [8], в которой рассматривались аналогичные вложения на границе области при $\alpha = 1 - 1/p$.

Пусть $u \in B^\alpha_{p,p}(X, d, \mu), x \in X$. Определим функцию g_α следующим образом:

$$g_\alpha(x) = \sup_{B_r} \left[\frac{|u(x) - u_{B_r}|}{r^\alpha} \right],$$

где B_r — произвольный шар радиуса $r \le \operatorname{diam} X$, содержащий точку x. Отметим, что $\mu(B_r) \ge L_1 r^s$.

Пусть $x, y \in X, \rho \le 2d(x, y)$ и шар B_ρ содержит точки x, y. Оценим приращение функции u

$$|u(x) - u(y)| \le |u(x) - u_{B\rho}| + |u(y) - u_{B\rho}|$$

$$\le 2^\alpha d(x, y)^\alpha \left(\frac{|u(x) - u_{B_\rho}|}{\rho^\alpha} + \frac{|u(y) - u_{B_\rho}|}{\rho^\alpha} \right) \le d(x, y)^\alpha \left(2^\alpha g_\alpha(x) + 2^\alpha g_\alpha(y) \right). \tag{8}$$

Таким образом функция $2^\alpha g_\alpha$ является α-допустимой для функции u, осталось показать, что функция g_α принадлежит пространству $L_p(X)$. Пусть значение r таково, что

$$g_\alpha(x) \le 2 \left[\frac{|u(x) - u_{B_r}|}{r^\alpha} \right].$$

Поскольку

$$\frac{u(x)-u_{B_r}}{r^\alpha} \le \frac{1}{r^\alpha} \fint_{B_r} |u(x)-u(y)|d\mu(y) \le \frac{1}{r^\alpha} \left(\fint_{B_r} |u(x)-u(y)|^p d\mu(y) \right)^{1/p}$$

$$\le C \left(\int_{B_r} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} d\mu(y) \right)^{1/p} \le C \left(\int_X \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} d\mu(y) \right)^{1/p}, \quad (9)$$

то принадлежность функции g_α пространству $L_p(X)$ является следствием условия (6). Таким образом

$$B^\alpha_{p,p}(X,d,\mu) \subset M^\alpha_p(X,d,\mu).$$

Второе вложение в (7) доказывается довольно просто. Пусть $x \in X$ и $r_k = 2^{-k}\operatorname{diam} X$. Рассмотрим последовательность шаров $B_k = B(x,r_k)$ ($B_0 = X$) и последовательность множеств $D_k = B_k \backslash B_{k+1}$, $\mu(D_k) \le \mu(B_k) \le L_2 r_k^s$. Заметим, что при $\varepsilon > 0$

$$\int_X \frac{d\mu(y)}{d(x,y)^{s-\varepsilon}} = \sum_{k=0}^\infty \int_{D_k} \frac{d\mu(y)}{d(x,y)^{s-\varepsilon}} \le C \sum_{k=0}^\infty r_k^{(\varepsilon-s)} \mu(D_k) \le C_1 \sum_{k=0}^\infty r_k^\varepsilon = C_\varepsilon < \infty.$$

Пусть $\beta < \alpha, (\alpha-\beta)p = \varepsilon$, $u \in M^\alpha_p(X,d,\mu)$ и функция g является α-допустимой для u. Тогда

$$\int_X \int_X \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\beta p}} d\mu(x)d\mu(y) \le C \int_X \int_X \frac{g^p_\alpha(x)+g^p_\alpha(y)}{d(x,y)^{s-(\alpha-\beta)p}} d\mu(x)d\mu(y)$$

$$= 2C \int_X \left(\int_X \frac{d\mu(y)}{d(x,y)^{s-(\alpha-\beta)p}} \right) g^p_\alpha(x) d\mu(x) = \tilde{C} \int_X g^p_\alpha(x) d\mu(x) < \infty.$$

Следовательно $M^\alpha_p(X,d,\mu) \subset B^\beta_{p,p}(X,d,\mu)$.

Из вложений (7) и (3) следует, что при $p > s/\alpha$

$$B^\alpha_{p,p}(X,d,\mu) \subset M^\alpha_p(X,d,\mu) \subset M^\alpha_{s/\alpha,1}(X,d,\mu).$$

Поэтому, согласно теореме 4.1, при $p > s/\alpha$ всякая функция u из пространства $B^\alpha_{p,p}(X,d,\mu)$ эквивалентна s/α-абсолютно непрерывной функции. С другой стороны, легко показать, что при любом $\varepsilon > 0$ пространство $B^{\alpha-\varepsilon}_{s/\alpha,s/\alpha}(X,d,\mu)$ содержит разрывные функции. Согласно следствию 3.2. пространство

$$M^1_{s/\alpha}(X,d_\alpha,\mu)$$

содержит разрывные функции, а согласно включению (7) мы имеем

$$M^1_{s/\alpha}(X,d_\alpha,\mu) = M^\alpha_{s/\alpha}(X,d,\mu) \subset B^{\alpha-\varepsilon}_{s/\alpha,s/\alpha}(X,d,\mu).$$

Метрический аналог пространств Бесова $B^\alpha_{p,q}$ при $\alpha \in (0,1)$ и $q \ne p$, следуя формулировке книги [7] для случая однородных подмножеств евклидова пространства R^n, определим условием: функция $u : X \to R$ принадлежит пространству $B^\alpha_{p,q}(X,d,\mu)$, если $u \in L_p(X)$ и

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k(s+\alpha p)}\iint\limits_{d(x,y)<2^{-k}}|u(x)-u(y)|^p d\mu(x)d\mu(y)\right)^{q/p}\right]^{1/q}<\infty$$

В первую очередь нас будет интересовать пространство $B^{\alpha}_{s/\alpha,1}(X,d,\mu)$ с нормой

$$\|u\big|B^{\alpha}_{s/\alpha,1}(X,d,\mu)\|=\|u\big|L_{s/\alpha}(X)\| +\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{2ks}\iint\limits_{d(x,y)<2^{-k}}|u(x)-u(y)|^{s/\alpha}d\mu(x)d\mu(y)\right)^{\alpha/s}.$$

Пусть функция $u\in B^{\alpha}_{s/\alpha,1}(X,d,\mu)$. Рассмотрим шар $B=B(x,R)\subset X$, где $R=2^{-m}$ для некоторого $m\in N$, и точку $z\in B$, являющуюся точкой Лебега функции u. Введем обозначение $D(z,r)=B\cap B(z,r)$. Условие локальной s-однородности обеспечивает при $r\le 2R$ двухстороннюю оценку меры множества $D(z,r)$

$$L_1^*r^s\le\mu(D(z,r))\le L_2^*r^s.$$

Положим $r_k=R/2^{k-1}$ и рассмотрим последовательность множеств $D_k=D(z,r_k)$. Отметим, что $D_0=B$. Поскольку множества D_k образуют регулярное семейство ($\mu(D_k)\sim r_k^s$), то

$$\lim_{k\to\infty}u_{D_k}=u(z).$$

Получим оценку отклонения значения функции u в точке z от среднего значения по шару B

$$|u(z)-u_B|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}(u_{D_k}-u_{D_{k+1}})\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}\left|u_{D_k}-\frac{1}{\mu(D_{k+1})}\int\limits_{D_{k+1}}u(x)\,d\mu\right|$$

$$\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu(D_{k+1})}\int\limits_{D_{k+1}}|u(x)-u_{D_k}|\,d\mu\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu(D_k)}{\mu(D_{k+1})}\cdot\frac{1}{\mu(D_k)}\int\limits_{D_k}|u(x)-u_{D_k}|\,d\mu$$

$$\le C_1\sum_{k=0}^{\infty}\fint\limits_{D_k}|u(x)-u_{D_k}|\,d\mu. \tag{10}$$

Учитывая,что $r_k=2^{-(k+m)}$, продолжим оценку

$$\fint\limits_{D_k}|u(x)-u_{D_k}|\,d\mu\le\fint\limits_{D_k}\fint\limits_{D_k}|u(x)-u(y)|\,d\mu(x)d\mu(y)$$

$$\le\left(\fint\limits_{D_k}\fint\limits_{D_k}|u(x)-u(y)|^{s/\alpha}\,d\mu(x)d\mu(y)\right)^{\alpha/s}$$

$$\leq C_2 \left(2^{2s(k+m)} \iint\limits_{d(x,y)<2^{-(k+m)}} |u(x)-u(y)|^{s/\alpha}\, d\mu(x) d\mu(y) \right)^{\alpha/s}.$$

Используя обозначение $k+m=n$, получаем

$$|u(z)-u_B| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{2s(k+m)} \iint\limits_{d(x,y)<2^{-(k+m)}} |u(x)-u(y)|^{s/\alpha} d\mu(x) d\mu(y) \right)^{\alpha/s}$$

$$= C \sum_{n=m}^{\infty} \left(2^{2sn} \iint\limits_{d(x,y)<2^{-n}} |u(x)-u(y)|^{s/\alpha} d\mu(x) d\mu(y) \right)^{\alpha/s} = \Delta_m.$$

Эта оценка зависит лишь от величины радиуса шара B и не зависит от выбора точки $z \in B$. Поскольку ряд сходится, то его остаток стремится к нулю, т. е. $\Delta_m \to 0$ при $m \to \infty$. Следовательно для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой номер m_ε, что $\Delta_{m_\varepsilon} < \varepsilon/2$

Обозначим через X_L множество точек Лебега функции u, $\mu(X \setminus X_L) = 0$. Если $x, y \in X_L$ и $d(x,y) < 2^{-m_\varepsilon}$, то точки x, y лежат в шаре $B_\varepsilon = B(x, 2^{-m_\varepsilon})$ и выполняется неравенство

$$|u(x)-u(y)| \leq |u(x)-u_{B_\varepsilon}| + |u(y)-u_{B_\varepsilon}| \leq 2\Delta_{m_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Следовательно функция u является равномерно непрерывной на множестве X_L. В силу однородности метрического пространства, оно не содержит изолированных точек. Поскольку $X = \overline{X_L}$, то равномерно непрерывная на X_L функция u может быть доопределена по непрерывности в точках множества $X \setminus X_L$.

Таким образом мы получаем следующее утверждение.

Лемма 4.2. Класс эквивалентности всякой функции $u \in B^\alpha_{s/\alpha,1}(X,d,\mu)$ содержит непрерывную функцию.

Условия абсолютной непрерывности удаётся получить для функциональных классов типа пространств Бесова, связанных с пространствами Лоренца.

Функции $u : X \to R$ сопоставим функцию

$$h_{u,\alpha,p}(x) = \left(\int\limits_X \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} d\mu(y) \right)^{1/p}.$$

Согласно условию (6) функция u принадлежит пространству Бесова $B^\alpha_{p,p}(X,d,\mu)$ тогда и только тогда, когда функция $h_{u,\alpha,p}$ принадлежит пространству Лебега $L_p(X)$.

Рассмотрим банахово функциональное пространство $\mathcal{F}(X)$ и связанный с ним новый класс функций, полагая

$$\mathcal{B}^\alpha_{p,\mathcal{F}}(X,d,\mu) = \{u \in L_p(X) \big| h_{u,\alpha,p} \in \mathcal{F}(X)\}.$$

Функционал

$$\|u \big| \mathcal{B}^\alpha_{p,\mathcal{F}}\| = \|u \big| L_p(X)\| + \|h_{u,\alpha,p} \big| \mathcal{F}(X)\|$$

является нормой в $\mathcal{B}^\alpha_{p,\mathcal{F}}$.

В случае, когда $\mathcal{F}(X) = L_q(X)$, вместо $\mathcal{B}^{\alpha}_{p,L_q}$ мы будем использовать обозначение $\mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}$. В случае, когда $\mathcal{F}(X)$ является пространством Лоренца $L_{r,q}(X)$, вместо $\mathcal{B}^{\alpha}_{p,L_{r,q}}$ мы будем использовать обозначение $\mathcal{B}^{\alpha}_{p,(r,q)}$.

Пусть

$$v(x,y) = \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x,y)^{\alpha+s/p}},$$

тогда

$$\|u\big|\mathcal{B}^{\alpha}_{p,(r,q)}\| = \|u\big|L_p\| + \|\,\|v(x,y)\big|L_p\|\,\big|L_{r,q}\|.$$

Поскольку пространства L_p и $L_{r,q}$ банаховы, то и пространство $\mathcal{B}^{\alpha}_{p,(r,q)}$ является банаховым.

При $q = p$ пространство $\mathcal{B}^{\alpha}_{p,p}(X,d,\mu)$ совпадает с пространством Бесова $B^{\alpha}_{p,p}(X,d,\mu)$. При $q \neq p$ пространства $B^{\alpha}_{p,q}$ и $\mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}$ оказываются различными. Поскольку мера множества X конечна, то при $q > p$ пространство $L_q(X)$ вложено в $L_p(X)$ и, как следствие, $\mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \subset \mathcal{B}^{\alpha}_{p,p}(X,d,\mu)$. При этом для пространств Бесова выполняется обратное вложение

$$B^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \supset B^{\alpha}_{p,p}(X,d,\mu).$$

При $q < p$ выполняются вложения

$$B^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \subset B^{\alpha}_{p,p}(X,d,\mu) = \mathcal{B}^{\alpha}_{p,p}(X,d,\mu) \subset \mathcal{B}^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu).$$

Если функция $u \in \mathcal{B}^{\alpha}_{p,(p,q)}(X,d,\mu)$, то $h_{u,\alpha,p} \in L_{p,q}(X,d,\mu)$, а из оценок (8) и (9) следует, что функция $h_{u,\alpha,p}$ является α-допустимой для функции u. Следовательно

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{p,(p,q)}(X,d,\mu) \subset M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu).$$

Теорема 4.3. Класс эквивалентности всякой функции $u \in \mathcal{B}^{\alpha}_{s/\alpha,(s/\alpha,1)}(X,d,\mu)$ содержит s/α-абсолютно непрерывную функцию.

Доказательство является непосредственным следствием теоремы 4.1 и вложения

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{s/\alpha,(s/\alpha,1)}(X,d,\mu) \subset M^{\alpha}_{s/\alpha,1}(X,d,\mu).$$

Пусть $0 < \beta < \alpha, 1 < \lambda < \min(p,q), \lambda(\alpha-\beta) = \varepsilon, 1 \leq \omega < \infty$. Покажем, что

$$M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu) \subset \mathcal{B}^{\beta}_{\lambda,(p,q)}(X,d,\mu).$$

Если функция $u \in M^{\alpha}_{p,q}(X,d,\mu)$, то α-допустимая функция $g_\alpha \in L_{p,q}(X)$. Получим оценку для функции $h_{u,\beta,\lambda}$. Мы имеем

$$\begin{aligned} h_{u,\beta,\lambda}(x) &= \left(\int\limits_X \frac{|u(x)-u(y)|^\lambda}{d(x,y)^{s+\beta\lambda}} d\mu(y)\right)^{1/\lambda} \\ &\leq \left(\int\limits_X \frac{d(x,y)^{\alpha\lambda}(g_\alpha(x)+g_\alpha(y))^\lambda}{d(x,y)^{s+\beta\lambda}} d\mu(y)\right)^{1/\lambda} \\ &\leq g_\alpha(x)\left(\int\limits_X \frac{d\mu(y)}{d(x,y)^{s-\varepsilon}}\right)^{1/\lambda} + \left(\int\limits_X \frac{g_\alpha^\lambda(y)\,d\mu(y)}{d(x,y)^{s-\varepsilon}}\right)^{1/\lambda} \\ &\leq Cg_\alpha(x) + \left(\int\limits_X \frac{g_\alpha^\lambda(y)\,d\mu(y)}{d(x,y)^{s-\varepsilon}}\right)^{1/\lambda}. \end{aligned} \tag{11}$$

Для оценки второго слагаемого нам потребуется свойство пространств Лоренца, связанное с возведением функции в положительную степень. Пусть $f \in L_{p,q}(X), 0 < \gamma < \min(p,q)$ и $h = |f|^\gamma$. Сравним функции распределения функций f и h

$$\omega_h(\tau) = \mu(\{x \in X \mid \ |f(x)|^\gamma > \tau\}) = \mu(\{x \in X \mid \ |f(x)| > \tau^{1/\gamma}\}) = \omega_f(\tau^{1/\gamma}).$$

Используя равенство (2), выразим функционал $\Lambda_{p/\gamma,q/\gamma}(h)$ через функционал $\Lambda_{p,q}(f)$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_{p/\gamma,q/\gamma}(h) &= \left(q/\gamma\int\limits_0^\infty \tau^{-1+q/\gamma}(\omega_h(\tau))^{q/p}d\tau\right)^{\gamma/q} \\ &= \left(q/\lambda\int\limits_0^\infty \tau^{-1+q/\gamma}(\omega_f(\tau^{1/\gamma}))^{q/p}d\tau\right)^{\gamma/q} \\ = \left(q/\gamma\int\limits_0^\infty t^{q-\gamma}(\omega_f(t))^{q/p}\lambda t^{\lambda-1}dt\right)^{\gamma/q} &= \left(q\int\limits_0^\infty t^{q-1}(\omega_f(t))^{q/p}dt\right)^{\gamma/q} = \Lambda^\gamma_{p,q}(f) < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно функция h принадлежит пространству Лоренца $L_{p/\gamma,q/\gamma}(X)$.

Теперь оценим второе слагаемое в (11). Обозначим диаметр X символом d и рассмотрим последовательность шаров $B_k = B(x,r_k)$, где $r_k = 2^{-k}d$. Положим

$D_k = B_k \setminus B_{k+1}$, тогда

$$\left(\int_X \frac{g_\alpha^\lambda(y)\,d\mu(y)}{d(x,y)^{s-\varepsilon}}\right)^{1/\lambda} = \left(\sum_{k=0}^\infty \int_{D_k} \frac{g_\alpha^\lambda(y)\,d\mu(y)}{d(x,y)^{s-\varepsilon}}\right)^{1/\lambda}$$
$$\le \left(\sum_{k=0}^\infty Cr_k^{\varepsilon-s}\int_{D_k} g_\alpha^\lambda(y)\,d\mu(y)\right)^{1/\lambda}$$
$$\le \left(\sum_{k=0}^\infty C_1 r_k^{\varepsilon}\fint_{B_k} g_\alpha^\lambda(y)\,d\mu(y)\right)^{1/\lambda} \le C_2\, d^{\varepsilon/\lambda}\,(\mathcal{M}(g_\alpha^\lambda))^{1/\lambda}.$$

Поскольку $p/\lambda > 1$, то максимальный оператор ограничен в пространстве Лоренца $L_{p/\lambda,q/\lambda}(X)$, поэтому $(\mathcal{M}(g_\alpha^\lambda))^{1/\lambda} \in L_{p,q}(X)$. Согласно оценке (11) $h_{u,\beta,\lambda} \in L_{p,q}(X)$, а функция u принадлежит пространству $\mathcal{B}^\beta_{\lambda,(p,q)}(X,d,\mu)$.

V. Достаточное условие γ-абсолютной непрерывности

Будем говорить, что функция $u : X \to R$ удовлетворяет (γ, B)-условию с весом $h \in L_1(X)$, если для всякого шара $B \subset X$ выполняется оценка

$$(\operatorname*{osc}_B u)^\gamma \le \int_B h d\mu.$$

Вполне очевидным следствием абсолютной непрерывности интеграла как функции множеств является γ-абсолютная непрерывность функции u, удовлетворяющей (γ, B)-условию.

Нашей целью является нахождение весовых функций для классов соболевского типа, связанных с пространствами Лоренца.

В работе [1] получен специального вида критерий принадлежности функции соответствующему пространству Лоренца.

Лемма 5.1 ([1]).

Для неотрицательной функции f следующие условия эквивалентны:

1. $f \in L_{p,q}(X)$;
2. существует такая положительная невозрастающая на $(0,\infty)$ функция φ, что

$$\int_0^\infty s^{q-1}\varphi^{q/p}(s)ds < \infty, \quad \int_{f>0} f^q(x)[\varphi(f(x))]^{\frac{q}{p}-1}d\mu < \infty.$$

Нам потребуется ещё одна простая оценка: для всякого шара $B(x,R) \subset X$ выполняется

$$\int_{B(x,R)} \frac{d\mu(y)}{d(x,y)^{s-\alpha}} \le C_0\, R^\alpha. \qquad (12)$$

Действительно, если $r_k = R/2^k$ и $B_k = B(x, r_k)$, то, учитывая оценку меры шара через радиус, получаем

$$\int\limits_{B(x,R)} \frac{d\mu(y)}{d(x,y)^{s-\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{B_k \setminus B_{k+1}} \frac{d\mu(y)}{d(x,y)^{s-\alpha}} \le \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{B_k \setminus B_{k+1}} \frac{d\mu(y)}{r_{k+1}^{s-\alpha}}$$

$$\le C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(B_k)}{r_{k+1}^{s-\alpha}} \le C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_2(R/2^k)^s}{(R/2^{k+1})^{s-\alpha}} \le C_2 R^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} = C_0\, R^\alpha.$$

Следующее утверждение является метрическим аналогом интегрального неравенства, доказанного в евклидовом случае в теореме 3.1 [1] для показателя $\alpha = 1$.

Лемма 5.2. Если $\alpha \in (0,1]$, неотрицательная функция $g \in L_{s/\alpha,1}(X)$ и невозрастающая на $(0,\infty)$ положительная функция φ удовлетворяет пункту 2 леммы 5.1, то для всех точек $x \in X$ и всех шаров $B \subset X$ выполняется оценка

$$\left(\int\limits_B \frac{g(y)d\mu(y)}{d(x,y)^{s-\alpha}}\right)^{s/\alpha} \le (1+C_0)^{s/\alpha} \left(\int\limits_0^{\infty} \varphi^{\alpha/s}(t)dt\right)^{\frac{s}{\alpha}-1} \int\limits_B g(y)[\varphi(g(y))]^{\frac{\alpha}{s}-1} d\mu(y).$$

Доказательство. Можно считать, что интеграл в левой части больше нуля, в противном случае неравенство является очевидным.

Фиксируем точку $x \in X$ и шар $B \subset X$. Пусть

$$I_1 = \int\limits_B g(y)[\varphi(g(y))]^{\frac{\alpha}{s}-1} d\mu(y)$$

и

$$I_2 = \int\limits_0^{\infty} \varphi^{\alpha/s}(t)dt.$$

Выберем такое положительное число $h < \infty$, что

$$h \le \int\limits_B \frac{g(y)d\mu(y)}{d(x,y)^{s-\alpha}}$$

и положим

$$\lambda = \frac{1}{h}\left(\frac{I_1}{I_2}\right)^{1/s}.$$

Рассмотрим множество $E = \{(y,t) \in B \times R \big| 0 < t < g(y)\}$. Заметим, что

$$\int\limits_B \frac{g(y)d\mu(y)}{d(x,y)^{s-\alpha}} = \iint\limits_E d(x,y)^{\alpha-s} dt d\mu(y).$$

Разобьём множество E на два подмножества

$$E_1 = \{(y,t) \in B \times R \big| d(x,y) \ge h\lambda[\varphi(t)]^{1/s}\} \quad \text{и} \quad E_2 = E \setminus E_1.$$

Оценим интеграл по множеству E_1. В силу невозрастания функции φ, на E_1 выполняется неравенство

$$d(x,y) \ge h\lambda[\varphi(t)]^{1/s} \ge h\lambda[\varphi(g(y))]^{1/s}.$$

Поэтому

$$\iint\limits_{E_1} d(x,y)^{\alpha-s}dtd\mu(y)$$
$$\leq h^{\alpha-s}\lambda^{\alpha-s}\int\limits_{B} g(y)[\varphi(g(y))]^{\frac{\alpha}{s}-1}d\mu(y) = h^{\alpha-s}\lambda^{\alpha-s}I_1 = I_1^{\alpha/s}I_2^{1-\frac{\alpha}{s}}. \quad (13)$$

Введем обозначение $r(t) = h\lambda[\varphi(g(y))]^{1/s}$. Точка (y,t) принадлежит множеству E_2, если $y \in B(x,r(t))$. Учитывая оценку (12), получаем

$$\iint\limits_{E_2} d(x,y)^{\alpha-s}dtd\mu(y) \leq \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{B(x,r(t))} d(x,y)^{\alpha-s}d\mu(y)\right) dt \leq C_0\int\limits_0^\infty [r(t)]^\alpha dt$$
$$= C_0h^\alpha\lambda^\alpha\int\limits_0^\infty[\varphi(t)]^{\alpha/s}dt = C_0h^\alpha\lambda^\alpha I_2 = C_0I_1^{\alpha/s}I_2^{1-\frac{\alpha}{s}}. \quad (14)$$

Складывая оценки (13) и (14), получаем

$$\int\limits_B \frac{g(y)d\mu(y)}{d(x,y)^{s-\alpha}} \leq (1+C_0)\left(\int\limits_0^\infty \varphi^{\alpha/s}(t)dt\right)^{1-\frac{\alpha}{s}}\left(\int\limits_B g(y)[\varphi(g(y))]^{\frac{\alpha}{s}-1}d\mu(y)\right)^{\alpha/s}.$$

Для завершения доказательства остаётся возвести последнее неравенство в степень s/α. □

Лемма 5.3. Пусть $\alpha \in (0,1]$, а функция $g \in L_{s/\alpha,1}(X)$. Если функция $u : X \to R$ такова, что для всякого шара $B(a,r) \subset X$ и для всякой точки $z \in B(a,r)$, являющейся точкой Лебега функции u, выполняется оценка

$$|u(z) - u_{B(a,r)}| \leq C\int\limits_{B(a,r)} \frac{g(y)d\mu(y)}{d(z,y)^{s-\alpha}},$$

то функция u эквивалентна s/α-абсолютно непрерывной функции

$$\tilde{u}(x) = \lim_{\rho\to 0} \fint\limits_{B(x,\rho)} u\,d\mu.$$

Доказательство. Напомним, что символом X_L обозначено множество точек Лебега функции u. Пусть $z_1, z_2 \in X_L \cap B(a,r)$, тогда, используя леммы 5.1 и 5.2, получаем

$$|u(z_1) - u(z_2)| \leq |u(z_1) - u_{B(a,r)}| + |u(z_1) - u_{B(a,r)}|$$
$$\leq C\left(\int\limits_{B(a,r)} \frac{g(y)d\mu(y)}{d(z_1,y)^{s-\alpha}} + \int\limits_{B(a,r)} \frac{g(y)d\mu(y)}{d(z_2,y)^{s-\alpha}}\right)$$
$$\leq C_1\left(\int\limits_{B(a,r)} g(y)[\varphi(g(y))]^{\frac{\alpha}{s}-1}d\mu(y)\right)^{\alpha/s}, \quad (15)$$

где постоянная C_1 не зависит ни от выбора шара $B(a,r) \subset X$ ни от выбора точек $z_1, z_2 \in X_L \cap B(a,r)$.

Поскольку $\mu(B(x,r)) \sim r^s \to 0$ при $r \to 0$, то следствием абсолютной непрерывности интеграла является равномерная непрерывность функции u на множестве X_L. Поскольку $X = \overline{X_L}$, то равномерно непрерывная на X_L функция u может быть доопределена по непрерывности в точках множества $X \setminus X_L$. Полученная в результате непрерывная функция $\tilde{u}$ всюду в X совпадает с пределом средних значения, т. е.

$$\tilde{u}(x) = \lim_{\rho \to 0} \fint_{B(x,\rho)} \tilde{u}\, d\mu = \lim_{\rho \to 0} \fint_{B(x,\rho)} u\, d\mu.$$

.

Из оценки (15) следует, что

$$\left(\operatorname*{osc}_{B(a,r)} \tilde{u} \right)^{s/\alpha} \leq C_2 \int_{B(a,r)} g(y)[\varphi(g(y))]^{\frac{\alpha}{s}-1} d\mu(y).$$

Следовательно функция $\tilde{u}$ удовлетворяет $(s/\alpha, B)$-условию и является s/α-абсолютно непрерывной. $\square$

Теперь мы можем получить новое прямое доказательство s/α-абсолютной непрерывности функций из пространств $M^{\alpha}_{s/\alpha,1}(X,d,\mu)$ при $\alpha \in (0,1]$.

Рассмотрим функцию $u \in M^{\alpha}_{s/\alpha,1}(X,d,\mu)$, шар $B = B(x,R) \subset X$ $(R \leq \operatorname{diam} X)$ и точку $z \in B$, являющуюся точкой Лебега функции u. Введем обозначение $D(z,r) = B \cap B(z,r)$. Условие локальной s-однородности обеспечивает при $r \leq 2R$ двухстороннюю оценку меры множества $D(z,r)$

$$L_1 r^s \leq \mu(D(z,r)) \leq L_2 r^s.$$

Если функция $u \in M^{\alpha}_{s/\alpha,1}(X,d,\mu)$, то, интегрируя дважды по множеству $D(z,r)$ неравенство (5) и учитывая ограниченность максимального оператора в пространствах Лебега и Лоренца при $p > 1$, получаем нужную нам форму неравенства Пуанкаре

$$\fint_{D(z,r)} |u(x) - u_{D(z,r)}|\, d\mu \leq r^{\alpha} \fint_{D(z,r)} h(x)\, d\mu, \tag{16}$$

где $h(x) = C\,(g(x) + \mathcal{M}(g)(x)) \in L_{s/\alpha,1}(X)$.

Положим $r_k = R/2^{k-1}$ и рассмотрим последовательность множеств $D_k = D(z, r_k)$. Отметим, что $D_0 = B$. Поскольку множества D_k образуют регулярное семейство ($\mu(D_k) \sim r_k^s$), то

$$\lim_{k \to \infty} u_{D_k} = u(z).$$

Используя оценку (10) и неравенство Пуанкаре (16), получим оценку отклонения значения функции u в точке z от среднего значения по шару B

$$|u(z) - u_B| = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \fint_{D_k} |u(x) - u_{D_k}|\, d\,\mu$$

$$\leq C_2 \sum_{k=0}^{\infty} r_k^{\alpha} \fint_{D_k} h(x)\, d\,\mu \leq C_3 \sum_{k=0}^{\infty} r_k^{\alpha-s} \int_{D_k} h(x)\, d\,\mu. \quad (17)$$

Поскольку для меры множества D_k имеется двухсторонняя оценка через r_k^s, то при $0 < t < \mu(D_k)$ выполняется неравенство

$$r_k^{\alpha-s} \leq C_4 t^{\frac{\alpha}{s}-1}.$$

Пусть $h_k(x) = (h \cdot \chi_{D_k})(x)$. Очевидно, что $h_k^*(t) \leq h^*(t)$. Учитывая, что функция h принадлежит пространству Лоренца $L_{s/\alpha,1}(X)$ и $\mu(D_k) \to 0$ при $k \to \infty$, получаем

$$\lim_{k\to\infty} {r_m}^{\alpha-s} \int_{D_k} h(x)\, d\,\mu = \lim_{k\to\infty} {r_m}^{\alpha-s} \int_0^{\mu(D_k)} h_k^*(t)\, d\,t \leq \lim_{k\to\infty} \int_0^{\mu(D_k)} t^{\alpha/s} h^*(t)\, \frac{d\,t}{t} = 0.$$

Введем обозначение

$$a_k = \int_{D_k} h(x)\, d\,\mu.$$

Если $b_k = r_k^{\alpha-s}$, то

$$S_m = \sum_{k=0}^{m} b_k \leq C_5\ r_m^{\alpha-s}.$$

Используя преобразование Абеля для сумм, продолжим оценку (17)

$$|u(z) - u_B| = C_3 \sum_{k=0}^{\infty} r_k^{\alpha-s} \int_{D_k} h(x)\, d\,\mu = C_3 \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k = C_3 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot b_k$$

$$= C_3 \sum_{m=0}^{\infty} S_m \cdot (a_m - a_{m+1}) \leq C_6 \sum_{m=0}^{\infty} r_m^{\alpha-s} \int_{D_m \setminus D_{m+1}} h(x)\, d\,\mu$$

$$\leq C_6 \sum_{m=0}^{\infty} \int_{D_m \setminus D_{m+1}} \frac{h(x)}{d(x,z)^{s-\alpha}}\, d\,\mu(x) = C_6 \int_B \frac{h(x)}{d(x,z)^{s-\alpha}}\, d\,\mu(x).$$

Остаётся лишь сослаться на лемму 5.3.

Таким образом мы получаем следующее утверждение:

Теорема 5.4. Пусть $\alpha \in (0,1]$. Тогда для всякой функции u из пространства $M^{\alpha}_{s/\alpha,1}(X,d,\mu)$ существует эквивалентная ей s/α-абсолютно непрерывная функция $\tilde{u}$, определяемая равенством

$$\tilde{u}(x) = \lim_{\rho\to 0} \fint_{B(x,\rho)} u\, d\mu.$$

.

References

[1] J. Kauhanen, P. Koskela, J. Maly, *On function with derivatives in a Lorentz space*, Manuscr. Math., **100**:1 (1999), 87–101. Zbl 0976.26004

[2] A.S. Romanov, *Absolute continuity of the Sobolev type functions on metric spaces*, Sib. Math. J., **49**:5 (2008), 911–918. Zbl 1224.46067

[3] E.M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, Princeton, 1971. Zbl 0232.42007

[4] P. Hajłasz, *Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces*, Potential Anal., **5**:4 (1996), 403–415. Zbl 0859.46022

[5] P. Hajłasz, J. Kinnunen, *Hölder quasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces*, Rev. Mat. Iberoam., **14**:3 (1998), 601–622. Zbl 1155.46306

[6] A.S. Romanov, *Traces of functions of generalized Sobolev classes*, Sib. Math. J., **48**:4 (2007), 678–693. Zbl 1164.46326

[7] A. Jonsson, H. Wallin, *Function spaces on subsets of* R^n, Math. Rep., **2**:1, Harwood Academic Publishers, London, 1984. Zbl 0875.46003

[8] P. Hajłasz, O. Martio, *Traces of Sobolev functions on fractal type sets and characterization of extension domains*, J. Funct. Anal., **143**:1 (1997), 221–246. Zbl 0877.46025

Romanov Alexandr Sergeevich,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: asrom@math.nsc.ru