S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 19, №2, стр. 698–707 (2022) УДК 515.162.3
DOI 10.33048/semi.2022.19.058 MSC 57K31

ГОМОЛОГИЧЕСКИ ТРИВИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ ИНВАРИАНТА ТУРАЕВА – ВИРО ПОРЯДКА 7

Ф. Г. КОРАБЛЁВ

Abstract. Homologically trivial part of any Turaev – Viro invariant odd order r is a Turaev – Viro type invariant order $\frac{r+1}{2}$. In this paper we find an explicit formulas for this Turaev – Viro type invariant, corresponding to the invariant order $r = 7$. Our formulas express $6j$-symbols and color weights in the term of γ, where γ is a root of the polynomial $\mathcal{T}(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$.

Keywords: Turaev – Viro invariant, quantum number, $6j$-symbol.

1. Введение

Инварианты Тураева – Виро для трёхмерных многообразий были предложены В. Туревам и О. Виро в 1992 году в работе [1]. Они построили бесконечное семейство инвариантов, каждый из которых определяется выбором своего порядка — натурального числа $r \geqslant 2$. Обозначим через TV_r — инвариант Тураева – Виро порядка r.

Для каждого $r \geqslant 2$ определим множество $C_r = \{0, 1, \ldots, r-2\}$. Это множество C_r удобно воспринимать как множество цветов, которыми раскрашиваются клетки специальных спайнов трёхмерных многообразий при вычислении значений инварианта TV_r. Впрочем, для целей настоящей статьи, топологический смысл элементов этого множества не важен. Один из способов определить инвариант TV_r состоит в задании значений w_i для всех $i \in C_r$. Каждое из чисел w_i в общем случае является комплексным числом и называется весом цвета i. Помимо этого должны быть заданы значения так называемых $6j$-символов,

---

Korablev, Ph.G., Homologically trivial part of the Turaev – Viro invariant order 7.

Работа поддержана РФФИ (грант 20-01-00127).

Поступила 15 июля 2022 г., опубликована 6 сентября 2022 г.

которые обозначаются $\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix}$, для всех $i, j, k, l, m, n \in C_r$. Каждый $6j$-символ в общем случае также является комплексным числом.

Значения как всех $6j$-символов, так и весов цветов, задающих инвариант TV_r, не произвольны. Они описываются формулами, которые приведены, например, в книгах [2, параграф 8.1.4] и [3, параграф XII.8.5], статье [1, параграф 7] и ниже во втором параграфе. Центральную роль в этих формулах играют квантовые целые числа и квантовые факториалы. Пусть q — такой корень из 1-цы степени $2r$, что q^2 является примитивным корнем из 1-цы степени r. Обозначим

$$[n]_r = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

Величина $[n]_r$ называется квантовым целым числом. Это число всегда является действительным, однако его значение зависит от выбора корня q. Очевидно, $[1]_r = 1$ и $[r]_r = 0$. Квантовым факториалом называется величина

$$[n]_r! = [n]_r \cdot [n-1]_r \cdot \ldots \cdot [1]_r.$$

Существуют инварианты трёхмерных многообразий, которые задаются другими значениями $6j$-символов и весов цветов. В соответствии с терминологией, предложенной в книге [2, замечание 8.1.20], такие инварианты называются инвариантами типа Тураева – Виро. Чтобы построить инвариант типа Тураева – Виро порядка r, достаточно подобрать такие значения весов цветов w_i и $6j$-символов, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = \sum_{z \in C_r} w_z \cdot \begin{vmatrix} i & m & n \\ z & n' & m' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} j & l & n \\ z & n' & m' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k & l & m \\ z & m' & l' \end{vmatrix}$$

для всех $i, j, k, l, m, n, l', m', n' \in C_r$.

Примером нетривиального инварианта типа Тураева – Виро порядка 3 является ε-инвариант (см. [4]). Он задаётся следующим набором значений весов цветов и $6j$-символов (см. [2, параграф 8.1.2]): $w_0 = 1$, $w_1 = \varepsilon$ и

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\varepsilon},$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\varepsilon^2},$$

где ε — корень уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Все остальные значения $6j$-символов равны нулю.

Хорошо известно, что каждый инвариант Тураева – Виро TV_r порядка r является суммой трёх инвариантов $TV_{r,0}$, $TV_{r,1}$ и $TV_{r,2}$ (см. [5]). Инвариант $TV_{r,0}$ называется гомологически тривиальной частью инварианта Тураева – Виро. При нечётных r он является инвариантом типа Тураева – Виро порядка $\frac{r+1}{2}$. Обозначим его $TH_{\frac{r+1}{2}}$.

Обозначим веса цветов, задающих инвариант $TH_{\frac{r+1}{2}}$, через w'_i, $i \in C_{\frac{r+1}{2}} = \{0, 1, \ldots, \frac{r-3}{2}\}$, а $6j$-символы через $\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix}'$, $i, j, k, l, m, n \in C_{\frac{r+1}{2}}$. Существует простой способ, позволяющий найти значения весов цветов и $6j$-символов, задающих инвариант $TH_{\frac{r+1}{2}}$, зная веса цветов и $6j$-символов, задающих инвариант TV_r:

$$w_i' = w_{2i} \text{ для всех } i \in C_{\frac{r+1}{2}},$$
$$\left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ l & m & n \end{array}\right|' = \left|\begin{array}{ccc} 2i & 2j & 2k \\ 2l & 2m & 2n \end{array}\right| \text{ для всех } i,j,k,l,m,n \in C_{\frac{r+1}{2}}.$$

Можно доказать, что ε-инвариант совпадает с инвариантом TH_3, то есть он является гомологически тривиальной часть инварианта Тураева – Виро порядка 5 (см. [2, теорема 8.1.26] и [4]).

Целью настоящей статьи является отыскание формул, задающих инвариант TH_4, то есть гомологически тривиальную часть инварианта TV_7, подобных формулам, задающих ε-инвариант. Основной результат статьи сформулирован в теореме 5. В ней значения весов цветов и $6j$-символов, задающих инвариант TH_4, выражены через корень γ уравнения $x^3-2x^2-x+1=0$. Это описание полностью аналогично описанию ε-инварианта через корень ε уравнения $x^2-x-1=0$. Поэтому инвариант TH_4 называется γ-инвариантом.

Структура статьи такова. Во втором параграфе выписываются явные формулы для вычисления весов цветов и $6j$-символов, задающих инвариант $TV_{7,0}$. Эти формулы выписаны в терминах квантовых целых чисел $[n]_7$. Третий параграф посвящён простейшим свойствам многочлена $\mathcal{T}(x)=x^3-2x^2-x+1$, играющего центральную роль в построении γ-инварианта. В четвёртом параграфе доказывается основная теорема 5. В пятом параграфе вычисляются многочлены, через корни которых, возможно, выражаются гомологически тривиальные части инвариантов Тураева – Виро нечётных порядков $5 \leqslant r \leqslant 21$.

2. Инвариант Тураева – Виро порядка 7

Как и раньше, обозначим $C_r=\{0,\dots,r-2\}$. В книгах [2, параграф 8.1.4], [3, параграф XII.8.5] и статье [1, параграф 7] даны явные формулы для вычисления значений весов w_i и $6j$-символов $\left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ l & m & n \end{array}\right|$, $i,j,k,l,m,n \in C_r$, задающих инвариант Тураева – Виро порядка $r \geqslant 2$. Приведём эти формулы.

$$w_i = (-1)^i [i+1]_r \text{ для всех } i \in C_r.$$

Будем говорить, что тройка $(x,y,z) \in C_r^3$ допустима, если

(1) $x+y \geqslant z$, $y+z \geqslant x$ и $z+x \geqslant y$;
(2) $x+y+z$ чётно;
(3) $x+y+z \leqslant 2 \cdot r - 4$.

Значение $6j$-символа $\left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ l & m & n \end{array}\right|$ равно 0, если хотя бы одна из троек (i,j,k), (k,l,m), (m,n,i), (j,l,n) не является допустимой. Значения остальных $6j$-символов вычисляются следующим образом:

$$\left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ l & m & n \end{array}\right| = \sum_{z=\alpha}^{\beta} \frac{(-1)^z \cdot [z+1]_r! \cdot A(i,j,k,l,m,n)}{B\left(z, \begin{pmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{pmatrix}\right) \cdot C\left(z, \begin{pmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{pmatrix}\right)},$$

где

$$A(i,j,k,l,m,n) = \boldsymbol{i}^{i+j+k+l+m+n} \cdot \Delta(i,j,k) \cdot \Delta(i,m,n) \cdot \Delta(j,l,n) \cdot \Delta(k,l,m),$$
$$\boldsymbol{i} \in \mathbb{C} \text{ — мнимая единица},$$
$$B\left(z, \begin{pmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{pmatrix}\right) = [z-\widehat{i}-\widehat{j}-\widehat{k}]_r! \cdot [z-\widehat{i}-\widehat{m}-\widehat{n}]_r! \cdot [z-\widehat{j}-\widehat{l}-\widehat{n}]_r! \cdot [z-\widehat{k}-\widehat{l}-\widehat{m}]_r!,$$

$$C\left(z,\begin{pmatrix} i & j & k\\ l & m & n\end{pmatrix}\right)=[\widehat{i}+\widehat{j}+\widehat{l}+\widehat{m}-z]_r!\cdot[\widehat{i}+\widehat{k}+\widehat{l}+\widehat{n}-z]_r!\cdot[\widehat{j}+\widehat{k}+\widehat{m}+\widehat{n}]-z]_r!,$$

$$\Delta(i,j,k)=\sqrt{\frac{[\widehat{i}+\widehat{j}-\widehat{k}]_r!\cdot[\widehat{j}+\widehat{k}-\widehat{i}]_r!\cdot[\widehat{k}+\widehat{j}-\widehat{i}]_r!}{[\widehat{i}+\widehat{j}+\widehat{k}+1]_r!}},$$

$$\widehat{x}=\tfrac{x}{2}\text{ для всех } x\in C_r,$$

$$\alpha=\max(\widehat{i}+\widehat{j}+\widehat{k},\widehat{i}+\widehat{m}+\widehat{n},\widehat{j}+\widehat{l}+\widehat{n},\widehat{k}+\widehat{l}+\widehat{m}),$$

$$\beta=\min(\widehat{i}+\widehat{j}+\widehat{l}+\widehat{m},\widehat{i}+\widehat{k}+\widehat{l}+\widehat{n},\widehat{j}+\widehat{k}+\widehat{m}+\widehat{n}).$$

Так как в настоящей статье речь идёт в основном об инварианте Тураева – Виро порядка 7, то далее для простоты обозначений всюду вместо $[n]_7$ пишется $[n]$.

Теорема 1. *Гомологически тривиальная часть $TV_{7,0}$ инварианта Тураева – Виро порядка 7 задаётся следующими значениями весов w_i, $i\in\{0,2,4\}$ и 6j-символов* $\begin{vmatrix} i & j & k\\ l & m & n\end{vmatrix}$, $i,j,k,l,m,n\in\{0,2,4\}$: $w_0=1$, $w_2=[3]$, $w_4=[5]$ *и*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=1 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=-\frac{1}{\sqrt{[3]}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 4\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{[5]}} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{[3]}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{[3]} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 4\end{vmatrix}=-\frac{1}{\sqrt{[3]\cdot[5]}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2\\ 4 & 2 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{[3]} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2\\ 4 & 4 & 4\end{vmatrix}=-\frac{1}{\sqrt{[3]\cdot[5]}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 4\\ 0 & 4 & 4\end{vmatrix}=\frac{1}{[5]} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4\\ 2 & 4 & 4\end{vmatrix}=\frac{1}{[5]}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=\frac{[5]-1}{[2]\cdot[3]\cdot[4]} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{vmatrix}=-\frac{[2]}{[3]\cdot[4]}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 4\end{vmatrix}=-\frac{1}{[4]}\cdot\sqrt{\frac{[2]\cdot[6]}{[3]\cdot[5]}} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2\\ 4 & 4 & 4\end{vmatrix}=\frac{[3]}{[4]\cdot\sqrt{[2]\cdot[3]\cdot[5]\cdot[6]}}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 4\end{vmatrix}=\frac{[2]}{[3]\cdot[4]\cdot[5]} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 4\end{vmatrix}=\frac{[2]}{[4]\cdot[5]}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4\\ 2 & 4 & 4\end{vmatrix}=-\frac{1}{[4]\cdot[5]\cdot[6]}$$

Значения всех остальных 6j-символов и весов w_i, $i\in\{1,3,5\}$ равны нулю.

Доказательство. Утверждение теоремы получается в результате аккуратных вычислений по указанным выше формулам. Так как нас интересует только гомологически тривиальная часть инварианта, то все веса w_i для нечётных $i\in C_r$ равны 0. Точно таже равными нулю являются значения всех 6j-символов $\begin{vmatrix} i & j & k\\ l & m & n\end{vmatrix}$, где хотя бы одно из чисел $i,j,k,l,m,n\in C_7$ нечётно. $\square$

3. Многочлен $\mathcal{T}(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$

Простой анализ показывает, что многочлен $\mathcal{T}(x)$ имеет три действительных корня: один из них больше 2, обозначим его γ_1, второй принадлежит интервалу $(0, 1)$, обозначим его γ_2, а третий корень отрицательный, обозначим его γ_3 (см. рис. 1).

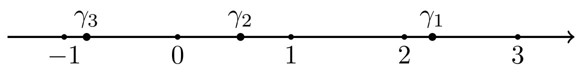

Рис. 1. Корни многочлена $\mathcal{T}(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$.

Теорема 2. *Пусть γ — корень многочлена $\mathcal{T}(x)$. Тогда $1 - \frac{1}{\gamma}$ также является корнем многочлена $\mathcal{T}(x)$.*

Доказательство. Заметим сначала, что $\gamma \neq 0$. Далее, так как

$$\gamma^3 - 2\gamma^2 - \gamma + 1 = 0,$$

то, разделив обе части этого равенства на γ^3, получим

$$1 - \frac{2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^3} = 0.$$

Вычислим $\mathcal{T}(1 - \frac{1}{\gamma})$.

$$\mathcal{T}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^3 - 2\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) + 1 = \\ = -1 + \frac{2}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma^3} = -\left(1 - \frac{2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^3}\right) = 0.$$

□

Рассмотрим функцию $\tau(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, действующую следующим образом:

$$\tau(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Непосредственно проверяется, что тогда $\gamma_2 = \tau(\gamma_1)$, $\gamma_3 = \tau(\gamma_2)$ и $\gamma_1 = \tau(\gamma_3)$. Последнее соотношение, в частности, следует и из того, что функция τ имеет порядок 3, то есть $\tau \circ \tau \circ \tau = id$.

4. Инвариант типа Тураева – Виро TH_4

Теорема 3. $\mathcal{T}([3]) = 0$.

Доказательство. По определению $[3] = q^2 + 1 + q^{-2}$, где $q \neq \pm 1$ является корнем 14-ой степени из 1-цы. Явно вычислим $\mathcal{T}(q^2 + 1 + q^{-2})$:

$$\mathcal{T}(q^2 + 1 + q^{-2}) = (q^2 + 1 + q^{-2})^3 - 2(q^2 + 1 + q^{-2})^2 - (q^2 + 1 + q^{-2}) + 1 = \\ = q^6 + q^4 + q^2 + 1 + q^{-2} + q^{-4} + q^{-6}.$$

Осталось заметить, что если $\omega = q^2$, то ω — первообразный корень степени 7 из 1-цы. Тогда

$$\mathcal{T}([3]) = \omega^6 + \omega^5 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0.$$

□

При вычислении величины [3] в качестве q можно брать любой корень 14-ой степени из 1, отличный от ± 1. На рисунке 2 изображены различные корни многочлена $\mathcal{T}(x)$, соответствующие различным выборам величины q. Как и раньше, γ_1 — это наибольший корень многочлена, γ_2 — средний, а γ_3 — наименьший.

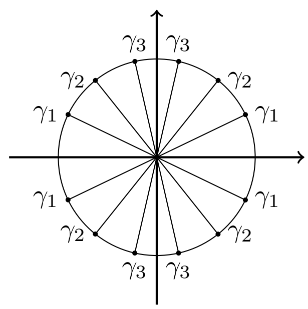

Рис. 2. Различные значения корня 14-ой степени из 1-цы и соответствующий корень многочлена $\mathcal{T}(x)$, которому равна величина [3].

Теорема 4. *Имеют место следующие соотношения:*

(1) $[5] \cdot [3] = [3] + [5]$;
(2) $[2] \cdot [4] = [3] \cdot [5]$;
(3) $[2] \cdot [3] = [4] \cdot [5]$;
(4) $[2] \cdot [6] = [5]$;
(5) $[4] \cdot [6] = [3]$;
(6) $[3]^2 = [4]^2$.

Доказательство. Каждое соотношение доказывается подстановкой

$$\begin{gathered}
[2] = q + q^{-1}, \\
[3] = q^2 + 1 + q^{-2}, \\
[4] = q^3 + q + q^{-1} + q^{-3}, \\
[5] = q^4 + q^2 + 1 + q^{-2} + q^{-4}, \\
[6] = q^5 + q^3 + q + q^{-1} + q^{-3} + q^{-5}
\end{gathered}$$

в требуемые равенства, раскрытием скобок и приведением подобных. Единственное дополнительное соотношение, которое при этом используется, состоит в том, что если $\omega = q^2$, то

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0.$$

□

Из первого утверждения теоремы 4 в частности следует, что если $[3] = \gamma$ — произвольный корень многочлена $\mathcal{T}(x)$, то

$$[5] = \frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

Гомологически тривиальная часть любого инварианта Тураева – Виро порядка r при нечётном r является инвариантом типа Тураева – Виро порядка $\frac{r+1}{2}$. Чтобы не путать задающие его $6j$-символы с $6j$-символами исходного инварианта порядка r, будем обозначать их $\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix}'$, а веса w'_i.

Теорема 5. *Пусть γ — произвольный корень многочлена $\mathcal{T}(x)$. Тогда инвариант TH_4 типа Тураева – Виро порядка 4, совпадающий с гомологически тривиальной частью $TV_{7,0}$ инварианта Тураева – Виро порядка 7, задаётся следующими значениями весов $w'_i \in \{0,1,2\}$ и $6j$-символов $\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix}'$, $i,j,k,l,m,n \in \{0,1,2\}$: $w'_0 = 1$, $w'_1 = \gamma$, $w'_2 = \frac{\gamma}{\gamma-1}$ и*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}' = 1 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}' = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{\gamma}} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}' = \frac{1}{\gamma}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}' = \frac{1}{\gamma} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = -\frac{\sqrt{\gamma-1}}{\gamma}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}' = \frac{1}{\gamma} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = -\frac{\sqrt{\gamma-1}}{\gamma}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = \frac{\gamma-1}{\gamma} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = \frac{\gamma-1}{\gamma}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}' = \frac{1}{\gamma^3} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}' = -\frac{1}{\gamma\cdot(\gamma-1)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = -\frac{1}{\gamma\cdot\sqrt{\gamma}} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = \frac{\gamma-1}{\gamma\cdot\sqrt{\gamma}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}' = \frac{1}{\gamma^2} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = \frac{1}{\gamma}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = -\frac{\gamma-1}{\gamma^2}$$

Значения всех остальных $6j$-символов равно 0.

Доказательство. Пусть значение корня q выбрано так, что $[3] = \gamma$. Вычислим значения требуемых весов цветов и $6j$-символов, используя теоремы 1 и 4, а так же тот факт, что

$$[3] = \gamma \text{ и } [5] = \frac{\gamma}{\gamma-1}.$$

Сначала вычислим веса цветов w'_i, $i \in \{0,1,2\}$.

$w'_0 = w_0 = 1$, $w'_1 = w_2 = [3] = \gamma$ и $w'_2 = w_4 = [5] = \dfrac{\gamma}{\gamma-1}$.

Далее значения $6j$-символов.

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{\sqrt{[3]}} = -\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}.$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{[5]}} = \dfrac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{\gamma}}.$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{[3]} = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}.$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{[3]} = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}.$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{\sqrt{[3]\cdot[5]}} = -\dfrac{\sqrt{\gamma-1}}{\gamma}.$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{[3]} = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}.$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{\sqrt{[3]\cdot[5]}} = -\dfrac{\sqrt{\gamma-1}}{\gamma}.$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{[5]} = \dfrac{\gamma-1}{\gamma}.$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{[5]} = \dfrac{\gamma-1}{\gamma}.$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{[5]-1}{[2]\cdot[3]\cdot[4]}$. Воспользуемся вторым соотношением теоремы 4 и заменим в этом выражении $[2]\cdot[4]$ на $[3]\cdot[5]$. В результате получим значение $\dfrac{[5]-1}{[3]^2\cdot[5]} = \dfrac{1}{\gamma^3}$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -\dfrac{[2]}{[3]\cdot[4]}$. Воспользуемся третьим соотношением из теоремы 4 и заменим $\dfrac{[2]}{[4]}$ на $\dfrac{[5]}{[3]}$. Получим значение $-\dfrac{[5]}{[3]^2} = -\dfrac{1}{\gamma\cdot(\gamma-1)}$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{[4]}\cdot\sqrt{\dfrac{[2]\cdot[6]}{[3]\cdot[5]}}$. Воспользуемся четвёртым соотношением из теоремы 4 и заменим $[2]\cdot[6]$ на $[5]$. Получим выражение $-\dfrac{1}{[4]\cdot\sqrt{[3]}}$. Из шестого соотношения теоремы 4 следует, что $[4] = \pm\gamma$, однако при разных выборах q значение $[4]$ может совпадать как с γ, так и с $-\gamma$. Как отмечено в [2, замечания 8.1.17 и 8.1.18], корректность и значение инварианта не зависит от выбора знака при извлечении квадратного корня. Поэтому для определённости можно выбрать $[4] = \gamma$, и тогда значение $6j$-символа равно $-\dfrac{1}{\gamma\cdot\sqrt{\gamma}}$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \dfrac{[3]}{[4]\cdot\sqrt{[2]\cdot[3]\cdot[5]\cdot[6]}}$. Воспользуемся четвёртым соотношением из теоремы 4 и заменим $[2]\cdot[6]$ на $[5]$ и, аналогично предыдущему случаю, выберем для определённости $[4]=\gamma$. Получим значение $\dfrac{\gamma-1}{\gamma\cdot\sqrt{\gamma}}$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \dfrac{[2]}{[3]\cdot[4]\cdot[5]}$. Воспользуемся третьим соотношением из теоремы 4 и заменим $\dfrac{[2]}{[4]}$ на $\dfrac{[5]}{[3]}$. Получим значение $\dfrac{1}{[3]^2}=\dfrac{1}{\gamma^2}$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \dfrac{[2]}{[4]\cdot[5]}$. Воспользуемся третьим соотношением из теоремы 4 и заменим $\dfrac{[2]}{[4]}$ на $\dfrac{[5]}{[3]}$. Получим значение $\dfrac{1}{[3]}=\dfrac{1}{\gamma}$.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{[4]\cdot[5]\cdot[6]}$. Воспользуемся пятым соотношением из теоремы 4 и заменим $[4]\cdot[6]$ на $[3]$. Получим значение $-\dfrac{1}{[3]\cdot[5]} = -\dfrac{\gamma-1}{\gamma}$. □

5. Многочлены для гомологически тривиальных частей инвариантов Тураева – Виро

Как уже отмечалось, гомологически тривиальная часть инварианта Тураева – Виро нечётного порядка r является инвариантом типа Тураева – Виро порядка $\frac{r+1}{2}$. При $r=5$ соответствующий инвариант порядка 3 является ε-инвариантом, а при $r=7$ — описанным в предыдущем параграфе γ-инвариантом. Оба этих инварианта выражаются в терминах корней двух специальных многочленов. Для ε-инварианта этот многочлен равен x^2-x-1, а для γ-инварианта он равен x^3-2x^2-x+1.

Естественно предположить, что любой инвариант типа Тураева – Виро $TH_{\frac{r+1}{2}}$ может быть выражен в терминах корней подходящего многочлена. Это согласуется с тем, что значения инвариантов Тураева – Виро являются целыми алгебраическими ([6]). Глядя на формулы, задающие инварианты Тураева – Виро порядка r, трудно догадаться, какие это дожны быть многочлены. Процедура, позволяющая их подобрать, опирается на наблюдение, доказанное в теореме 3. Для этого надо вычислить значения величины $[3]_r$ для всех возможных $q\neq\pm1$, являющихся корнем степени $2r$ из 1-цы. После этого надо составить многочлен, у которого корнями являются все различные из вычисленных значений. В таблице 1 перечислены несколько первых многочленов, построенных с помощью такого правила. В первом столбце таблицы содержится порядок инварианта типа Тураева – Виро, совпадающего с гомологически тривиальной частью инварианта Тураева – Виро $TV_{r,0}$ нечётного порядка $5\leqslant r\leqslant 21$. Во втором столбце — соответствующий многочлен.

Мы не формулируем и не доказываем никаких точных утверждений, связанных с многочленами из таблицы 1. Описанную выше процедуру стоит расценивать как эмпирическое правило, от которого можно отталкиваться при построении требуемых многочленов.

Порядок	Многочлен
3	$x^2 - x - 1$
4	$x^3 - 2x^2 - x + 1$
5	$x^4 - 3x^3 + 3x$
6	$x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 2x - 1$
7	$x^6 - 5x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 7x^2 - 2x + 1$
8	$x^7 - 6x^6 + 9x^5 + 5x^4 - 15x^3 + 5x$
9	$x^8 - 7x^7 + 14x^6 + x^5 - 25x^4 + 9x^3 + 12x^2 - 3x - 1$
10	$x^9 - 8x^8 + 20x^7 - 7x^6 - 35x^5 + 29x^4 + 18x^3 - 15x^2 - 3x + 1$
11	$x^{10} - 9x^9 + 27x^8 - 20x^7 - 42x^6 + 63x^5 + 14x^4 - 42x^3 + 7x$

Таблица 1. Многочлены, через корни которых выражаются инварианты TH_r.

References

[1] V.G. Turaev, O.Ya. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*, Topology, **31**:4 (1992), 865–902. Zbl 0779.57009

[2] S. Matveev, *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, Springer, Berlin, 2007. Zbl 1128.57001

[3] V.G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, de Gruyter Studies in Mathematics, **18**, Walter de Gruyter, Berlin, 2016. Zbl 1346.57002

[4] S.V. Matveev, M.V. Sokolov, *On a simple invariant of Turaev-Viro type*, J. Math. Sci., New York, **94**:2 (1999), 1226-–1229. Zbl 0978.57008

[5] M.V. Sokolov, *The Turaev-Viro invariant for 3-manifolds is a sum of three invariants*, Can. Math. Bull., **39**:4 (1996), 468–475. Zbl 0874.57011

[6] G. Masbaum, J.D. Roberts, *A simple proof of integrality of quantum invariants at prime roots of unity*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc., **121**:3 (1997), 443–454. Zbl 0882.57010

Philipp Glebovich Korablev
Chelyabinsk State University,
192, Br. Kashirinykh str.,
Chelyabinsk, 454000, Russia,
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Meckhanics,
4, S. Kovalevskoy str.,
Ekaterinburg, 620990, Russia
Email address: korablev@csu.ru