S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 19, №2, стр. 852–860 (2022) УДК 519.21

DOI 10.33048/semi.2022.19.071 MSC 60G50

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ МОМЕНТА ПЕРВОГО ВЫХОДА ИЗ ПОЛОСЫ ДЛЯ ПРОЦЕССА ЛЕВИ

В.И. ЛОТОВ, В.Р. ХОДЖИБАЕВ

Abstract. We study first exit time from a strip for a homogeneous stochastic process with independent increments (the Levy process). Two-sided inequalities are found for the average of this exit time under various conditions on the process.

Keywords: stochastic Levy process, first exit time, boundary crossing problem, ruin probability.

1. Введение

Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$, $\xi(0) = 0$, — однородный случайный процесс с независимыми приращениями, выборочные функции которого непрерывны справа. В этом случае $\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi(t)\} = \exp\{t\psi(\lambda)\}$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$,

$$\psi(\lambda) = \gamma\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\lambda x} - 1 - \frac{\lambda x}{1+x^2}\right) dS(x), \tag{1}$$

где γ и $\sigma > 0$ — вещественные числа, функция $S(x)$ не убывает на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$,

$$\int\limits_{|x|\leq 1} x^2 dS(x) < \infty, \qquad S(-\infty) = S(\infty) = 0.$$

Lotov, V.I., Khodjibayev, V.R. Inequalities for the average first exit time from the strip for the Levy process.

The work is supported by Russian Science Foundation (grant 22-21-00396).

Поступила 25 июля 2022 г., опубликована 11 ноября 2022 г.

Для произвольных $a > 0$, $b > 0$ определим случайную величину

$$T = T(a, b) = \inf\{t \geq 0 : \ \xi(t) \notin (-a, b)\},$$

равную моменту первого выхода случайного процесса $\xi(t)$ из интервала $(-a, b)$. Полагаем $T = \infty$, если $\xi(t) \in (-a, b)$ для любого t. Известно, что случайная величина T конечна с вероятностью единица, если распределение случайной величины $\xi(1)$ не является вырожденным в нуле, и $\mathbf{E}T^k < \infty$ для всех $k > 0$.

К изучению характеристик случайных процессов, связанных с моментом первого выхода из интервала, приводят известные задачи о разорении, теории управления запасами, теории систем обслуживания и ряд других.

Вычисление в точном виде характеристик случайных процессов, связанных с моментом первого выхода из интервала, в том числе $\mathbf{E}T$, доступно только в некоторых частных ситуациях. Поэтому основное внимание в изучении этих характеристик обычно уделяется асимптотическим подходам.

Наиболее продвинутые результаты в этом направлении получены для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, то есть при рассмотрении дискретного времени. В этом случае наиболее точные приближения для среднего значения времени первого выхода из интервала получены в работах [1], [2] в условиях крамеровского типа для скачков случайных блужданий; результаты получены в виде асимптотических разложений при $a \to \infty$, $b \to \infty$.

Асимптотическим исследованиям в граничных задачах для однородных случайных процессов с независимыми приращениями и непрерывным временем в целом также посвящено большое количество работ. Среди них отметим цикл работ Б.А. Рогозина [3]—[5], в которых разработан факторизационный метод исследований в задачах с одной границей, а также исследования В.С. Королюка и его учеников (см., например, [6]), связанные с применением метода потенциала. С помощью факторизационного метода в работах [7], [8] были получены асимптотические результаты для распределения случайной величины T в двуграничной задаче в случае непрерывного времени.

Наряду с асимптотическими формулами актуальной является задача получения двусторонних неравенств для характеристик, связанных с моментом первого выхода случайного процесса из интервала. Любые асимптотические результаты неизбежно содержат остаточные члены. Как правило, указывается их порядок малости, однако оценка реальной величины этих остатков требует дополнительных рассмотрений. Поэтому нахождение двусторонних неравенств для характеристик граничных функционалов является естественным дополнением к имеющимся асимптотическим результатам. Задача нахождения верхней и нижней границ для среднего значения момента первого выхода случайного блуждания из интервала при различных ограничениях на распределение скачка блуждания решалась в [9].

Данная заметка посвящена нахождению двусторонних оценок для $\mathbf{E}T$ при различных ограничениях на распределение процесса. Тем самым она является распространением основных результатов работы [9] на процессы с непрерывным временем. Здесь существенно используются некоторые приемы из [9].

При исследовании величины $\mathbf{E}T$ особую трудность представляет учет влияния на результат перескоков через границы. В нашем случае их два: перескок через верхнюю границу и через нижнюю. Задачи существенно упрощаются, если перескоки отсутствуют или имеют экспоненциальное распределение. Пренебрежение эффектом перескока обычно ведет к потере точности в тех или иных задачах. По этой причине одной из целей настоящей работы явилось построение оценок, учитывающих влияние перескоков.

Обычно те или иные характеристики задач с двумя границами выражаются через распределения функционалов от траекторий случайных процессов, возникающих в задачах с одной границей. В настоящей работе верхние и нижние оценки для $\mathbf{E}T$ выражаются только через характеристики исходного процесса $\xi(t)$, не прибегая к использованию характеристик однограничных функционалов. Для получения двусторонних оценок для $\mathbf{E}T$ при $\mathbf{E}\xi(1) \le 0$ нам потребуются верхние и нижние оценки для вероятностей $\mathbf{P}(\xi(T) \ge b)$ и $\mathbf{P}(\xi(T) \le -a)$, обычно называемых вероятностями разорения. Оценки для вероятностей разорения в случае $\mathbf{E}\xi(1) < 0$ получены в работе [10]. В настоящей работе находятся также такие оценки и в случае, когда $\mathbf{E}\xi(1) = 0$ (теорема 1), которые, возможно, представляют и самостоятельный интерес. В теоремах 2, 3 приведены оценки сверху и снизу для $\mathbf{E}T$ в случае, когда $\mathbf{E}\xi(1) = 0$, а затем, в теоремах 4 и 6, — двусторонние оценки для $\mathbf{E}T$, когда $\mathbf{E}\xi(1) < 0$. Теорема 5 установлена в другой работе, ее формулировка приведена в тексте для удобства чтения.

2. Неравенства для вероятности разорения при нулевом сносе

Пусть $\mu_1 = \mathbf{E}\xi(1) = 0$. Дополнительно будем предполагать существование второго момента $\mu_2 = \mathbf{E}\xi^2(1) < \infty$.

Обозначим

$$\alpha = \alpha(a,b) = \mathbf{P}(\xi(T) \le -a), \qquad \beta = \beta(a,b) = \mathbf{P}(\xi(T) \ge b)$$

и займёмся нахождением оценок для этих величин. В силу тождества Вальда

$$\mathbf{E}\xi(T) = \mathbf{E}\xi(1)\mathbf{E}T = 0,$$

$$0 = \mathbf{E}\xi(T) = \mathbf{E}(\xi(T) - b;\, \xi(T) \ge b) + \mathbf{E}(\xi(T) + a;\, \xi(T) \le -a) + b\beta - a\alpha. \tag{2}$$

Здесь и далее принято обозначение вида $\mathbf{E}(Z;\, A) = \mathbf{E}ZI\{A\}$, где $I\{A\}$ означает индикатор события A. Вследствие равенства $\alpha + \beta = 1$, выводим из (2)

$$\beta = \frac{a - \mathbf{E}(\xi(T) - b;\, \xi(T) \ge b) + \mathbf{E}(|\xi(T) + a|;\, \xi(T) \le -a)}{a + b}. \tag{3}$$

Обозначим

$$\eta_+ = \eta_+(b) = \inf\{t \ge 0:\ \xi(t) \ge b\}, \qquad \eta_- = \eta_-(-a) = \inf\{t \ge 0:\ \xi(t) \le -a\},$$
$$\chi_+ = \chi_+(b) = \xi(\eta_+(b)) - b, \qquad \chi_- = \chi_-(-a) = \xi(\eta_-(-a)) + a.$$

Ясно, что при всех $k > 0$

$$\mathbf{E}\big((\xi(T) - b)^k;\, \xi(T) \ge b\big) = \mathbf{E}\big(\chi_+^k;\, \xi(T) \ge b\big) = \mathbf{E}\chi_+^k I\{\xi(T) \ge b\},$$

и по неравенству Гельдера для любых $\delta > 0$

$$\mathbf{E}\big((\xi(T) - b)^k;\, \xi(T) \ge b\big) \le \big(\mathbf{E}\chi_+^{k(1+\delta)}\big)^{1/(1+\delta)} \big(\mathbf{E}(I\{\xi(T) \ge b\})^{(\delta+1)/\delta}\big)^{\delta/(1+\delta)}$$
$$= \big(\mathbf{E}\chi_+^{k(1+\delta)}\big)^{1/(1+\delta)} \beta^{\delta/(1+\delta)}. \tag{4}$$

Аналогично,

$$\mathbf{E}\big(|\xi(T) + a|^k;\, \xi(T) \le -a\big) \le \big(\mathbf{E}|\chi_-|^{k(1+\delta)}\big)^{1/(1+\delta)} \alpha^{\delta/(1+\delta)}. \tag{5}$$

Отметим, что значения выражений $\beta^{\delta/(1+\delta)}$ и $\alpha^{\delta/(1+\delta)}$ можно сделать сколь угодно близкими к единице, выбирая число $\delta > 0$ близким к нулю. Уменьшение числа δ также влечет ослабление требований на существование моментов случайных величин $\chi_\pm$.

Неравенства (4) и (5) при $k = 1, 2$ нам потребуются ниже при нахождении оценок для $\mathbf{E}T$. Эти же неравенства при $\delta = 1$, то есть вследствие неравенства Коши-Буняковского, будем использовать для оценивания вероятностей разорения α и β.

Из (3) и (4) при $k = 1$, $\delta = 1$ следует

$$\beta \geq \frac{a - \mathbf{E}(\xi(T) - b;\, \xi(T) \geq b)}{a+b} \geq \frac{a - \left(\mathbf{E}\chi_+^2\right)^{1/2}\beta^{1/2}}{a+b}, \tag{6}$$

и аналогично, с учетом (5) и равенства $\alpha + \beta = 1$,

$$\alpha \geq \frac{b - \mathbf{E}(|\xi(T) + a|;\, \xi(T) \leq -a)}{a+b} \geq \frac{b - \left(\mathbf{E}\chi_-^2\right)^{1/2}\alpha^{1/2}}{a+b}. \tag{7}$$

В [11, теорема 5] доказано: если $\mathbf{E}\xi(1) \geq 0$, $\mathbf{E}\xi^2(1) < \infty$, то существует такая постоянная A, $1 \leq A \leq 2$, что для всех $s \geq 0$, $b > 0$

$$\mathbf{E}\chi_+^s \leq A\,\frac{s+2}{s+1} \cdot \frac{a_{s+2}}{a_2}, \qquad \text{где} \;\; a_s = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^s dS(x). \tag{8}$$

Здесь $S(x)$ — спектральная функция процесса $\xi(t)$ из (1). Отметим, что из условия $\mathbf{E}|\xi(1)|^s < \infty$ следует $a_s < \infty$.

Рассмотрев процесс $-\xi(t)$ вместо $\xi(t)$, симметричными рассуждениями получаем следующее утверждение: если $\mathbf{E}\xi(1) \leq 0$, $\mathbf{E}\xi^2(1) < \infty$, то равномерно по $a > 0$

$$\mathbf{E}|\chi_-|^s \leq B\,\frac{s+2}{s+1} \cdot \frac{a_{s+2}}{a_2}, \qquad 1 \leq B \leq 2. \tag{9}$$

В формулах (8) и (9) числа A и B могут быть разными. Полагая $A = B = 2$ в (8) и (9), имеем

$$\mathbf{E}\chi_+^s \leq l(s) := 2\,\frac{s+2}{s+1} \cdot \frac{a_{s+2}}{a_2}, \qquad \mathbf{E}|\chi_-|^s \leq l(s). \tag{10}$$

Возвращаясь к неравенствам (6) и (7), получаем с учетом (10)

$$\beta \geq \frac{a - \sqrt{l(2)\beta}}{a+b}, \qquad \alpha \geq \frac{b - \sqrt{l(2)\alpha}}{a+b}.$$

Последние соотношения можно рассматривать как квадратичные неравенства относительно $\sqrt{\beta}$ и $\sqrt{\alpha}$. Решим эти неравенства относительно β и α. Для этого введем обозначения

$$l = \sqrt{l(2)}, \qquad l_1 = \frac{l\sqrt{l^2 + 4a(a+b)} - l^2}{2(a+b)^2}, \qquad l_2 = \frac{l\sqrt{l^2 + 4b(a+b)} - l^2}{2(a+b)^2} \tag{11}$$

и вновь воспользуемся равенством $\alpha + \beta = 1$. В итоге получаем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}\xi(1) = 0$, $\mathbf{E}\xi^2(1) < \infty$. *Тогда имеют место неравенства*

$$\frac{a}{a+b} - l_1 \leq \beta \leq \frac{a}{a+b} + l_2, \qquad \frac{b}{a+b} - l_2 \leq \alpha \leq \frac{b}{a+b} + l_1.$$

3. Неравенства для $\mathbf{E}T$ при нулевом сносе

Напомним, что в этом случае будем дополнительно предполагать существование второго момента $\mu_2 = \mathbf{E}\xi^2(1) < \infty$. В силу тождества Вальда

$$\mathbf{E}\xi^2(T) = \mu_2 \mathbf{E}T.$$

Обоснование последнего равенства можно найти, например, в [7]. Запишем далее:

$$\mathbf{E}\xi^2(T) = a^2\alpha + b^2\beta + 2a\mathbf{E}(|\xi(T)+a|;\, \xi(T) \le -a) + 2b\mathbf{E}(\xi(T)-b;\, \xi(T) \ge b)$$

$$+\mathbf{E}\big((\xi(T)+a)^2;\, \xi(T) \le -a\big) + \mathbf{E}\big((\xi(T)-b)^2;\, \xi(T) \ge b\big). \tag{12}$$

Займемся сначала оцениванием $\mathbf{E}T$ сверху. Оценки сверху для $\mathbf{E}\big(|\xi(T)+a|^k;\, \xi(T) \le -a\big)$ и $\mathbf{E}\big((\xi(T)-b)^k;\, \xi(T) \ge b\big)$ приведены в (4) и (5). С учетом последующих оценок (10) получаем

$$\mathbf{E}\big(|\xi(T)+a|^k;\, \xi(T) \le -a\big) \le C_k(\delta)\alpha^{\delta/(1+\delta)},$$
$$\mathbf{E}\big((\xi(T)-b)^k;\, \xi(T) \ge b\big) \le C_k(\delta)\beta^{\delta/(1+\delta)},$$

где

$$C_k(\delta) = \big(l(k(1+\delta))\big)^{1/(1+\delta)}, \quad k = 1, 2. \tag{13}$$

Обозначая правые части неравенств из теоремы 1 через

$$K_1 = \frac{b}{a+b} + l_1, \qquad K_2 = \frac{a}{a+b} + l_2,$$

получаем из (12) следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что* $\mathbf{E}\xi(1) = 0$ *и* $\mathbf{E}|\xi(1)|^{4+2\delta} < \infty$ *при некотором* $\delta > 0$. *Тогда*

$$\mu_2\mathbf{E}T \le a^2K_1 + b^2K_2 + 2C_1(\delta)\big[aK_1^{\delta/(1+\delta)} + bK_2^{\delta/(1+\delta)}\big] + C_2(\delta)\big[K_1^{\delta/(1+\delta)} + K_2^{\delta/(1+\delta)}\big].$$

Перейдем к нахождению оценки снизу для $\mathbf{E}T$. Здесь ограничимся следующим очевидным соотношением:

$$\mathbf{E}\xi^2(T) = \mathbf{E}(\xi^2(T);\ \xi(T) \le -a) + \mathbf{E}(\xi^2(T);\ \xi(T) \ge b) \ge \alpha a^2 + \beta b^2.$$

Применяя оценки снизу для α и β из теоремы 1, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{E}\xi(1) = 0$ *и* $\mathbf{E}\xi^4(1) < \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{E}\xi^2(T) = \mu_2\mathbf{E}T \ge ab - a^2l_2 - b^2l_1,$$

величины $l_1,\ l_2$ *определены в* (11).

Замечание. Если использовать тривиальные неравенства

$$\mathbf{E}\big(|\xi(T)+a|;\, \xi(T) \le -a\big) \le \mathbf{E}|\chi_-|, \qquad \mathbf{E}\big(\xi(T)-b;\, \xi(T) \ge b\big) \le \mathbf{E}|\chi_+|$$

и оценки (10) для $\mathbf{E}|\chi_\pm|$, то, как и в (6), (7), получим

$$\alpha \ge \frac{b - l(1)}{a+b}, \qquad \beta \ge \frac{a - l(1)}{a+b},$$

и, следовательно, оценку снизу

$$\mu_2\mathbf{E}T \ge ab - \frac{l(1)(a^2+b^2)}{a+b}.$$

Эта оценка имеет место при выполнении условия $\mathbf{E}|\xi^3(1)| < \infty$. Тем самым ослабляется моментное условие по сравнению с теоремой 3, однако эта оценка, по-видимому, окажется слабее, чем оценка в теореме 3.

4. Неравенства для $\mathbf{E}T$ при отрицательном сносе.

Предположим, что $\mathbf{E}\xi(1) < 0$, и вновь воспользуемся тождеством Вальда:

$$\mathbf{E}\xi(T) = \mu_1 \mathbf{E}T = \mathbf{E}(\xi(T);\, \xi(T) \le -a) + \mathbf{E}(\xi(T);\, \xi(T) \ge b)$$

или, по-другому,

$$|\mu_1|\mathbf{E}T = a - (a+b)\beta + \mathbf{E}(|\xi(T)+a|;\, \xi(T) \le -a) - \mathbf{E}(\xi(T) - b;\, \xi(T) \ge b). \tag{14}$$

Для оценивания $\mathbf{E}T$ сверху в соответствии с (14) нам потребуются оценка снизу для $\beta = \mathbf{P}(\xi(T) \ge b)$ и оценка сверху для $\mathbf{E}(|\xi(T)+a|;\, \xi(T) \le -a)$. Величину $\mathbf{E}(\xi(T) - b;\, \xi(T) \ge b)$ будем оценивать снизу нулем.

Сначала оценим β снизу. Рассмотрим случайный процесс $\xi_1(t)$, который получается простой заменой скачков процесса $\xi(t)$, превышающих по величине $a+b$, на скачки размера $a+b$. Спектральная функция процесса $\xi_1(t)$ в представлении (1) будет равна

$$S_1(x) = \begin{cases} S(x), & \text{если} \quad x \le a+b, \\ S(a+b), & \text{если} \quad x > a+b. \end{cases}$$

Ясно, что процесс $\xi_1(t)$ имеет положительные скачки, не превосходящие по величине $a+b$, и $\varphi_1(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda\xi_1(1)} < \infty$ при любом $\lambda > 0$, то есть для распределения $\xi_1(1)$ выполняется правостороннее условие Крамéра. Функция $\varphi_1(\lambda)$ выпукла вниз, $\varphi_1(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$. Кроме того отметим, что $\mathbf{E}\xi_1(1) \le \mathbf{E}\xi(1) < 0$. Поэтому существует единственное число $\nu > 0$ такое, что $\varphi_1(\nu) = 1$. Обозначим через $\beta_1 = \beta_1(a,b)$ вероятность разорения, вычисленную по случайному процессу $\xi_1(t)$, и положим

$$r_1^{-1} = \sup_{0<x<a+b} \mathbf{E}\big(e^{\nu(\xi_1(1)-x)} | \xi_1(1) > x\big). \tag{15}$$

В [10] доказано, что $\beta = \beta_1$ и при $\mathbf{E}\xi(1) < 0$

$$\beta = \beta_1 \ge L_1 := \frac{r_1 e^{-\nu b} - e^{-\nu(a+b)}}{1 - r_1 e^{-\nu(a+b)}}. \tag{16}$$

Отсюда сразу следует, что

$$\alpha = 1 - \beta \le L_2 := 1 - \frac{r_1 e^{-\nu b} - e^{-\nu(a+b)}}{1 - r_1 e^{-\nu(a+b)}}. \tag{17}$$

Неравенство (5) и последующая оценка $\mathbf{E}|\chi_-|^s \le l(s)$ из (10) справедливы при $\mathbf{E}\xi(1) \le 0$, поэтому получаем

$$\mathbf{E}\big(|\xi(T)+a|;\, \xi(T) \le -a\big) \le \big(\mathbf{E}|\chi_-|^{1+\delta}\big)^{1/(1+\delta)} \alpha^{\delta/(1+\delta)} \le C_1(\delta) L_2^{\delta/(1+\delta)}. \tag{18}$$

Величина $C_1(\delta)$ определена в (13).

Собирая неравенства (16)—(18) в соответствии с (14), получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\mu_1 = \mathbf{E}\xi(1) < 0$ *и* $\mathbf{E}|\xi(1)|^{3+\delta} < \infty$ *для некоторого* $\delta > 0$. *Тогда*

$$|\mu_1|\mathbf{E}T \le a - (a+b)L_1 + C_1(\delta)L_2^{\delta/(1+\delta)}.$$

Перейдем теперь к оцениванию $\mathbf{E}T$ снизу, если $\mathbf{E}\xi(1) < 0$. В соответствии с (14) нам потребуются оценки сверху для β и для $\mathbf{E}(\xi(T)-b;\ \xi(T) \ge b)$. Величину $\mathbf{E}\big(|\xi(T)+a|;\ \xi(T) \le -a\big)$ будем оценивать снизу нулем.

Для оценки сверху $\mathbf{E}(\xi(T)-b;\ \xi(T) \ge b)$ предположим, что выполнено следующее правостороннее условие Краме́ра:

$$\psi(\lambda_+) < \infty \qquad \text{для некоторого} \quad \lambda_+ > 0, \qquad \psi(\lambda_+) > 0. \tag{19}$$

При выполнении условия (19) в [5] установлено, что

$$\mathbf{P}(\sup_{t\ge 0}\xi(t) \ge x) \le e^{-\mu x}, \qquad x \ge 0,$$

где число $\mu > 0$ определяется из условия $\psi(\mu) = 0$. Отсюда следует

$$\mathbf{E}(\xi(T)-b;\ \xi(T) \ge b) = \int_0^\infty \mathbf{P}(\xi(T) \ge b+x;\ \xi(T) \ge b)\,dx$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{P}(\xi(T) \ge b+x)\,dx \le \int_0^\infty \mathbf{P}(\sup_{t\ge 0}\xi(t) \ge b+x)\,dx \le \int_0^\infty e^{-\mu(b+x)}\,dx = \mu^{-1}e^{-\mu b}.$$

В [10, теорема 4] получена следующая оценка.

Теорема 5. ([10]) *Пусть* $\mathbf{E}\xi(1) < 0$, *выполняется условие* (19) *и* $\mathbf{E}|\xi(1)|^3 < \infty$. *Тогда*

$$\beta \le L_3 := \frac{e^{-\mu b} - re^{-\mu(a+b+h)}}{1 - re^{-\mu(a+b+h)}},$$

где $h = 3a_3/a_2$, *числа* a_2 *и* a_3 *определены в* (8),

$$r^{-1} = \sup_{0<x<M} \mathbf{E}\big(e^{\mu(\xi(1)-x)}|\xi(1) > x\big), \qquad M = \inf\{x:\ \mathbf{P}(\xi(1) < x) > 0\}.$$

Применяя полученные оценки к слагаемым правой части (14), устанавливаем следующее неравенство.

Теорема 6. *Пусть* $\mathbf{E}\xi(1) < 0$, $\mathbf{E}|\xi(1)|^3 < \infty$ *и выполняется условие* (19). *Тогда имеет место неравенство*

$$|\mu_1|\mathbf{E}T \ge a - (a+b)L_3 - \mu^{-1}e^{-\mu b}.$$

Если условие (19) не выполнено, то имеет смысл перейти к рассмотрению введенного выше случайного процесса $\xi_1(t)$, у которого размеры скачков вверх ограничены числом $a+b$ и $\mathbf{E}\xi_1(1) < 0$. Для этого процесса выполнено условие (19) и вероятность разорения β_1 совпадает с β. При замене $\xi(t)$ на $\xi_1(t)$ не меняется также значение T. Поэтому по-прежнему имеет место оценка теоремы 5, в которой все участвующие в ней параметры определяются по распределению случайной величины $\xi_1(1)$. В частности, $M = a+b$, число $\mu > 0$ определяется из равенства $\mathbf{E}e^{\mu\xi_1(1)} = 1$, то есть совпадает с введенным ранее числом ν, а число r_1 определено в (15).

Итак, пусть число L_3' в отличие от L_3 построено по распределению случайной величины $\xi_1(1)$, тогда

$$|\mu_1|\mathbf{E}T \ge a - (a+b)L_3' - (\nu)^{-1}e^{-\nu b}.$$

Отметим, что в этом случае значения положительных скачков процесса ограничены числом $a+b$, поэтому имеет место тривиальная оценка

$$\mathbf{E}(\xi_1(T)-b;\, \xi_1(T)\ge b)\le (a+b)\mathbf{P}(\xi_1(T)\ge b)=(a+b)\beta_1,$$

Отсюда следует альтернативная оценка для $\mathbf{E}T$:

$$|\mu_1|\mathbf{E}T\ge a-2(a+b)L_3'.$$

В частном случае, когда $\xi(t)$ — винеровский процесс с отрицательным сносом, имеем

$$\psi(\lambda)=\gamma\lambda+\frac{\sigma^2\lambda^2}{2},\quad \gamma<0,\qquad \mu=-\frac{2\gamma}{\sigma^2},$$

$$\beta(a,b)=\frac{e^{-\mu b}-e^{-\mu(a+b)}}{1-e^{-\mu(a+b)}}\qquad (\text{см.}[10]),$$

$$|\gamma|\mathbf{E}T=a-(a+b)\frac{e^{-\mu b}-e^{-\mu(a+b)}}{1-e^{-\mu(a+b)}}.$$

Авторы благодарны анонимному рецензенту, чьи замечания способствовали улучшению работы.

References

[1] V.I. Lotov, *Approximation of the expectation of the first exit time from an interval for a random walk*, Sib. Math. J., **57**:1 (2016), 86–92. Zbl 1342.60066

[2] V.I. Lotov, *Asymptotic expansions for a sequential likelihood ratio test*, Theory Probab. Appl., **32**:1 (1987), 57–67. Zbl 0662.62082

[3] B.A. Rogozin, *On distributions of functionals related to boundary problems for processes with independent increments*, Theor. Probab. Appl., **11**:4 (1966), 580-–591. Zbl 0178.52701

[4] B.A. Rogozin, *Distribution of the maximum of a process with independent increments*, Sib. Math. J. **10** (1969), 989–1010. Zbl 0198.22302

[5] B.A. Rogozin, *Local behavior of processes with independent increments*, Theor. Probab. Appl., **13** (1968), 482–486. Zbl 0177.21305

[6] V.S. Koroljuk, V.N. Suprun, V.M. Shurenkov, *Method of potential in boundary problems for processes with independent increments and jumps of the same sign*, Theory Probab. Appl., **21**:2 (1977), 243–249. Zbl 0368.60086

[7] V.R. Khodzhibaev, *Asimptotic representations for characteristics of exit from an interval for stochastic processes with independent increments*, Sib. Adv. Math., **7**:3 (1997), 75–86. Zbl 0946.60049

[8] V.I. Lotov, V.R. Khodjibaev, *On limit theorems for the first exit time from a strip for stochastic processes. I*, Sib. Adv. Math., **8**:3 (1998), 90–113. Zbl 0920.60059

[9] V.I. Lotov, *Inequalities for the average exit time of a random walk from an interval*, Izv. Math., **85**:4 (2021), 745–754. Zbl 1469.60140

[10] V.I. Lotov, V.R. Khodjibayev, *Inequalities in a two-sided boundary crossing problem for stochastic processes*, Sib. Math. J., **62**:3 (2021), 455–461. Zbl 1470.60124

[11] A.A. Mogul'skii, *On the size of the first jump for a process with independent increments*, Theory Probab. Appl., **21** (1977), 470–481. Zbl 0361.60038

Vladimir Ivanovich Lotov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia,
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 1,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: `lotov@math.nsc.ru`

Vali Rakhimdjanovich Khodjibayev
Namangan Engineering - construction Institute,
Islam Karimov str., 12,
160103, Namangan, Uzbekistan,
Institute of Mathematics Uzbekistan Akademy of Sciences,
Universitetskaya str., 46,
100174, Tashkent, Uzbekistan
Email address: vkhodjibayev@mail.ru