S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 19, №2, стр. 959–971 (2022) УДК 517.95
DOI 10.33048/semi.2022.19.080 MSC 35A05

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БАРОТРОПНОГО ТЕЧЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

А.Е. МАМОНТОВ, Д.А. ПРОКУДИН

Abstract. The problem of steady barotropic motion of a multicomponent medium consisting of viscous compressible fluids in a bounded domain of three-dimensional space is formulated. The solvability of the problem is proved. Viscosity matrices are assumed to be arbitrary (non-diagonal).

Keywords: existence theorem, steady barotropic flow, viscous compressible multifluid, viscosity matrix.

Работа посвящена проблеме разрешимости уравнений, описывающих движение многокомпонентной среды, состоящей из вязких сжимаемых жидкостей. По поводу происхождения этой модели можно обратиться к монографиям [11] и [13], а также, за уточнениями для подмодели, рассматриваемой в данной работе — к статье [8]. Смежные модели рассматривались в таких работах как [1] и [3]. Несмотря на имеющиеся результаты о разрешимости для моделей динамики многокомпонентных сред, такие как [5], [6], [8], [9], остается не изученным вариант стационарных трехмерных движений в случае, если матрицы вязкостей являются заполненными (не диагональными и не треугольными), а уравнение состояния (для давления) имеет достаточно общий вид. Именно этот случай будет рассматриваться в предлагаемой работе. Основным результатом

Mamontov, A.E., Prokudin, D.A., Stationary solutions of a boundary value problem for equations of barotropic flow of multicomponent media.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (2020–23) (номер темы: FZMW–2020–0008 от 24.01.2020).

Поступила 17 ноября 2022 г., опубликована 10 декабря 2022 г.

статьи является теорема 4 о существовании слабого решения краевой задачи, поставленной в разделе 1.

1. Постановка задачи и основной результат

В замыкании $\overline{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (Ω — область течения) с границей $\partial\Omega \in C^2$ требуется найти скалярное поле плотности многокомпонентной среды $\rho \geqslant 0$ и векторные поля скоростей $\boldsymbol{u}_i$ для каждой компоненты с номером $i = 1, \ldots, N$ ($N \geqslant 2$), удовлетворяющие следующим уравнениям и краевым условиям:

$$\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) + \alpha_i\nabla p(\rho) = \operatorname{div}\mathbb{S}_i + \boldsymbol{J}_i + \rho_i\boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega}\rho\,d\boldsymbol{x} = m, \quad m = \mathrm{const} > 0. \tag{4}$$

Предполагаются следующие соотношения, ограничения и обозначения:

- $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_j\boldsymbol{u}_j$ — средневзвешенная скорость многокомпонентной среды, где $\alpha_j = \mathrm{const}$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = 1, \ldots, N$, $\sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_j = 1$;
- $\rho_i = \alpha_i\rho$, $i = 1, \ldots, N$ — плотности компонент;
- p — давление в среде, которое определяется плотностью ρ, т. е. функция $p(\cdot)$ предполагается заданной, причем

$$p \in C^1[0, +\infty), \quad p(0) = 0, \tag{5}$$
$$\forall\, s \geqslant 0 \quad \frac{1}{c_1}s^{\gamma-1} - c_2 \leqslant p'(s) \leqslant c_1 s^{\gamma-1} + c_2 \text{ и } p'(s) \geqslant 0$$

  с некоторыми постоянными $c_1 \geqslant 1$, $c_2 > 0$ и $\gamma > 3$ (простейшим примером ситуации, когда наложенные требования на давление выполнены, является политропный закон $p(\rho) = K\rho^\gamma$, $K = \mathrm{const} > 0$);
- $\mathbb{S}_i$, $i = 1, \ldots, N$ — тензоры вязких напряжений компонент, которые определяются равенствами

$$\mathbb{S}_i = \sum_{j=1}^{N}\left(\lambda_{ij}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j)\right), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{6}$$

  где $\mathbb{I}$ — единичный тензор, $\mathbb{D}(\boldsymbol{w}) = \dfrac{1}{2}\left((\nabla\otimes\boldsymbol{w}) + (\nabla\otimes\boldsymbol{w})^T\right)$ — тензор скоростей деформаций векторного поля $\boldsymbol{w}$ (T означает транспонирование), а числовые коэффициенты вязкостей λ_{ij}, μ_{ij}, $i, j = 1, \ldots, N$ образуют соответственно матрицы $\boldsymbol{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^{N}$, $\mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{N}$ такие, что

$$\mathbf{M} > 0, \quad \boldsymbol{\Lambda} + 2\mathbf{M} > 0, \tag{7}$$

при этом обозначим

$$\mathbf{N} = \mathbf{\Lambda} + 2\mathbf{M}, \quad \mathbf{N} = \{\nu\}_{i,j=1}^{N};$$

- векторные поля $\boldsymbol{J}_i = \sum\limits_{j=1}^{N} a_{ij}(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i)$, $i = 1, \ldots, N$ отвечают за интенсивность обмена импульсом между компонентами, где постоянные $a_{ij} = a_{ji} > 0$, $i, j = 1, \ldots, N$;
- известные векторные поля внешних сил

$$\boldsymbol{f}_i \in C(\overline{\Omega}), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{8}$$

Замечание 1. Из условий (5), в частности, вытекает, что при всех $s \geqslant 0$ верны оценки

$$\frac{1}{c_1\gamma} s^\gamma - c_2 s \leqslant p(s) \leqslant \frac{c_1}{\gamma} s^\gamma + c_2 s, \tag{9}$$

из которых, в свою очередь, следует

$$B_1 s^\gamma - B_2 \leqslant s \int\limits_1^s \frac{p(\eta)}{\eta^2}\, d\eta \leqslant B_3 s^\gamma + B_4,$$

где положительные постоянные B_1, B_2, B_3, B_4 зависят только от c_1, c_2 и γ (условимся через $B_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$, обозначать величины, принимающие конечные положительные значения и зависящие от объектов, указанных в скобках или перечисленных в комментариях).

Замечание 2. Ввиду равенства (см. (3))

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\, d\boldsymbol{x} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \mu_{ij} (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_i) \cdot (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_j)\, d\boldsymbol{x} + \sum_{i,j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} (\lambda_{ij} + 2\mu_{ij})\, (\operatorname{div} \boldsymbol{u}_i)(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_j)\, d\boldsymbol{x},$$

условия (7) обеспечивают оценку

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\, d\boldsymbol{x} \geqslant B_5(\mathbf{M}, \mathbf{\Lambda}) \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x}. \tag{10}$$

Определение 3. Пусть в уравнениях (2) (с уточняющими соотношениями (6)) давление удовлетворяет ограничениям (5), коэффициенты вязкостей — условиям (7), а входные данные задачи (1)–(4) удовлетворяют условиям (8). Слабым решением задачи (1)–(4) называется набор функций

$$\rho \in L_{2\gamma}(\Omega), \quad \rho \geqslant 0, \quad \boldsymbol{u}_i \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N,$$

удовлетворяющих (4) и следующим условиям:

1) Плотность ρ удовлетворяет уравнению неразрывности (1) в том смысле, что $\forall\, \psi \in W^1_{\frac{6\gamma}{5\gamma-3}}(\Omega)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \psi\, d\boldsymbol{x} = 0;$$

2) Скорости $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1,\ldots,N$ удовлетворяют уравнениям импульсов (2) (с определяющими уравнениями (6)) в том смысле, что $\forall\,\boldsymbol{\varphi}_i \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $i = 1,\ldots,N$ выполнены интегральные тождества (при $i = 1,\ldots,N$)

$$\int\limits_\Omega \Big((\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \alpha_i p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_i - \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \boldsymbol{J}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \Big)\, d\boldsymbol{x} = 0$$

(краевые условия (3) выполнены автоматически — в смысле функционального класса $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$).

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 4. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. Тогда для любых входных данных класса, описанного в определении 3, и при оговоренных в нем условиях на параметры уравнений, существует по крайней мере одно слабое решение задачи (1)–(4).

Доказательству этой теоремы посвящена оставшаяся часть статьи.

2. Формулировка приближенной задачи и ее разрешимость

Будем искать слабое решение задачи (1)–(4) как предел приближенных решений, а именно, решений следующей краевой задачи (индекс ε у величин, зависящих от ε, мы пока опускаем):

$$-\varepsilon\Delta\rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) + \varepsilon\rho = \varepsilon\frac{m}{|\Omega|}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2}\rho_i\boldsymbol{u}_i + \frac{\varepsilon}{2}\frac{m}{|\Omega|}\alpha_i\boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2}\rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) + \alpha_i\nabla p(\rho) = \\ = \operatorname{div}\mathbb{S}_i + \boldsymbol{J}_i + \rho_i\boldsymbol{f}_i, \quad i = 1,\ldots,N,\end{aligned} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1,\ldots,N, \quad \nabla\rho\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{13}$$

Здесь $\varepsilon \in (0,1]$ — параметр, который впоследствии будет устремлен к нулю; $|\Omega| = \operatorname{meas}(\Omega)$; $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$.

Определение 5. Сильным решением задачи (11)–(13) называются неотрицательная функция $\rho \in W^2_{\sigma_1}(\Omega)$ с некоторым $\sigma_1 > 3$, и векторные поля $\boldsymbol{u}_i \in W^2_{\sigma_1}(\Omega)$, $i = 1,\ldots,N$ такие, что уравнения (11), (12) выполнены п. в. в Ω, и п. в. на $\partial\Omega$ верны краевые условия (13).

Существование сильного решения краевой задачи (11)–(13) доказывается стандартными рассуждениями на основании теоремы о неподвижных точках Лерэ–Шаудера, как это сделано, например, в аналогичной ситуации в статье [10]. Для доказательства разрешимости исходной краевой задачи (1)–(4) (см. определение 3) совершим предельный переход по параметру ε, отличающему задачу (11)–(13) от исходной задачи (1)–(4). Для этого сначала получим оценки, равномерные по параметру ε.

3. Оценки решений приближенной задачи

Умножим (12) скалярно на $\boldsymbol{u}_i$, проинтегрируем по Ω (пользуясь граничными условиями (13)) и просуммируем по $i = 1, \dots, N$, выведем

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\, d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \rho_i |\boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon m}{2|\Omega|} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int\limits_{\Omega} |\boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x} + \tag{14}$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \int\limits_{\Omega} |\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j|^2\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega} p(\rho) \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i\, d\boldsymbol{x}.$$

Проинтегрируем теперь уравнение (11) по области Ω, получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} \rho\, d\boldsymbol{x} = m. \tag{15}$$

Умножая далее уравнение (11) на функцию $G'(\rho)$, где $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, после элементарных преобразований приходим к равенству

$$\varepsilon G''(\rho) |\nabla \rho|^2 - \varepsilon \mathrm{div}(G'(\rho) \nabla \rho) + (\rho G'(\rho) - G(\rho)) \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} + \tag{16}$$
$$+ \mathrm{div}\, (G(\rho) \boldsymbol{v}) + \varepsilon \rho G'(\rho) = \varepsilon \frac{m}{|\Omega|} G'(\rho).$$

Полагая в (16) $G(\rho) = (\rho + l) \int\limits_{1}^{\rho+l} \frac{p(\eta)}{\eta^2}\, d\eta$ с произвольным $l \in (0, 1]$, выведем равенство

$$\int\limits_{\Omega} p(\rho + l)\, \mathrm{div} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = l \int\limits_{\Omega} \frac{p(\rho + l)}{\rho + l} \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} + l \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{1}^{\rho+l} \frac{p(\eta)}{\eta^2}\, d\eta \right) \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} -$$
$$- \varepsilon \int\limits_{\Omega} \rho \left(\int\limits_{1}^{\rho+l} \frac{p(\eta)}{\eta^2}\, d\eta \right) d\boldsymbol{x} - \varepsilon \int\limits_{\Omega} \frac{\rho p(\rho + l)}{\rho + l}\, d\boldsymbol{x} - \varepsilon \int\limits_{\Omega} \frac{p'(\rho + l)}{\rho + l} |\nabla \rho|^2\, d\boldsymbol{x} +$$
$$+ \varepsilon \frac{m}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{1}^{\rho+l} \frac{p(\eta)}{\eta^2}\, d\eta \right) d\boldsymbol{x} + \varepsilon \frac{m}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} \frac{p(\rho + l)}{\rho + l}\, d\boldsymbol{x},$$

из которого после элементарных оценок (с учетом (5) и замечания 1) и последующего предельного перехода по $l \to +0$ следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega} p(\rho)\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} \leqslant \tag{17}$$
$$\leqslant -\frac{\varepsilon}{2} \left(B_1 + \frac{1}{c_1 \gamma} \right) \int\limits_{\Omega} \rho^{\gamma}\, d\boldsymbol{x} + B_6(B_1, B_2, B_3, B_4, c_1, c_2, m, \gamma, \Omega).$$

Из соотношения (14), в силу (10) и (17), следует соотношение

$$B_5\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{\varepsilon m}{2|\Omega|}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int\limits_{\Omega}|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\left(B_1+\frac{1}{c_1\gamma}\right)\int\limits_{\Omega}\rho^{\gamma}\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}\int\limits_{\Omega}|\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{u}_j|^2\,d\boldsymbol{x}\leqslant\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}+B_6,$$

из которого ввиду неравенств

$$B_5\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}\geqslant B_7(B_5,\Omega)\sum_{i=1}^{N}\|\boldsymbol{u}_i\|^2_{W_2^1(\Omega)},$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}\leqslant\frac{B_7}{2}\sum_{i=1}^{N}\|\boldsymbol{u}_i\|^2_{W_2^1(\Omega)}+B_8\left(B_7,\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\},\Omega\right)\|\rho\|^2_{L_{\frac{6}{5}}(\Omega)}$$

получаем оценку

$$\sum_{i=1}^{N}\|\boldsymbol{u}_i\|^2_{W_2^1(\Omega)}\leqslant B_9\left(B_6,B_7,B_8\right)\left(\|\rho\|^2_{L_{\frac{6}{5}}(\Omega)}+1\right).\tag{18}$$

Далее умножим уравнения (12) скалярно на $\boldsymbol{\varphi}$, где $\boldsymbol{\varphi}$ — решение задачи

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}=\rho^{\gamma}-\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\rho^{\gamma}\,d\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{\varphi}|_{\partial\Omega}=0,$$

и проинтегрируем по Ω, это даст тождества

$$\begin{gathered}\alpha_i\int\limits_{\Omega}p(\rho)\rho^{\gamma}\,d\boldsymbol{x}=\\ =\frac{\alpha_i}{|\Omega|}\left(\int\limits_{\Omega}p(\rho)\,d\boldsymbol{x}\right)\left(\int\limits_{\Omega}\rho^{\gamma}\,d\boldsymbol{x}\right)+\int\limits_{\Omega}\left(\mathbb{S}_i-\frac{1}{2}\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i\right):(\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi})\,d\boldsymbol{x}+\\ +\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[\rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i]\cdot\boldsymbol{\varphi}\,d\boldsymbol{x}-\int\limits_{\Omega}(\boldsymbol{J_i}+\rho_i\boldsymbol{f}_i)\cdot\boldsymbol{\varphi}\,d\boldsymbol{x}+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}\,d\boldsymbol{x}+\\ +\frac{\varepsilon}{2}\frac{m\alpha_i}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}\,d\boldsymbol{x},\qquad i=1,\ldots,N.\end{gathered}\tag{19}$$

Благодаря равномерным по ε оценкам (верным для всех $i=1,\ldots,N$)

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_6(\Omega)}+\|\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\Omega)}\leqslant B_{10}(\Omega)\|\rho\|^{\gamma}_{L_{2\gamma}(\Omega)},$$

$$\|\mathbb{S}_i\|_{L_2(\Omega)}\leqslant B_{11}(B_9,\boldsymbol{\Lambda},\mathbf{M},N,\gamma,\Omega)\left(1+\|\rho\|_{L_{2\gamma}(\Omega)}\right),$$

$$\|\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i\|_{L_2(\Omega)}+\|\rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i\|_{L_{\frac{6}{5}}(\Omega)}\leqslant B_{12}(B_9,N,\gamma,\Omega)\|\rho\|_{L_{2\gamma}(\Omega)}\left(1+\|\rho\|^2_{L_{2\gamma}(\Omega)}\right),$$

$$\|\boldsymbol{J}_i+\rho_i\boldsymbol{f}_i\|_{L_2(\Omega)}\leqslant B_{13}\left(B_9,\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\},\{a_{ij}\},N,\gamma,\Omega\right)\left(1+\|\rho\|_{L_{2\gamma}(\Omega)}\right),$$

из (19) следует, что (см. (9), (15))

$$\|\rho\|^{2\gamma}_{L_{2\gamma}(\Omega)} \leqslant B_{14}\left(\|\rho\|^{\gamma+3}_{L_{2\gamma}(\Omega)} + \|\rho\|^{\frac{4\gamma(\gamma-1)}{2\gamma-1}}_{L_{2\gamma}(\Omega)} + 1\right),$$

где B_{14} зависит от $B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12}, B_{13}, \{\alpha_i\}, m, c_1, c_2, \gamma$ и Ω. Отсюда получаем оценку

$$\|\rho\|_{L_{2\gamma}(\Omega)} \leqslant B_{15}(B_{14}, \gamma), \tag{20}$$

и ввиду (18), также и оценки

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{W^1_2(\Omega)} \leqslant B_{16}(B_9, B_{15}, \gamma, \Omega), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{21}$$

Наконец, из (11), (13), (20) и (21) следует, что

$$\sqrt{\varepsilon}\,\|\nabla\rho\|_{L_2(\Omega)} \leqslant B_{17}\left(B_{15}, B_{16}, N, m, \gamma, \Omega\right). \tag{22}$$

4. Предельный переход всюду кроме давления

Далее решения задач (11)–(13) будем обозначать с употреблением индекса ε.

В силу оценок (20)–(22), из семейства ρ^ε, $\boldsymbol{u}_i^\varepsilon$, $i = 1, \ldots, N$, $\varepsilon \in (0, 1]$, решений краевых задач (11)–(13) может быть выделена последовательность (которую мы обозначим так же), для которой при $\varepsilon \to +0$ имеют место сходимости

$$\boldsymbol{u}_i^\varepsilon \to \boldsymbol{u}_i \ \text{ слабо в } \ \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{23}$$

$$\rho^\varepsilon \to \rho \ \text{ слабо в } \ L_{2\gamma}(\Omega), \ \ \rho \geqslant 0 \ \text{ п. в. в } \ \Omega, \tag{24}$$

$$\varepsilon\nabla\rho^\varepsilon \to 0 \ \text{ сильно в } \ L_2(\Omega), \tag{25}$$

$$p(\rho^\varepsilon) \to \overline{p(\rho)} \ \text{ слабо в } \ L_2(\Omega), \quad \overline{p(\rho)} \geqslant 0 \ \text{ п. в. в } \ \Omega, \tag{26}$$

где $\overline{p(\rho)}$ обозначает слабый предел последовательности $p(\rho^\varepsilon)$ в $L_2(\Omega)$. Заметим, что из (23) сразу следуют сильные сходимости $\boldsymbol{u}_i^\varepsilon \to \boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \ldots, N$ в $L_{\sigma_2}(\Omega)$ при всех $\sigma_2 \in [1, 6)$.

Таким образом получаем, что предельные функции ρ, $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \ldots, N$, удовлетворяют уравнению

$$\int\limits_\Omega \rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\psi\,d\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall\,\psi \in W^1_{\frac{6\gamma}{5\gamma-3}}(\Omega) \tag{27}$$

— это слабая форма уравнения (1), в котором $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_j\boldsymbol{u}_j$; уравнениям

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega \Big((\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) : (\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}_i) + \alpha_i\overline{p(\rho)}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}_i + \boldsymbol{J}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}_i + \rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}_i\Big)\,d\boldsymbol{x} = \\ = \int\limits_\Omega \mathbb{S}_i : (\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}_i)\,d\boldsymbol{x} \quad \forall\,\boldsymbol{\varphi}_i \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N\end{gathered} \tag{28}$$

— это слабая форма уравнений (3), в которых $\rho_i = \alpha_i\rho$, $\boldsymbol{J}_i = \sum\limits_{j=1}^{N} a_{ij}(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i)$, $\mathbb{S}_i = \sum\limits_{j=1}^{N} (\lambda_{ij}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j))$, $i = 1,\ldots,N$, а вместо $p(\rho)$ пока стоит $\overline{p(\rho)}$; а также интегральному условию (4) для плотности.

При переходе к пределу по $\varepsilon \to +0$ в уравнениях (12) использовались следующие тождества (первое из которых опирается на (11)):

$$\frac{\varepsilon}{2}\rho_i^\varepsilon \boldsymbol{u}_i^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\frac{m}{|\Omega|}\alpha_i\boldsymbol{u}_i^\varepsilon + \frac{1}{2}\rho_i^\varepsilon(\boldsymbol{v}^\varepsilon\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i^\varepsilon + \frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{v}^\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_i^\varepsilon) = \tag{29}$$
$$= \varepsilon\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{u}_i^\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{v}^\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_i^\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}(\Delta\rho_i^\varepsilon)\boldsymbol{u}_i^\varepsilon, \quad i = 1,\ldots,N,$$

$$(\Delta\rho_i^\varepsilon)\boldsymbol{u}_i^\varepsilon = \operatorname{div}\left((\nabla\rho_i^\varepsilon)\otimes\boldsymbol{u}_i^\varepsilon\right) - (\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i^\varepsilon, \quad i = 1,\ldots,N. \tag{30}$$

Замечание 6. При выводе формул (27) и (28) сначала берутся бесконечно гладкие пробные функции, а затем (после предельного перехода по ε) стандартным образом доказывается справедливость этих формул для всех пробных функций указанного класса.

Замечание 7. Как известно из теории уравнений переноса и Навье–Стокса (см., например, [12], Раздел 3.1.3, стр. 159–163), все решения уравнения (27) (т. е. (1)) рассматриваемого класса автоматически являются так называемыми ренормализованными решениями, т. е. удовлетворяют ренормализованному уравнению (1), формально получающемся из (1) умножением на $b'(\rho)$ для всех функций b определенного класса (а именно, обладающими достаточной гладкостью и свойствами роста в нуле и на бесконечности — более точно эти свойства будут сформулированы в разделе 5.4).

5. Предельный переход в давлении

Для завершения предельного перехода по $\varepsilon \to +0$ осталось доказать, что

$$\overline{p(\rho)} = p(\rho) \ \text{ п. в. в } \ \Omega. \tag{31}$$

5.1. **Предварительные построения.** Рассмотрим так называемые эффективные вязкие потоки компонент смеси

$$\alpha_i p(\rho) - \sum_{j=1}^{N}\nu_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j, \qquad i = 1,\ldots,N,$$

соответствующие величины для регуляризованной задачи

$$\alpha_i p(\rho^\varepsilon) - \sum_{j=1}^{N}\nu_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j^\varepsilon, \qquad i = 1,\ldots,N,$$

и их слабые пределы в $L_2(\Omega)$:

$$\alpha_i\overline{p(\rho)} - \sum_{j=1}^{N}\nu_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j, \qquad i = 1,\ldots,N.$$

Будем использовать оператор Δ^{-1}, действующий по формуле $(\Delta^{-1}v)(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{v(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$, применяя его к функциям $v \in L_{\sigma_3}(\Omega)$, $\sigma_3 > \frac{3}{2}$, продолженным нулем за пределы Ω. При этом $\Delta^{-1} : L_{\sigma_3}(\Omega) \to W^2_{\sigma_3}(\Omega)$, и $\Delta \circ \Delta^{-1} = I$.

Умножим уравнения (12) (для функций $\boldsymbol{u}_i^\varepsilon$, ρ_i^ε, $i = 1,\dots,N$) скалярно на функцию $\tau\boldsymbol{r}^\varepsilon$, где $\boldsymbol{r}^\varepsilon = \nabla\Delta^{-1}\rho^\varepsilon$, и

$$\tau \in C_0^\infty(\Omega), \tag{32}$$

и проинтегрируем по Ω. Тогда, учитывая (29) и (30), придем к равенствам

$$\begin{gathered}
\int\limits_\Omega \Big(\tau\alpha_i p(\rho^\varepsilon)\rho^\varepsilon - \mathbb{S}_i^\varepsilon : [\nabla \otimes (\tau\boldsymbol{r}^\varepsilon)]\Big)\,d\boldsymbol{x} = \\
= -\alpha_i \int\limits_\Omega p(\rho^\varepsilon)\nabla\tau \cdot \boldsymbol{r}^\varepsilon\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \tau(\rho_i^\varepsilon \boldsymbol{v}^\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_i^\varepsilon) : (\nabla \otimes \boldsymbol{r}^\varepsilon)\,d\boldsymbol{x} - \\
- \int\limits_\Omega (\rho_i^\varepsilon \boldsymbol{v}^\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_i^\varepsilon) : ((\nabla\tau) \otimes \boldsymbol{r}^\varepsilon)\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \tau(\boldsymbol{J}_i^\varepsilon + \rho_i^\varepsilon \boldsymbol{f}_i) \cdot \boldsymbol{r}^\varepsilon\,d\boldsymbol{x} + \\
+ \varepsilon \int\limits_\Omega \tau\rho_i^\varepsilon \boldsymbol{u}_i^\varepsilon \cdot \boldsymbol{r}^\varepsilon\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega ((\nabla\rho_i^\varepsilon) \otimes \boldsymbol{u}_i^\varepsilon) : (\nabla \otimes (\tau\boldsymbol{r}^\varepsilon))\,d\boldsymbol{x} + \\
+ \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega \tau[(\nabla\rho_i^\varepsilon \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_i^\varepsilon] \cdot \boldsymbol{r}^\varepsilon\,d\boldsymbol{x}, \quad i = 1,\dots,N.
\end{gathered} \tag{33}$$

С другой стороны, приняв в (28) в качестве тестовых функций векторные поля $\boldsymbol{\varphi}_i = \tau\boldsymbol{r}$ (см. (32)), где $\boldsymbol{r} = \nabla\Delta^{-1}\rho$, выводим тождества

$$\begin{gathered}
\int\limits_\Omega \Big(\tau\alpha_i \overline{p(\rho)}\rho - \mathbb{S}_i : [\nabla \otimes (\tau\boldsymbol{r})]\Big)\,d\boldsymbol{x} = \\
= -\alpha_i \int\limits_\Omega \overline{p(\rho)}\nabla\tau \cdot \boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \tau(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{x} - \\
- \int\limits_\Omega (\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : ((\nabla\tau) \otimes \boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \tau(\boldsymbol{J}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i) \cdot \boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{x}, \quad i = 1,\dots,N.
\end{gathered} \tag{34}$$

Из (24) и компактности вложения $W^1_{2\gamma}(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ следует, что $\boldsymbol{r}^\varepsilon \to \boldsymbol{r}$ при $\varepsilon \to +0$ в $C(\overline{\Omega})$.

Вычитая из (33) равенства (34) и переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим соотношения

$$(35)\quad \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\Omega \Big(\tau\alpha_i p(\rho^\varepsilon)\rho^\varepsilon - \mathbb{S}_i^\varepsilon : [\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}^\varepsilon)]\Big)\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \Big(\tau\alpha_i\overline{p(\rho)}\rho - \mathbb{S}_i : [\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r})]\Big)\,d\boldsymbol{x} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\Omega \tau\Big((\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i):(\nabla\otimes\boldsymbol{r}) - (\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{v}^\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_i^\varepsilon):(\nabla\otimes\boldsymbol{r}^\varepsilon)\Big)\,d\boldsymbol{x},\quad i=1,\ldots,N.$$

5.2. **Анализ** (35)**.** Докажем, что правая часть (35) равна нулю. Для этого введем в рассмотрение оператор Comm, действующий по формуле

$$\mathrm{Comm}(\boldsymbol{\beta},\zeta) = \zeta(\nabla\mathrm{div}\Delta^{-1}\boldsymbol{\beta}) - (\nabla\otimes\nabla\Delta^{-1}\zeta)\boldsymbol{\beta},$$

о котором известно (см. [2], [7], [12], [14]) следующее: если $\boldsymbol{\beta}_k \to \boldsymbol{\beta}$ слабо в $L_{\sigma_4}(\Omega)$, $\zeta_k \to \zeta$ слабо в $L_{\sigma_5}(\Omega)$, где $\dfrac{1}{\sigma_4}+\dfrac{1}{\sigma_5}<1$, то $\mathrm{Comm}(\boldsymbol{\beta}_k,\zeta_k)\to\mathrm{Comm}(\boldsymbol{\beta},\zeta)$ слабо в $L_{\sigma_6}(\Omega)$, где $\dfrac{1}{\sigma_6}=\dfrac{1}{\sigma_4}+\dfrac{1}{\sigma_5}$.

Преобразуем правую часть (35) (учитывая равенство (27)):

$$(36)\quad \begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\Omega \tau\Big((\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i):(\nabla\otimes\boldsymbol{r}) - (\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{v}^\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_i^\varepsilon):(\nabla\otimes\boldsymbol{r}^\varepsilon)\Big)\,d\boldsymbol{x} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\Omega \boldsymbol{v}^\varepsilon\cdot\mathrm{Comm}(\tau\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{u}_i^\varepsilon,\rho^\varepsilon)\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i,\rho)\,d\boldsymbol{x} - \\ &- \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\Omega \tau\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{u}_i^\varepsilon\cdot\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}(\rho^\varepsilon\boldsymbol{v}^\varepsilon)\,d\boldsymbol{x},\quad i=1,\ldots,N. \end{aligned}$$

Из (23) и (24) следует, что $\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{u}_i^\varepsilon \to \rho_i\boldsymbol{u}_i$, $i=1,\ldots,N$ слабо в $L_{\sigma_7}(\Omega)$ при всех $\sigma_7 < \dfrac{6\gamma}{\gamma+3}$, а следовательно при всех $\sigma_7 \in \left(\dfrac{2\gamma}{2\gamma-1},\dfrac{6\gamma}{\gamma+3}\right)$ имеем

$$\mathrm{Comm}(\tau\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{u}_i^\varepsilon,\rho^\varepsilon)\to\mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i,\rho),\quad i=1,\ldots,N,\qquad \text{слабо в } L_{\sigma_8}(\Omega),$$

где $\sigma_8 = \dfrac{2\sigma_7\gamma}{2\gamma+\sigma_7}$. Поскольку вложение $L_{\sigma_8}(\Omega)$ в $W_2^{-1}(\Omega)$ компактно (при дополнительном условии $\sigma_7 > \dfrac{6\gamma}{5\gamma-3}$, заведомо совместном с наложенными выше), то $\mathrm{Comm}(\tau\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{u}_i^\varepsilon,\rho^\varepsilon)\to\mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i,\rho)$, $i=1,\ldots,N$ сильно в $W_2^{-1}(\Omega)$. Полученные соотношения вместе с (23) влекут равенства

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\Omega \boldsymbol{v}^\varepsilon\cdot\mathrm{Comm}(\tau\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{u}_i^\varepsilon,\rho^\varepsilon)\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i,\rho)\,d\boldsymbol{x},\quad i=1,\ldots,N.$$

Из уравнения (11) получим тождество

$$\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}(\rho^\varepsilon\boldsymbol{v}^\varepsilon) = \varepsilon\nabla\Delta^{-1}\Delta\rho^\varepsilon + \varepsilon\nabla\Delta^{-1}\left(\frac{m}{|\Omega|}-\rho^\varepsilon\right),$$

из которого ясно, что последнее слагаемое в правой части (36) обращается в нуль. При этом использовано представление $\varepsilon\nabla\Delta^{-1}\Delta\rho^\varepsilon = \nabla\otimes\nabla\Delta^{-1}(\varepsilon\nabla\rho^\varepsilon)$, соотношение (25) и ограниченность оператора Рисса $\nabla \otimes \nabla \Delta^{-1}$ в $L_2(\Omega)$ (см., например, [4], стр. 348).

Таким образом, из (35) и (36) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\Omega}\Big(\tau\alpha_i p(\rho^\varepsilon)\rho^\varepsilon-\mathbb{S}_i^\varepsilon:[\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}^\varepsilon)]\Big)\,d\boldsymbol{x}= \tag{37}$$
$$=\int\limits_{\Omega}\Big(\tau\alpha_i\overline{p(\rho)}\rho-\mathbb{S}_i:[\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r})]\Big)\,d\boldsymbol{x},\quad i=1,\dots,N.$$

5.3. **Соотношения для эффективных вязких потоков.** Ввиду того, что при $i=1,\dots,N$ имеем (см. (7))

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\Omega}\mathbb{S}_i^\varepsilon:[\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}^\varepsilon)]\,d\boldsymbol{x}-\int\limits_{\Omega}\mathbb{S}_i:[\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r})]\,d\boldsymbol{x}=\\
=\lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{j=1}^N\nu_{ij}\int\limits_{\Omega}\tau\rho^\varepsilon\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_j^\varepsilon\,d\boldsymbol{x}-\sum_{j=1}^N\nu_{ij}\int\limits_{\Omega}\tau\rho\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_j\,d\boldsymbol{x}+\\
+\lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{j=1}^N\nu_{ij}\int\limits_{\Omega}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_j^\varepsilon)\Big(2\boldsymbol{r}^\varepsilon\cdot\nabla\tau+(\Delta\tau)\Delta^{-1}\rho^\varepsilon\Big)\,d\boldsymbol{x}-\\
-\sum_{j=1}^N\nu_{ij}\int\limits_{\Omega}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_j)\Big(2\boldsymbol{r}\cdot\nabla\tau+(\Delta\tau)\Delta^{-1}\rho\Big)\,d\boldsymbol{x}-\\
-\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\Omega}\mathbb{S}_i^\varepsilon:\Big(\nabla\otimes[(\nabla\tau)\Delta^{-1}\rho^\varepsilon]\Big)\,d\boldsymbol{x}+\int\limits_{\Omega}\mathbb{S}_i:\Big(\nabla\otimes[(\nabla\tau)\Delta^{-1}\rho]\Big)\,d\boldsymbol{x},\end{gathered}\tag{38}$$

и поскольку последние четыре интеграла в (38) взаимно уничтожаются, равенства (37) превращаются в следующие соотношения для эффективных вязких потоков компонент смеси:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\Omega}\tau\rho^\varepsilon\left(\alpha_i p(\rho^\varepsilon)-\sum_{j=1}^N\nu_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j^\varepsilon\right)\,d\boldsymbol{x}= \tag{39}$$
$$=\int\limits_{\Omega}\tau\rho\left(\alpha_i\overline{p(\rho)}-\sum_{j=1}^N\nu_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j\right)\,d\boldsymbol{x},$$

$i=1,\dots,N$. Тем самым, мы можем вывести из (39) такое следствие:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\Omega}\tau\rho^\varepsilon\Big(\nu_0 p(\rho^\varepsilon)-\mathrm{div}\boldsymbol{v}^\varepsilon\Big)\,d\boldsymbol{x}=\int\limits_{\Omega}\tau\rho\Big(\nu_0\overline{p(\rho)}-\mathrm{div}\boldsymbol{v}\Big)\,d\boldsymbol{x}, \tag{40}$$

где $\nu_0=(\mathbf{N}^{-1}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})>0$ (см. (7)), а $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_N)^T$.

Ввиду произвольности τ (см. (32)), равенство (40) выражает соотношение

$$\nu_0\overline{\rho p(\rho)}-\overline{\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}}=\nu_0\rho\overline{p(\rho)}-\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}\quad\text{п. в. в }\ \Omega. \tag{41}$$

5.4. **Завершающий анализ.** Согласно замечанию 7, выполнены ренормализованные уравнения (1). В частности, для функций $b \in C[0,\infty)\bigcap C^1(0,\infty)$ таких, что

$$\left|b'(s)\right| \leqslant B_{18}s^{-\sigma_9} \quad \forall\, s \in (0,1], \quad \sigma_9 < 1,$$

$$\left|b'(s)\right| \leqslant B_{19}s^{\sigma_{10}} \quad \forall\, s \geqslant 1, \quad -1 < \sigma_{10} \leqslant \gamma - 1,$$

выполнены в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ уравнения $\operatorname{div}(b(\rho)\boldsymbol{v}) + (\rho b'(\rho) - b(\rho))\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$, откуда при $b(s) = s\ln s$ следует равенство

$$\int\limits_{\Omega} \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} = 0. \tag{42}$$

С другой стороны, умножая (11) на $\ln(\rho^\varepsilon + l) + \dfrac{\rho^\varepsilon}{\rho^\varepsilon + l}$, $l \in (0,1]$, интегрируя результат по Ω, затем проводя элементарные оценки, и наконец переходя к пределу (сначала по $l \to +0$, а затем по $\varepsilon \to +0$), получаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \overline{\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}}\,d\boldsymbol{x} \leqslant 0. \tag{43}$$

Комбинируя (42) и (43), приходим к неравенству

$$\int\limits_{\Omega} \left(\overline{\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}} - \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right) d\boldsymbol{x} \leqslant 0. \tag{44}$$

Ввиду монотонности функции $p(\cdot)$ верно поточечное неравенство

$$(\rho^\varepsilon - \rho)(p(\rho^\varepsilon) - p(\rho)) \geqslant 0,$$

благодаря которому и формулам (24), (26) выводим

$$\liminf_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{B} (p(\rho^\varepsilon)\rho^\varepsilon - p(\rho^\varepsilon)\rho)\,d\boldsymbol{x} = \tag{45}$$
$$= \liminf_{\varepsilon\to0} \int\limits_{B} (p(\rho^\varepsilon) - p(\rho))(\rho^\varepsilon - \rho)\,d\boldsymbol{x} + \lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{B} p(\rho)(\rho^\varepsilon - \rho)\,d\boldsymbol{x} \geqslant 0,$$

где B — произвольный шар в Ω, поэтому $\overline{p(\rho)\rho} \geqslant \overline{p(\rho)}\rho$ п. в. в Ω.

Дальнейшие рассуждения следуют такой цепочке:

- из (41), (45) вытекает, что $\overline{\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}} - \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v} \geqslant 0$ п. в. в Ω;
- привлекая (44), получаем $\overline{\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}} - \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ п. в. в Ω;
- теперь из (41) выводим $\overline{p(\rho)\rho} = \overline{p(\rho)}\rho$ п. в. в Ω;
- наконец, временно продолжая нечетным образом функцию p на промежуток $(-\infty, 0]$ (сохраняя за ней прежнее обозначение), т. е. принимая, что $p(s) := p(|s|)\operatorname{sign}(s)$, с целью применения леммы 3.39, стр. 188 из [12], приходим к требуемому соотношению (31).

Итак, показано, что функции ρ, $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \ldots, N$ являются слабым решением задачи (1)–(4) (см. определение 3). Теорема 4 доказана.

References

[1] A.M. Blokhin, V.N. Dorovskii, *Problems of mathematical modeling in the theory of a multivelocity continuum*, Nauka, Novosibirsk, 1994.

[2] R. Coifman, Y. Meyer, *On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals*, Trans. Am. Math. Soc., **212** (1975), 315–331. Zbl 0324.44005

[3] V.N. Dorovskii, Yu.V. Perepechko, *Phenomenological description of two-velocity media with relaxing shear stresses*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **33**:3 (1992), 403–409.

[4] E. Feireisl, A. Novotný, *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids*, Advances in Mathematical Fluid Mechanics, Birkhäuser, Basel, 2009. Zbl 1176.35126

[5] J. Frehse, S. Goj, J. Málek, *On a Stokes-like system for mixtures of fluids*, SIAM J. Math. Anal., **36**:4 (2005), 1259–1281. Zbl 1084.35057

[6] J. Frehse, W. Weigant, *On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids*, Appl. Math., Praha, **53**:4 (2008), 319–345. Zbl 1199.76026

[7] P.-L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2: Compressible models*, Clarendon Press, Oxford, 1998. Zbl 0908.76004

[8] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence*, Methods Appl. Anal., **20**:2 (2013), 179–196. Zbl 1290.35203

[9] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solubility of steady boundary value problem for the equations of polytropic motion of multicomponent viscous compressible fluids*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **13** (2016), 664–693. Zbl 1370.35232

[10] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solvability of the regularized steady problem of the spatial motions of multicomponent viscous compressible fluids*, Sib. Math. J., **57**:6 (2016), 1044–1054. Zbl 1361.35148

[11] R.I. Nigmatulin, *Dynamics of multiphase media, Vol. 1*, Hemisphere, New York, 1990.

[12] A. Novotný, I. Straškraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, **27**, Oxford University Press, Oxford, 2004.

[13] K.L. Rajagopal, L. Tao, *Mechanics of mixtures*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, **35**, World Scientific, Singapore, 1995. Zbl 0941.74500

[14] L. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, in Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symp., Vol. 4, Edinburgh 1979, Res. Notes Math., **39**, Pitman, Boston etc., 1979, 136–212. Zbl 0437.35004

Alexander Evgenyevich Mamontov
Federal State Institution of Higher Education «Siberian State University of Telecommunications and Information Science»
st. Kirova, 86,
630102 Novosibirsk, Russia
and
Laboratory for Mathematical and Computer Modeling,
in Natural and Industrial Systems,
Faculty of Mathematics & Information Technologies,
Federal State Institution of Higher Education «Altai State University»,
pr. Lenina 61,
656049 Barnaul, Russia
Email address: aem@hydro.nsc.ru

Dmitriy Alexeyevich Prokudin
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
pr. Lavrent'eva, 15,
630090 Novosibirsk, Russia
and
Chair of Further Mathematics,
Federal State Institution of Higher Education «Siberian State University of Telecommunications and Information Science»
st. Kirova, 86,
630102 Novosibirsk, Russia
Email address: prokudin@hydro.nsc.ru