S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 19, №2, стр. 972–983 (2022) УДК 519.2
DOI 10.33048/semi.2022.19.081 MSC 60G70

СРЕДНЕЕ ЧИСЛО СОВМЕСТНЫХ СКАЧКОВ МНОГОМЕРНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ ПРИЗНАКОВ ЧАСТИЦ В МАРКОВСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССАХ. СЛУЧАЙ КОПУЛЫ КЛЕЙТОНА

А.В. ЛЕБЕДЕВ AND А.В.НАЗМУТДИНОВА

Abstract. The paper continues the long-term studies of the authors on the extremes of random particles scores in branching processes. A theorem is proved that allows one to find the mean number of joint jumps of multivariate maxima of particle scores in Markov branching processes with continuous time, including processes with immigration. Examples are analyzed where the dependence of scores is described by Clayton copula.

Keywords: Markov branching processes, branching processes with immigration, multivariate extremes, Clayton copula

1. Введение

Интересным направлением современных исследований на стыке теории экстремумов и теории ветвящихся процессов является изучение максимумов случайных признаков частиц в ветвящихся процессах. Фундаментальными в этой области являются работы [1, 2], в которых изучались максимумы независимых случайных признаков частиц в ветвящихся процессах с дискретным временем. А именно, рассматривались классические процессы Гальтона–Ватсона (см. о них в [3]), и предполагалось дополнительно, что каждая частица обладает некоторым случайным (числовым) признаком. Имеется в виду, что каждой

Lebedev, A.V., Nazmutdinova, A.V., Mean number of joint jumps of multivariate extremes of particle scores in Markov branching processes. Clayton copula case.

Поступила 25 мая 2022 г., опубликована 10 декабря 2022 г.

частице ставится в соответствие случайная величина (признак) или случайный вектор (набор признаков). Изучалось поведение максимумов признаков по поколениям или за все время.

Говоря о максимумах по популяциям растущего объема, в качестве исторической предшественницы можно указать модель Йенга [4], в которой популяция растет детерминированным образом (в геометрической прогрессии).

В случае живых организмов в качестве признаков речь может идти о размерах, весе и других характеристиках. В частности, в [1] речь шла о росте людей, а в [2] упоминалось разведение скаковых лошадей, с призовыми очками в качестве признака. В [4] речь шла о спортивных рекордах на Олимпийских играх. Заметим также, что формальные признаки в модели могут быть функционально или статистически связаны с реальными признаками в приложениях, а не совпадать с ними буквально.

В качестве недавних работ о многомерных максимумах и рекордах признаков частиц (по поколениям) в ветвящихся процессах с дискретным временем укажем [5, 6] (где можно также найти более обширную литературу по тематике).

Далее мы сосредоточимся на марковских ветвящихся процессах с непрерывным временем. Рассмотрим соответствующие процессы текущего максимума одного или нескольких признаков частиц (покомпонентно). Предполагается, что признаки частицы определяются в момент ее рождения и не меняются в течение жизни. Тогда процессы максимума имеют скачкообразный характер. Максимум может меняться только в моменты деления частиц, а также в моменты иммиграции, если она допускается. При этом скачки могут происходить вверх и вниз, по одному или нескольким признакам. Далее будем называть *совместными* скачками такие события, когда происходят скачки по всем признакам одновременно.

Пусть частицы имеют $d \geq 2$ признаков. Обозначим через $M_i(t)$ максимум i-го признака частиц, существующих в момент $t > 0$, тогда совместный скачок вниз происходит, если $M_i(t) < M_i(t-0)$ для всех $1 \leq i \leq d$, а совместный скачок вверх, если $M_i(t) > M_i(t-0)$ для всех $1 \leq i \leq d$.

Предполагается, что признаки одной частицы могут быть зависимы, а признаки разных частиц независимы (последнее, в отличие от работ [5, 6]).

В работе [7] рассматривались максимумы одного или двух признаков частиц в бессмертных марковских ветвящихся процессах с непрерывным временем, и в том числе, найдены предельные интенсивности скачков вверх и вниз максимумов одного признака. В работах [8, 9] изучались максимумы признаков частиц сначала в бессмертных надкритических процессах с непрерывным временем, а затем в критических процессах с иммиграцией. В том числе, найдены предельные интенсивности совместных скачков максимумов признаков вверх и вниз (при некоторых условиях на зависимость двух признаков частицы), вычислено среднее число совместных скачков максимумов вверх и вниз (в случае независимости признаков частицы и произвольного числа признаков). В [10] получены аналогичные результаты для многомерных рекордов (когда максимумы берутся по признакам не только существующих на данный момент частиц, но и всех умерших до этого момента). В настоящей работе развиваются идеи этих исследований.

Нас будут интересовать средние числа совместных скачков максимумов вверх и вниз за все время. Доказана общая теорема, позволяющая находить эти характеристики в виде рядов. Конкретные результаты получены на примерах некоторых надкритических и критических процессов, в том числе с иммиграцией, в случае копулы Клейтона.

Копула Клейтона выбрана из тех соображений, что данное семейство копул замкнуто относительно перехода к максимумам $k \geq 2$ независимых одинаково распределенных векторов, для таких копул известна плотность распределения Кендалла, средние числа совместных скачков оказываются конечны и находятся в явном виде.

Копулы в анализе двумерных рекордов последовательностей независимых одинаково распределенных векторов использовались в [11]. В качестве нетривиального примера была рассмотрена копула Фарли–Гумбеля–Моргенштерна (ФГМ), для которой результат получается только численно.

Далее для краткости под максимумами векторов (описывающих наборы признаков частиц) будем иметь в виду *покомпонентные* максимумы этих векторов.

2. Основные предположения, обозначения, определения и факты

2.1. Ветвящиеся процессы. Рассмотрим сначала процессы без иммиграции. Следуя [3, гл. 5], рассмотрим марковский ветвящийся процесс $Z(t)$, $t \geq 0$, с непрерывным временем: пусть процесс начинается с одной частицы, продолжительность жизни каждой частицы имеет показательное распределение с параметром λ, каждая частица оставляет после себя случайное число потомков с производящей функцией

$$h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k, \quad s \in (0,1),$$

где h_k, $k \geq 0$, — вероятность иметь k потомков. Предполагаем, что среднее число непосредственных потомков конечно. Для каждой частицы ее продолжительность жизни и число потомков независимы, для разных частиц их продолжительности жизни и числа потомков также независимы.

Тогда производящая функция $f(t,s)$ числа частиц $Z(t)$ в момент времени $t \geq 0$ является единственным решением уравнения

$$\int_s^{f(t,s)} \frac{du}{h(u)-u} = \lambda t, \quad s \in (0,1). \tag{1}$$

В случае процесса с иммиграцией будем предполагать, что в начальный момент времени нет частиц, остальные предположения остаются в силе, и кроме того, через независимые показательно распределенные промежутки времени с параметром λ_0 появляются (иммигрируют) группы новых частиц случайного размера с производящей функцией

$$g(s) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k s^k, \quad s \in (0,1),$$

где g_k, $k \geq 1$, — вероятность появления k частиц. Предполагаем, что средний размер группы иммигрантов конечен.

Тогда производящая функция $f(t,s)$ числа частиц $Z(t)$ в момент времени $t \geq 0$ описывается формулой

$$f(t,s) = \exp\left\{\int\limits_0^t \lambda_0(g(f_0(u,s)) - 1)du\right\}, \tag{2}$$

где $f_0(t,s)$ — производящая функция числа частиц в соответствующем процессе без иммиграции (начинающегося с одной частицы), описываемая формулой (1).

Таким образом, в обоих случаях (процессов без иммиграции и с иммиграцией) производящая функция числа частиц обозначается нами через $f(t,s)$, но выражается она при этом разными формулами: (1) и (2), а формула (1), которая для процесса без иммиграции задает $f(t,s)$, для процесса с иммиграцией задает вспомогательную функцию $f_0(t,s)$.

2.2. Копулы. Пусть каждая частица обладает $d \geq 2$ случайными признаками, постоянными в течение всей жизни, причем признаки разных частиц независимы, а признаки одной частицы могут быть зависимы между собой и имеют совместную функцию распределения $F(x_1,\ldots,x_d)$ с непрерывными маргинальными распределениями.

Важную роль в получении и формулировке результатов будет играть современная теория копул. В качестве учебника по теории копул укажем книгу [13].

Копулой C называется многомерная функция распределения на $[0,1]^d$, $d \geq 2$, все маргинальные распределения которой являются равномерными на $[0,1]$. Согласно теореме Скляра, любая многомерная функция распределения в $\mathbf{R}^d$ представима в виде

$$F(x_1,\ldots,x_d) = C(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d)),$$

где F_i, $1 \leq i \leq d$, — маргинальные функции распределения, C — некоторая копула. Таким образом, всякому многомерному распределению можно поставить в соответствие его копулу. Если маргинальные распределения непрерывны, то такое представление не только существует, но и единственно.

В теории копул известны различные семейства копул. Так, *копула Клейтона* имеет вид

$$C\left(u_1,\ldots,u_d\right) = \left(u_1^{-\theta} + \ldots + u_d^{-\theta} - d + 1\right)^{-1/\theta}, \quad \theta > 0. \tag{3}$$

При $\theta \to 0$ в пределе получаем копулу независимости

$$C\left(u_1,\ldots,u_d\right) = u_1 \ldots u_d.$$

Для примера, пусть $F_1(x) = F_2(x) = \exp\{-e^{-x}\}$ (стандартное распределение Гумбеля) и $d = 2$, тогда из (3) получаем

$$F(x_1,x_2) = \left\{\exp\{\theta e^{-x_1}\} + \exp\{\theta e^{-x_2}\} - 1\right\}^{-1/\theta}, \quad \theta > 0.$$

Распределением Кендалла копулы C называется распределение случайной величины

$$\zeta_C = C\left(U_1,\ldots,U_d\right),$$

где случайный вектор $(U_1,\ldots,U_d)$ имеет в качестве совместной функции распределения копулу C. Функцию распределения Кендалла копулы C будем обозначать через $K_C(w)$, $w \in [0,1]$, а плотность через $\kappa_C(w)$, $w \in [0,1]$.

В [12] показано, что для копулы Клейтона (3) верно

$$\kappa_C(w) = \frac{1}{(d-1)!}\prod_{i=1}^{d-1}(1+i\theta)\left(\frac{1-w^\theta}{\theta}\right)^{d-1}, \quad w\in[0,1], \quad d\geq 2. \tag{4}$$

Преобразование Меллина случайной величины ζ_C обозначим через

$$\varphi_C(s) = \mathbf{E}\zeta_C^s = \int_0^1 w^s\,dK_C(w), \quad s>0. \tag{5}$$

Ранее оно было введено и использовалось в [6] (с другим обозначением).

2.3. Полигамма-функция и ряды. Напомним понятие *полигамма-функции* порядка $m\geq 0$ [14]. Так называют $(m+1)$-ую производную логарифма гамма-функции:

$$\psi_m(z) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\ln\Gamma(z),$$

для которой также имеет место представление

$$\psi_m(z) = (-1)^{m+1}m!\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(z+n)^{m+1}}, \quad m\geq 1.$$

Эта функция активно использовалась в [10]. Далее будет встречаться в основном функция $\psi(z)=\psi_0(z)$, называемая также *дигамма-функцией* или просто *ψ-функцией*. Нам пригодится формула из [15, 8.363.3]:

$$\psi(\beta)-\psi(\alpha) = \sum_{n=0}^\infty\left(\frac{1}{\alpha+n}-\frac{1}{\beta+n}\right), \quad \alpha,\beta>0,$$

из которой следует

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{\psi(\beta)-\psi(\alpha)}{\beta-\alpha}, \quad \alpha\neq\beta, \quad \alpha,\beta>0. \tag{6}$$

3. Вспомогательные результаты

Рассмотрим следующее преобразование:

$$C_{(k)}(u_1,\dots,u_d) = C^k(u_1^{1/k},\dots,u_d^{1/k}), \quad k\geq 2. \tag{7}$$

Оно эквивалентно переходу от копулы C одного случайного вектора к копуле $C_{(k)}$ максимума k независимых одинаково распределенных случайных векторов (с тем же распределением).

Лемма 1. *Если C — копула Клейтона с параметром $\theta>0$, то $C_{(k)}$ — тоже копула Клейтона, с параметром $\theta_k=\theta/k$, $k\geq 2$.*

Утверждение леммы элементарно следует из формулы (3).

Обозначим через $\phi_C(k,l)$, $k,l\geq 1$, вероятность того, что максимум k случайных векторов превзойдет по всем компонентам максимум l других случайных векторов, если все векторы независимы в совокупности и одинаково распределены с непрерывными компонентами и копулой C.

Лемма 2. *Для всех $k,l\geq 1$ верно равенство*

$$\phi_C(k,l) = \varphi_{C_{(k)}}(l/k). \tag{8}$$

Доказательство. С помощью замен $u_i = F_i(x_i)$ и $v_i = u_i^k$, $1 \le i \le d$, получаем

$$\phi_C(k,l) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} F^l(x_1,\dots,x_d) dF^k(x_1,\dots,x_d) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} C^l(F_1(x_1),\dots,F_d(x_d)) dC^k(F_1(x_1),\dots,F_d(x_d)) =$$
$$= \int_0^1 \dots \int_0^1 C^l(u_1,\dots,u_d) dC^k(u_1,\dots,u_d) =$$
$$= \int_0^1 \dots \int_0^1 C_{(k)}^{l/k}(v_1,\dots,v_d) dC_{(k)}(v_1,\dots,v_d) =$$
$$= \int_0^1 w^{l/k} dK_{C_{(k)}}(w) = \varphi_{C_{(k)}}(k/l).$$

□

При этом естественно также положить $\phi_C(0,l) = 0$ и $\phi_C(k,0) = 1$ для $k,l \ge 1$, что согласуется с (8). Значение $\phi_C(0,0)$ не определено.

Лемма 3. *Для копулы Клейтона C с параметром $\theta > 0$ верно*

$$\phi_C(k,l) = \prod_{i=0}^{d-1} \frac{k+i\theta}{k+l+i\theta}, \quad k,l \ge 0, \quad k+l > 0. \tag{9}$$

Доказательство. С помощью замены переменной $y = w^{\theta_k}$, вычисляем

$$\phi_C(k,l) = \int_0^1 w^{\frac{l}{k}} \, dK_{C_{(k)}}(w) = \frac{1}{(d-1)!\theta_k^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1}(1+i\theta_k) \int_0^1 w^{l/k}(1-w^{\theta_k})^{d-1} dw =$$
$$= \frac{1}{(d-1)!\theta_k^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1}(1+i\theta_k) \int_0^1 y^{\frac{l/k+1-\theta_k}{\theta_k}} (1-y)^{d-1} dy =$$
$$= \frac{1}{(d-1)!\theta_k^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1}(1+i\theta_k) \mathrm{B}\left(\frac{l+k}{k\theta_k}, d\right) = \frac{1}{(d-1)!\theta_k^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1}(1+i\theta_k) \cdot \frac{(d-1)!\Gamma(\frac{l+k}{k\theta_k})}{\Gamma(\frac{l+k}{k\theta_k}+d)} =$$
$$= \frac{1}{(d-1)!\theta_k^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1}(1+i\theta_k) \cdot \frac{(d-1)!\Gamma(\frac{l+k}{k\theta_k})}{(\frac{l+k}{k\theta_k}+d-1)\dots\frac{l+k}{k\theta_k}\Gamma(\frac{l+k}{k\theta_k})} = \prod_{i=0}^{d-1} \frac{k+ik\theta_k}{l+k+ik\theta_k}.$$

Используя $k\theta_k = \theta$, получаем (9).

□

Введем обозначения

$$S_{k,a,b} = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_C(k, a(n-1)+b), \quad S_{k,a,b}^* = \sum_{n=1}^{\infty} n\phi_C(k, a(n-1)+b), \tag{10}$$

где a,b,k — неотрицательные целые числа.

Лемма 4. *Для копулы Клейтона C с параметром $\theta > 0$ верно*

$$S_{k,a,b} = \frac{k(k+\theta)}{\theta a}\left(\psi\left(\frac{k+b+\theta}{a}\right) - \psi\left(\frac{k+b}{a}\right)\right), \quad S_{k,a,b}^* = +\infty \tag{11}$$

при $d = 2$ и $S_{k,a,b}, S_{k,a,b}^* < \infty$ при $d \ge 3$.

Доказательство. Суммируя выражения (9) при $d = 2$ из леммы 3, с учетом формулы (6) получаем

$$S_{k,a,b} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k+\theta)}{(k+a(n-1)+b)(k+a(n-1)+b+\theta)} =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k(k+\theta)}{(am+b+k)(am+b+k+\theta)} = \frac{k(k+\theta)}{a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\frac{b+k}{a})(m+\frac{b+k+\theta}{a})} =$$
$$= \frac{k(k+\theta)}{\theta a} \left(\psi\left(\frac{k+b+\theta}{a}\right) - \psi\left(\frac{k+b}{a}\right)\right).$$

Далее, заметим, что из (9) следует

$$\phi_C(k, a(n-1)+b) \sim M(k,a,b) n^{-d}, \quad n \to \infty,$$

где $M(k,a,b)$ — некоторый коэффициент, поэтому $S_{k,a,b} < \infty$ при $d \geq 2$, а $S^*_{k,a,b} < \infty$ только при $d \geq 3$. □

Понятно, что аналогичным образом можно получить явные выражения для $S_{k,a,b}$ и $S^*_{k,a,b}$ (в виде линейных комбинаций значений функции ψ) при $d \geq 3$, однако формулы оказываются всё более громоздкими.

Вернемся к ветвящимся процессам.

Пусть $f_n(t) = \mathbf{P}(Z(t) = n)$, $n \geq 0$ (см. раздел 2.1). Обозначим

$$I_n = \int_0^{\infty} f_n(t)\, dt, \quad n \geq 0.$$

Такие величины имеют смысл среднего времени (возможно, бесконечного), которое проводит процесс $Z(t)$ в состоянии n за все время. Понятно, что если на некотором интервале $(0, s_0)$ сходится степенной ряд

$$I(s) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n s^n,$$

то его можно найти как

$$I(s) = \int_0^{\infty} f(t,s)\, dt.$$

Однако здесь существует проблема: возможно, не все I_n, $n \geq 0$, конечны. Далее мы столкнемся со случаем, когда $I_0 = +\infty$, а I_n, $n \geq 1$, конечны. В этом случае для получения I_n, $n \geq 1$, можно использовать функцию

$$I^0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n s^n = \int_0^{\infty} (f(t,s) - f(t,0))\, dt.$$

4. Основные результаты

Будем рассматривать ветвящиеся процессы из раздела 2.1. Обозначим через J_+ среднее число совместных скачков вверх, и через J_- среднее число совместных скачков вниз. Оба числа могут быть бесконечными.

Теорема 1. *Для ветвящихся процессов из раздела 2.1 без иммиграции верно*

$$J_+ = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} n h_k I_n \phi_C(k,n), \quad J_- = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n h_k I_n \phi_C(1, k+n-1), \tag{12}$$

а для процессов с иммиграцией к J_+ *добавляется слагаемое*

$$\Delta J_+ = \lambda_0 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_k I_n \phi_C(k,n) \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала процессы без иммиграции.

Пусть в момент t существует n частиц (что происходит с вероятностью $f_n(t)$), тогда за малый промежуток времени одно деление происходит с вероятностью $\lambda n\delta + o(\delta)$, более одного — с вероятностью $o(\delta)$, $\delta \to 0$. Пусть при делении образовалось k частиц (что происходит с вероятностью h_k). Совместный скачок вверх происходит в момент деления, если максимум признаков k новых частиц превосходит максимум признаков старых и поделившейся частиц (всего n частиц). Таким образом, вклад случая с данными n и k в среднее число совместных скачков вверх (от деления) за малый промежуток времени δ составляет $\lambda n h_k f_n(t)\phi_C(k,n)\delta + o(\delta)$, откуда интегрируя по времени и суммируя по всем возможным n и k, получаем J_+ из (12).

Совместный скачок вниз происходит в момент деления, если делится частица, превосходящая по своим признакам как все $n-1$ старые (остальные имевшиеся на момент деления), так и все k новые частицы (если они появляются), в сумме $k+n-1$ частиц. Таким образом, вклад случая с данными n и k в среднее число совместных скачков вниз (от деления) за малый промежуток времени δ составляет $\lambda n h_k f_n(t)\phi_C(1,k+n-1)\delta + o(\delta)$, откуда интегрируя по времени и суммируя по всем возможным n и k, получаем J_- из (12).

Допустим теперь иммиграцию. Поступление одной группы частиц за малый промежуток времени δ происходит с вероятностью $\lambda_0\delta + o(\delta)$, более одной — с вероятностью $o(\delta)$, $\delta \to 0$. Пусть поступила группа k частиц (что происходит с вероятностью g_k). Совместный скачок вверх происходит в момент иммиграции, если максимум признаков k новых частиц (иммигрантов) превосходит максимум признаков n старых (имевшихся на момент иммиграции). Таким образом, вклад случая с данными n и k в среднее число совместных скачков вверх (от иммиграции) за малый промежуток времени составляет $\lambda_0 g_k f_n(t)\phi_C(k,n)\delta + o(\delta)$, откуда интегрируя по времени и суммируя по всем возможным n и k, получаем ΔJ_+ из (13).

На скачки вниз иммиграция не влияет, поскольку при появлении новых частиц максимум признаков не уменьшается. □

5. Примеры

5.1. Надкритический процесс (1 или 2 потомка). Рассмотрим процесс, в котором деление происходит по закону: 2 частицы с вероятностью p или 1 частица с вероятностью $1-p$, $0 < p \le 1$.

Из уравнения (1) получаем производящую функцию

$$f(t,s) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{s} - 1)e^{\lambda pt}}.$$

Интегрирование дает

$$I(s) = \int_0^\infty \frac{1}{1 + (\frac{1}{s}-1)e^{\lambda pt}}\,dt = \frac{\lambda pt - \ln((\frac{1}{s}-1)e^{\lambda pt} + 1)}{\lambda p}\Bigg|_0^\infty = -\frac{\ln(1-s)}{\lambda p},$$

так что

$$I_n = \frac{1}{\lambda p n}, \quad n \geq 1.$$

Применяя теорему 1, находим

$$J_+ = \frac{1-p}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_C(1,n) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_C(2,n) = \frac{1-p}{p} S_{1,1,1} + S_{2,1,1},$$
$$J_- = \frac{1-p}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_C(1,n) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_C(1,n+1) = \frac{1-p}{p} S_{1,1,1} + S_{1,1,2}.$$

В случае копулы Клейтона при $d = 2$ по лемме 4 получаем

$$\begin{aligned} J_+ &= \frac{1-p}{p} \cdot \frac{1+\theta}{\theta} \left(\psi(2+\theta) - \psi(2)\right) + \frac{2(2+\theta)}{\theta} \left(\psi(3+\theta) - \psi(3)\right), \\ J_- &= \frac{1-p}{p} \cdot \frac{1+\theta}{\theta} \left(\psi(2+\theta) - \psi(2)\right) + \frac{1+\theta}{\theta} \left(\psi(3+\theta) - \psi(3)\right). \end{aligned} \tag{14}$$

В пределе при $\theta \to 0$ (независимость признаков) получаем

$$J_+ = \frac{1-p}{p} \psi_1(2) + 4\psi_1(3), \quad J_- = \frac{1-p}{p} \psi_1(2) + \psi_1(3),$$

где

$$\psi_1(2) = \frac{\pi^2}{6} - 1 \approx 0.645, \quad \psi_1(3) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} \approx 0.395,$$

что согласуется с результатами [8] при $p = 1$, $d = 2$.

На рис. 1 представлен график (14) при $p = 1/2$.

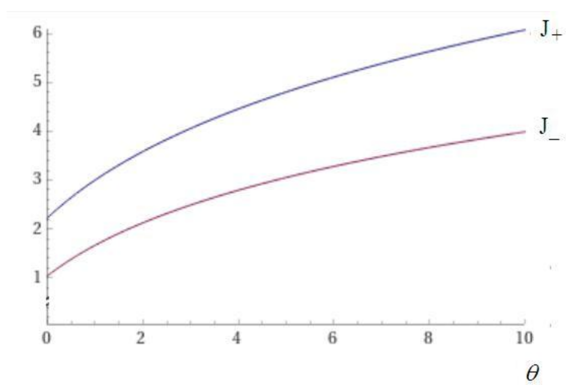

Рис. 1. График средних чисел совместных скачков вверх и вниз в примере 5.1.

5.2. Критический процесс (0, 1 или 2 потомка). Рассмотрим процесс, в котором деление происходит по закону: 2 частицы или 0 частиц с вероятностью $p/2$, а 1 частица с вероятностью $1 - p$, $0 < p \leq 1$.

Из уравнения (1) получаем производящую функцию

$$f(t,s) = 1 - \frac{2(1-s)}{\lambda p t(1-s) + 2}. \tag{15}$$

В данном случае $I_0 = +\infty$, поэтому используем интеграл

$$I^0(s) = \int_0^\infty (f(t,s) - f(t,0))\,dt = -2\int_0^\infty \left(\frac{1-s}{\lambda pt(1-s)+2} - \frac{1}{\lambda pt+2}\right)dt =$$
$$= -\frac{2}{\lambda p}\ln\frac{\lambda pt(1-s)+2}{\lambda pt+2}\bigg|_0^\infty = -\frac{2}{\lambda p}\ln(1-s),$$

откуда

$$I_n = \frac{2}{\lambda pn}, \quad n \geq 1.$$

Применяя теорему, находим

$$J_+ = \frac{2(1-p)}{p}\sum_{n=1}^\infty \phi_C(1,n) + \sum_{n=1}^\infty \phi_C(2,n) = \frac{2(1-p)}{p}S_{1,1,1} + S_{2,1,1},$$
$$J_- = \sum_{n=1}^\infty \phi_C(1,n-1) + \frac{2(1-p)}{p}\sum_{n=1}^\infty \phi_C(1,n) + \sum_{n=1}^\infty \phi_C(1,n+1) =$$
$$= S_{1,1,0} + \frac{2(1-p)}{p}S_{1,1,1} + S_{1,1,2}.$$

В случае копулы Клейтона при $d=2$ здесь также можно найти J_+ и J_- по лемме 4, аналогично примеру 5.1.

5.3. Критический процесс (0, 1 или 2 потомка) с иммиграцией. Рассмотрим процесс, в котором иммиграция происходит по 1 частице, а деление по закону: 2 частицы или 0 частиц с вероятностью $p/2$, а 1 частица с вероятностью $1-p$, $0 < p \leq 1$.

Из формулы (15) для $f_0(t,s)$ и (2) получаем производящую функцию

$$f(t,s) = \left(\frac{\lambda p(1-s)t}{2} + 1\right)^{-2\lambda_0/(\lambda p)}.$$

При $\lambda_0 > \lambda p/2$ интегрированием получаем

$$I(s) = \int_0^\infty \left(\frac{\lambda p(1-s)t}{2} + 1\right)^{-2\lambda_0/(\lambda p)} dt = \frac{2}{2\lambda_0 - \lambda p}\cdot\frac{1}{1-s},$$

откуда

$$I_n = \frac{2}{2\lambda_0 - \lambda p}, \quad n \geq 0.$$

В противном случае, при $\lambda_0 \leq \lambda p/2$, получаем $J_+ = J_- = +\infty$.

Применяя теорему, находим

$$J_+ = \frac{\lambda p}{2\lambda_0 - \lambda p}\left(\frac{2(1-p)}{p}\sum_{n=1}^\infty n\phi_C(1,n) + \sum_{n=1}^\infty n\phi_C(2,n)\right) + \lambda_0\sum_{n=0}^\infty \phi_C(1,n) =$$
$$= \frac{\lambda p}{2\lambda_0 - \lambda p}\left(\frac{2(1-p)}{p}S^*_{1,1,1} + S^*_{2,1,1}\right) + \lambda_0(S_{1,1,1} + 1),$$
$$J_- = \frac{\lambda p}{2\lambda_0 - \lambda p}\left(\sum_{n=1}^\infty n\phi_C(1,n-1) + \frac{2(1-p)}{p}\sum_{n=1}^\infty n\phi_C(1,n) + \sum_{n=1}^\infty n\phi_C(1,n+1)\right) =$$
$$= \frac{\lambda p}{2\lambda_0 - \lambda p}\left(S^*_{1,1,0} + \frac{2(1-p)}{p}S^*_{1,1,1} + S^*_{1,1,2}\right).$$

Как следует из леммы 4, в случае копулы Клейтона при $d=2$ здесь $J_+ = J_- = +\infty$, а при $d \geq 3$ величины J_+ и J_- оказываются конечны.

5.4. Надкритический процесс с постоянным числом потомков. Рассмотрим ветвящийся процесс, в котором каждая частица имеет ровно k потомков, $k \geq 2$. В этом случае найти J_+ и J_- еще легче.

Воспользуемся тем фактом, что при каждом делении число частиц увеличивается на $k-1$, а значит, перед n-ым делением число частиц составляет $(k-1)(n-1)+1$, а после него $(k-1)(n-1)+k$. Поскольку за все время происходит бесконечное число делений, получаем

$$J_+ = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_C(k, (k-1)(n-1)+1) = S_{k,k-1,1},$$
$$J_- = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_C(1, (k-1)(n-1)+k) = S_{1,k-1,k}.$$

В случае копулы Клейтона при $d = 2$ по лемме 4 получаем

$$J_+ = \frac{k(k+\theta)}{\theta(k-1)} \left(\psi\left(\frac{k+1+\theta}{k-1}\right) - \psi\left(\frac{k+1}{k-1}\right)\right),$$
$$J_- = \frac{1+\theta}{\theta(k-1)} \left(\psi\left(\frac{k+1+\theta}{k-1}\right) - \psi\left(\frac{k+1}{k-1}\right)\right),$$

откуда

$$\frac{J_+}{J_-} = \frac{k(k+\theta)}{1+\theta}.$$

В пределе при $\theta \to 0$ (независимость признаков) получаем:

$$J_+ = \frac{k^2}{(k-1)^2}\psi_1\left(\frac{k+1}{k-1}\right), \quad J_- = \frac{1}{(k-1)^2}\psi_1\left(\frac{k+1}{k-1}\right).$$

. Отметим также, что при $\theta \sim \gamma k$, $k \to \infty$, $\gamma > 0$, имеет место сходимость

$$J_+ \to \frac{1+\gamma}{\gamma}(\psi(1+\gamma) - \psi(1)),$$

а при $\theta = o(k)$, $k \to \infty$, получаем $J_+ \to \psi_1(1) = \zeta(2) = \pi^2/6 \approx 1.645$.

References

[1] B.C. Arnold, J.A. Villaseñor, *The tallest man in the world*, in Nagaraja, H.N. (ed.) et al., *Statistical theory and applications. Papers in honor of Herbert A. David*, Springer, Berlin, 1996, 81–88. Zbl 0853.60066

[2] A.G. Pakes, *Extreme order statistics on Galton-Watson trees*, Metrika, **47**:2 (1998), 95–117. Zbl 1092.60505

[3] T. Harris, *The theory of branching processes*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1963. Zbl 0117.13002

[4] M.C.K. Yang, *On the distribution of the inter-record times in an increasing population*, J. Appl. Probab., **12**:1 (1975), 148–154. Zbl 0306.60068

[5] A.V. Lebedev, *Multivariate extremes of random scores of particles in branching processes with max-linear heredity*, Math. Notes, **105**:3 (2019), 376–384. Zbl 1415.60095

[6] A.V. Lebedev, *Records and increases of multivariate extremes of random particle scores in supercritical branching processes with max-linear heredity*, Theory Probab. Appl., **67**:2 (2022), 310–317. Zbl 7573887

[7] A.V. Lebedev, *Maxima of random particles scores in Markov branching processes with continuous time*, Extremes, **11**:2 (2008), 203–216. Zbl 1199.60309

[8] A.V. Karpenko, *New properties of bivariate maxima of particle scores in branching processes with continuous time*, Mosc. Univ. Math. Bull., **75**:1 (2020), 16–21. Zbl 1457.60133

[9] A.V. Karpenko, *Properties of two-dimensional maxima of particle scores in critical branching processes with immigration and continuous time*, Math. Notes, **109**:2 (2021), 231–240. Zbl 1480.60260

[10] A.V. Nazmutdinova, *Multivariate records of particle scores in supercticital branching processes with continuous time*, Mosc. Univ. Math. Bull., **77**:6 (2022), 14–20.

[11] I. Bayramoglu, *On the records of multivariate random sequences*, Metrika, **79**:6 (2016), 725–747. Zbl 1373.62211

[12] P. Barbe, C. Genest, K. Ghoudi, B. Rémillard, *On Kendall's process*, J. Multivariate Anal., **58**:2 (1996), 197–229. Zbl 0862.60020

[13] R. Nelsen, *An introduction to copulas*, Springer, New York, 2006. Zbl 1152.62030

[14] E.W. Weisstein, *Polygamma Function*, https://mathworld.wolfram.com/PolygammaFunction.html

[15] I.S. Gradshtein, I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Moscow, Fizmatgiz, 1963. (Academic Press, New York, 1980. Zbl 0918.65002)

Alexey Viktorovich Lebedev
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie gory, 1, Main Building, 16-02
119991, Moscow, Russia
Email address: avlebed@yandex.ru

Anna Valerievna Nazmutdinova
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie gory, 1, Main Building, 16-02
119991, Moscow, Russia
Email address: karpenki9@yandex.ru