S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 2, стр. 222–229 (2005) УДК 519.172.2

MSC 05C15

ОРИЕНТИРОВАННАЯ 7-РАСКРАСКА ПЛОСКИХ ГРАФОВ С ОБХВАТОМ НЕ МЕНЕЕ 7

О.В. БОРОДИН, А.О. ИВАНОВА

Abstract. An oriented k-colouring of digraph H is an oriented homomorphism of H into a k-vertex tournament. We prove that every orientation of a plane graph with girth at least 7 has an oriented 7-colouring.

1. Введение

Гомоморфизм графа G в граф H есть отображение φ из $V(G)$ в $V(H)$, которое сохраняет ребра (или дуги), т. е. $xy \in E(G) \Rightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E(H)$.

Гомоморфизмы графов изучались в литературе как обобщение раскраски графов. Заметим, что неориентированный граф G имеет k-раскраску если и только если G имеет гомоморфизм в полный граф K_k. Поэтому хроматическое число неориентированного графа G можно эквивалентно определить как минимальное число вершин в неориентированном графе H таком, что G имеет гомоморфизм в H.

В дальнейшем рассматриваются орграфы без параллельных дуг. *Ориентированная k-раскраска* орграфа H есть (ориентированный) гомоморфизм в k-вершинный орграф H'. *Ориентированное хроматическое число* $o(G)$ неориентированного графа G определяется как минимальное k, при котором каждая ориентация графа G имеет ориентированную k-раскраску. Если в определении ориентированного хроматического числа вместо "любая ориентация"мы скажем "некоторая ориентация", то получим определение обычного хроматического числа графа G. Но в то же время ориентированное хроматическое число графа почти всегда существенно отличается от его хроматического числа.

Borodin, O.V., Ivanova, A.O., An oriented 7-colouring of planar graphs with girth at least 7.

Работа первого автора поддержана грантом РФФИ 03-01-00796, а второго — 05-01-00816.

Поступила 4 октября 2005 г., опубликована 3 ноября 2005 г.

Например, существуют двудольные графы с произвольно большим ориентированным хроматическим числом.

Ориентированное хроматическое число было введено Курселем [7] при изучении логик второго порядка на графах. В частности, он доказал, что $o(G) \leq 3^{63}$ для любого плоского графа G. Кроме того, ориентированное хроматическое число и его связи с другими параметрами графа изучались в [12, 13, 10, 9, 8, 4, 5, 6]. В частности, граница 3^{63} была улучшена в [12] до 80 (с использованием ациклической 5-раскрашиваемости плоских графов, доказанной в [1]).

В [5] была доказана следующая теорема, усиливающая результаты работы [10] .

Теорема 1. *Пусть G — плоский граф обхвата g. Тогда*

(1) *если $g(G) \geq 14$, то $o(G) \leq 5$,*
(2) *если $g(G) \geq 8$, то $o(G) \leq 7$,*
(3) *если $g(G) \geq 6$, то $o(G) \leq 11$,*
(4) *если $g(G) \geq 5$, то $o(G) \leq 19$.*

Фактически мы доказываем, что каждая ориентация плоского графа G с обхватом не менее 7 допускает ориентированный гомоморфизм в циркулянт $C(7; 1, 2, 4)$, т. е. в турнир на вершинах $0, 1, \dots, 6$, в котором пара ij является дугой, если и только если $j - i$ равно $1, 2$ или 4 по $\mod 7$.

В [6] ограничение в п.1 этой теоремы было ослаблено с 14 до 13, а в [3] — до 12. С другой стороны, для плоских графов без треугольников, т.е. с обхватом не менее 4, в [5] не было получено никакой верхней оценки для ориентированного хроматического числа, лучшей, чем упоминавшаяся выше общая оценка 80, верная для любого плоского графа. П. Ошам [11] доказал, что плоские графы без треугольников имеют ориентированную 59-раскраску, а нами [2] эта оценка была улучшена до 47.

Основной результат настоящей работы состоит в усилении оценки в п. 2 теоремы 1.

Теорема 2. *Если плоский граф G имеет обхват не менее* 7*, то $o(G) \leq 7$.*

В разделе 2 мы изучаем строение гипотетического минимального контрпримера G_0 к этому утверждению. В последнем разделе мы используем перераспределение вкладов. А именно, присваивам каждой вершине v гипотетического минимального контрпримера G_0 первоначальный заряд $\frac{5}{2}\deg_{G_0}(v) - 7$ и после некоторого перераспределения заряда устанавливаем, что новый заряд каждой вершины неотрицателен, что противоречит тому факту, что сумма первоначальных зарядов отрицательна.

2. Доказательство теоремы 2

Не нарушая общности, можно считать, что G_0 связен. Из формулы Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ для G_0 получаем:

$$\sum_{v \in V} (\frac{5}{2}d(v) - 7) < 0, \tag{1}$$

где $d(v)$ — степень вершины v.

Положим *заряд* $\mu(v)$ каждой вершины v графа G_0 равным $\frac{5}{2}d(v) - 7$. Заметим, что заряд 2-вершины равен -2, заряд 3-вершины равен $\frac{1}{2}$, 4-вершины — 3 и т. д.

Мы опишем ряд структурных свойств орграфа G_0, опираясь на которые перераспределим заряды вершин так, чтобы их новые заряды стали неотрицательными. Поскольку сумма зарядов вершин сохраняется, мы получим противоречие с (1), что и завершит доказательство теоремы 2.

Прежде чем приступить к изучению структурных свойств графа G_0, мы отметим несколько важных для нас свойств гомоморфизмов в $C(7; 1, 2, 4)$.

Лемма 1. *В циркулянте $C(7;1,2,4)$ пусть R_i и L_i — множества преемников и предшественников вершины i, соответственно. Тогда:*

(1) *если $0 \le i \le 6$, то $|R_i| = |L_i| = 3$;*
(2) *если $0 \le i < j \le 6$, то $\min\{|R_i \cap R_j|, |R_i \cap L_j|, |L_i \cap R_j|, |L_i \cap L_j|\} \ge 1$.*

Иными словами, полустепени исхода и захода каждой вершины в $C(7; 1, 2, 4)$ равны 3; тем самым, если начало или конец дуги в графе G_0 окрашены, то конец или, соответственно, начало дуги могут быть окрашены в один из трех *допустимых* цветов. Если же в G_0 вершина v смежна с вершинами x, y, окрашенными в разные цвета, то при любой из 4 ориентаций ребер xv, yv, на v имеется хотя бы один общий допустимый цвет.

Ребром в ориентированном графе назовем пару вершин, соединенных дугой.

Лемма 2. *Если на конце ребра имеется 2 (или 3) допустимых цвета, то по этому ребру на другой его конец приходит не более 2 запретов (соответственно, 1 запрета).*

Иначе говоря, если на конце a ребра ab имеется множество $\Phi(a)$ допустимых цветов мощности 2 или 3, то на другом его конце b имеется множество $\Phi(b)$ из 5 или, соответственно, 6 цветов такое, что для каждого цвета из $\Phi(b)$ существует цвет из $\Phi(a)$, при котором ребро ab является окрашенным в соответствии с циркулянтом $C(7; 1, 2, 4)$ (с учетом ориентации).

2.1. Структурные свойства минимального контрпримера.

Лемма 3. $\delta(G_0) \ge 2$. □

Далее под *k-цепью* будем понимать цепь, состоящую из в точности k вершин степени 2.

Лемма 4. *В G_0 нет 1-цепей, кроме таких, в которых полустепени исхода и захода 2-вершины равны 1.*

Доказательство. Пусть в G_0 есть 1-цепь axb, в которой либо полустепень исхода, либо полустепень захода 2-вершины x равна 2. Удалим x и раскрасим полученный граф. Раскраску можно продолжить на вершину x, т. к. если цвета вершин a и b разные, то по п. 2 леммы 1 вершина x имеет допустимый цвет, а если цвета одинаковые, то x имеет 3 допустимых цвета по п. 1 той же леммы. □

Замечание 1. *Если концы 1-цепи окрашены в разные цвета, то 2-вершину этой цепи можно покрасить согласно лемме 1; если же концы окрашены одинаково, то 2-вершину раскрасить невозможно по определению гомоморфизма на граф без антипараллельных дуг. Другими словами, от каждого из концов 1-цепи на другой ее конец действует 1 запрет на выбор цвета.*

Лемма 5. *В G_0 нет ≥ 2-цепи.*

Доказательство. Пусть существует k-цепь $v_0, v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$, $k \geq 2$, где v_1, v_2, $\ldots, v_k$ — вершины степени 2, а степени вершин v_0, v_{k+1} не менее 3. Удалим вершины v_1, v_2 и возьмем ориентированную раскраску полученного графа (точнее гомоморфизм на $C(7; 1, 2, 4)$). Согласно лемме 1 вершины v_1 и v_2 имеют по три допустимых цвета при фиксированных цветах вершин v_0 и v_3, соответственно. По лемме 2 три допустимых на v_1 цвета дают не более одного запрета на выбор цвета для v_2, поэтому v_2 можно покрасить (имея выбор из двух цветов), а потом можем покрасить и v_1. □

Назовем $(k_1, k_2, \ldots)$-*вершиной* вершину, из которой исходят k_1-, k_2-, $\ldots$ цепи.

Лемма 6. *В G_0 нет $(1, 1, \geq 0)$-вершин.*

Доказательство. Пусть v — $(1, 1, \geq 0)$-вершина. Удалим v и две 2-вершины инцидентных ей 1-цепей. Согласно замечанию 1 по 1-цепям на v действует в сумме 2 запрета, а по третьей цепи — четыре запрета (т. к. допускается 3 цвета по п. 1 леммы 1). Следовательно найдется такой цвет для вершины v, при котором существует раскраска 2-вершин цепей, инцидентных v, согласованная с гомоморфизмом. □

Вершину типа $(1, 0, 0)$ назовем B-*вершиной.*

Лемма 7. *В G_0 нет B-вершины, смежной с двумя B-вершинами.*

Доказательство. Пусть B-вершина v_2 смежна с B-вершинами v_1 и v_3. Обозначим через u_1 и u_3 вершины степени не меньше 3, смежные с v_1 и v_3, соответственно, а через x_i — 2-вершину, смежную с v_i, где $1 \leq i \leq 3$. Удалим все вершины v_i и x_i и раскрасим полученный граф согласно $C(7; 1, 2, 4)$. Вершина v_1 получает 3 допустимых цвета от u_1 и 1 запрет по 1-цепи, итого имеет 2 допустимых цвета, поэтому по лемме 2 вершина v_1 дает 2 запрета на вершину v_2. То же самое верно и для вершины v_3. Кроме того, v_2 получает 1 запрет по 1-цепи, следовательно может быть покрашена в один из 7 цветов. Затем красятся в допустимые цвета сначала v_1 и v_3, а затем все 2-вершины. □

Ввиду леммы 7 мы будем подразделять B-вершины на T-*вершины* и S-*вершины* в зависимости от того, смежны они с B-вершиной или нет.

Замечание 2. *Пусть S-вершина v смежна с вершиной w. Тогда после удаления v и смежной с ней 2-вершины на w по ребру vw действуют 2 запрета.*

Действительно, v получает 3 допустимых цвета от смежной с ней $\geq$ 3-вершины, отличной от w, и 1 запрет по 1-цепи, т.е. 2 допустимых цвета. Поэтому утверждение следует из леммы 2.

Замечание 3. *Пусть T-вершина v_1 смежна с T-вершиной v_2 и отличной от нее ≥ 3-вершиной w. Тогда после удаления v_1, v_2 и смежных с ними 2-вершин на w по ребру v_1w действует не более 1 запрета.*

Действительно, v_2 получает 2 допустимых цвета как в замечании 2, а значит посылает 2 запрета по ребру v_2v_1. Таким образом на v_1 остается 4 допустимых цвета, поэтому снова можно воспользоваться леммой 2.

Лемма 8. *Нет 3-вершины смежной с двумя T-вершинами.*

Доказательство. Пусть 3-вершина v смежна с T-вершинами u_1, w_1 и $\geq$ 3-вершиной z. Обозначим T-вершины, смежные с u_1 и w_1, через u_2 и w_2, соответственно.

Удалим из G_0 *внутренние* вершины данной конфигурации, т. е. v, u_1, u_2, w_1, w_2 и смежные с ними 2-вершины. Поскольку $g(G_0) \geq 7$ и согласно лемме 5 в G_0 нет $\geq$ 2-цепей, то подграф на внутренних вершинах не содержит циклов. Поэтому, раскрасив полученный граф, можно строить допустимые множества от периферии к центру (вершине v). В итоге, согласно замечанию 3 каждая из двух ветвей по ребрам u_1v и w_1v дает на v по одному запрету, тогда как по ребру zv вершина v получает 3 допустимых цвета. □

Лемма 9. *Нет 3-вершины смежной с тремя B-вершинами.*

Доказательство. Пусть 3-вершина v смежна с B-вершинами u, w и x. Удалим v, u, x, w и смежные с ними 2-вершины.

Согласно замечанию 2 каждая из трех ветвей по ребрам uv, wv и xv дает на v по 2 запрета, поэтому можно покрасить в допустимые цвета сначала v, затем u, w и x, а затем смежные с ними 2-вершины. □

Назовем 3-вершину *P-вершиной*, если она смежна с S-вершиной и T-вершиной. Заметим, что согласно лемме 9 одна из соседок P-вершины не является B-вершиной, а согласно лемме 7 сама P-вершина также не является B-вершиной.

Замечание 4. *Пусть P-вершина v смежна с S-вершиной u, T-вершиной x и отличной от них вершиной w. Тогда после удаления v, u, x и смежных с ними 2-вершин на w по ребру vw действует не более 1 запрета.*

Действительно, по замечанию 2 на v по ребрам xv и uv действует по 2 запрета. Таким образом на v остается 3 допустимых цвета и теперь утверждение следует из леммы 2.

Лемма 10. *Нет 3-вершины смежной с P-вершиной и T-вершиной.*

Доказательство. Пусть 3-вершина v смежна с T-вершиной u_1, P-вершиной x и $\geq$ 3-вершиной z. В свою очередь, пусть x смежна с S-вершиной y и T-вершиной w_1. Обозначим T-вершину, смежную с u_1, через u_2.

Удалим из G_0 *внутренние* вершины данной конфигурации, т. е. v, u_1, u_2, x, y, w_1 и смежные с ними 2-вершины. Поскольку $g(G_0) \geq 7$ и согласно лемме 5 в G_0 нет $\geq$ 2-цепей, то подграф на внутренних вершинах не содержит циклов.

Согласно замечанию 3, T-вершина u_1 дает на v один запрет. Убедимся, что x дает на v один запрет. Действительно, каждая из B-вершин w_1, y имеет не меньше 2 допустимых цветов. В свою очередь, каждая из них дает на x два запрета, т. е. на x остается 3 допустимых цвета, что и требовалось доказать.

Итак, мы можем покрасить сначала v, а потом остальные внутренние вершины в допустимые для них цвета в следующем порядке: u_1, u_2, x, y, w_1, а затем — 2-вершины. □

Назовем 3-вершину *плохой*, если она является либо P-, либо B-вершиной. Следующая лемма является дополнением к лемме 9.

Лемма 11. *Нет 3-вершины смежной с P-вершиной и двумя плохими вершинами.*

Доказательство. Пусть 3-вершина v смежна с P-вершиной w и плохими вершинами u, x. Будем называть T-вершину *ближней* или *дальней*, если она находится от v на расстоянии 2 или 3, соответственно. *Внутренними* вершинами данной конфигурации будем считать следующие: саму вершину v и всех ее соседей, S-вершины на расстоянии 2 от v, ближние T-вершины, а также все 2-вершины, смежные с перечисленными. Нетрудно видеть, что не существует цикла из внутренних вершин, не проходящего через v.

Докажем, что не существует и цикла из внутренних вершин, проходящего через v. Действительно, любой такой цикл C должен содержать цепи P_1 и P_2, проходящие через v, концы которых соединены либо ребром, либо 1-цепью. Отсюда следует, что либо и P_1, и P_2 состоят не более чем из двух ребер, но тогда длина C не превосходит 6, что невозможно ввиду ограничения на обхват, либо хотя бы одна из цепей P_1 и P_2 заканчивается в 2-вершине. В этом случае сразу получаем противоречие с леммой 5, если обе цепи P_1, P_2 заканчиваются в 2-вершинах. Пусть P_1 заканчивается в 2-вершине, а P_2 — в 3-вершине. Тогда P_2 состоит не более чем из 2 ребер, а P_1 — не более чем из 3, а значит мы получаем цикл длины не больше 6, поскольку замыкание может происходить только по 0-цепи ввиду той же леммы 5.

Теперь утверждение леммы 11 следует из замечаний 2 и 4; действительно, вершина v получает от своих соседей не более $1 + 2 + 2 < 7$ запретов. □

Лемма 12. *Не существует 4-вершины, смежной с четырьмя 2-вершинами.*

Доказательство. Непосредственно следует из замечания 1. □

Назовем 4-вершину *R-вершиной*, если она смежна с тремя 2-вершинами.

Замечание 5. *Пусть R-вершина v смежна с $\geq$ 3-вершиной w. Тогда после удаления v и смежных с нею 2-вершин на w по ребру vw действует не более 1 запрета.*

Лемма 13. *Не существует R-вершины, смежной с B-вершиной.*

Доказательство. Пусть R-вершина v смежна с B-вершиной w. Удалим v, w и смежные с ними 2-вершины. По замечанию 5 на w действует 1 запрет по ребру vw, а также 1 запрет по 1-цепи и 4 запрета по 0-цепи, не ведущей в v. □

Лемма 14. *Не существует P-вершины, смежной с P- или R-вершиной.*

Доказательство. Пусть P-вершина u смежна с P- или R-вершиной w. Заметим, что циклов на внутренних вершинах конфигурации (а именно, u, w, B-вершинах на расстоянии 1 от u, w и смежных с ними 2-вершинах) быть не может. Согласно замечаниям 5, 2 и 4 вершина u получает $2+2+1 < 7$ запретов, т. е. внутренние вершины можно покрасить в допустимые цвета, начиная с u. □

2.2. **Завершение доказательства теоремы 2.** Перераспределим введенные выше заряды $\mu(v) = \frac{5}{2}d(v) - 7$ вершин графа G_0 по следующим правилам:

R1: Любая 2-вершина получает по 1 заряда от смежных с ней вершин.

R2: Каждая S-вершина получает по $\frac{1}{4}$ от двух смежных с ней $\geq$ 3-вершин, а каждая T-вершина получает заряд $\frac{1}{2}$ от своей соседки, не являющейся B-вершиной.

R3: Каждая P-вершина получает заряд $\frac{1}{4}$ от своей соседки, не являющейся B-вершиной.

После применения правила R1 заряд 2-вершины становится равным 0, т. к. по лемме 5 каждая 2-вершина смежна лишь $\geq$ 3-вершинами. Заметим также, что теперь заряд B-вершины равен $-\frac{1}{2}$, R-вершина имеет заряд 0, а заряды всех остальных вершин, ввиду лемм 6 и 12, не меньше $\frac{1}{2}$.

После применения правила R2 заряды S- и T-вершин становятся равными 0: первых — по определению, а вторых — по лемме 7. Заметим, что согласно определению P-вершины (смежной с S- и T-вершинами) и ввиду лемм 8 и 9 ее заряд становится равным $-\frac{1}{4}$. Убедимся, что заряды всех остальных вершин неотрицательны.

Действительно, пусть сначала $d(v) = 3$. Так как v не является B-вершиной, то ее заряд после применения правила R1 остается равным $\frac{1}{2}$. А поскольку она не является и P-вершиной, то доказываемое утверждение непосредственно следует из тех же лемм 8 и 9: v может давать не более чем двум S-вершинам по $\frac{1}{4}$, либо одной T-вершине заряд $\frac{1}{2}$.

Пусть $d(v) = 4$. Если v не является R-вершиной, то она может давать по $\frac{1}{2}$ каждой смежной с ней ≥ 3-вершине. Пусть теперь v является R-вершиной. Ввиду леммы 13 вершина v не участвует в правиле R2. Если же $d(v) \geq 5$, то v может давать по 1 каждой смежной с ней вершине, т. к. $\frac{5}{2}d(v) - d(v) \times 1 = \frac{3d(v)-14}{2} \geq 0$.

Убедимся, что после применения правила R3 заряды всех вершин становятся неотрицательными. Согласно лемме 14 никакая P-вершина не может фигурировать в роли передатчика заряда $\frac{1}{4}$ в правиле R3, поэтому заряд каждой P-вершины становится равным 0. Пусть v передает хотя бы один раз заряд $\frac{1}{4}$ P-вершине w по R3.

Пусть сначала $d(v) = 3$. Напомним, что v не является B-вершиной согласно лемме 9. Остается исключить случай, когда v передает $\frac{1}{2}$ либо дважды по $\frac{1}{4}$ своим соседям, отличным от w. Первое невозможно ввиду леммы 10, а второе — леммы 11.

Пусть теперь $d(v) = 4$, тогда по лемме 14 она не является R-вершиной, т.е. v смежна не более чем с двумя 2-вершинами, следовательно $\mu^*(v) \geq 3 - 2 \times 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$. Если же $d(v) \geq 5$, то v может давать по 1 каждой смежной с ней вершине.

Итак, после перераспределения зарядов по правилам R1–R3 заряды всех вершин становятся неотрицательными, что противоречит (1). Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] O.V. Borodin, On acyclic colorings of planar graphs, Discrete Math., 25 (1979) 211–236.

[2] О. В. Бородин, А. О. Иванова, Ориентированная раскраска плоских графов с обхватом не менее 4, в печати.

[3] О. В. Бородин, А. О. Иванова, А. В. Косточка, Ориентированная 5-раскраска разреженных графов, в печати.

[4] O.V. Borodin, A. V. Kostochka, J. Nešetřil, A. Raspaud and E. Sopena, On universal graphs for planar oriented graphs of a given girth, Discrete Mathematics, 188 (1998), 73–85.

[5] O.V. Borodin, A. V. Kostochka, J. Nešetřil, A. Raspaud and E. Sopena, On the maximum average degree and the oriented chromatic number of a graph, Discrete Mathematics, 206 (1999), 77–90.

[6] O.V. Borodin, S.-J. Kim, A. V. Kostochka, and D.B. West, Homomorphisms from sparse graphs with large girth, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 90 (2004), 147–159.

[7] B. Courselle, The monadic second order logic of graphs VI: On several representaitions of graphs by relational structures, Discrete Appl. Math. 54 (1994), 117–149.

[8] A. V. Kostochka, T. Łuczak, G. Simonyi and E. Sopena, On the minimum number of edges giving maximum oriented chromatic number, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 49 (1999), 179–182.
[9] A. V. Kostochka, E. Sopena and X. Zhu, Acyclic and oriented chromatic numbers of graphs, J. Graph Theory 24 (1997), 331–340.
[10] J. Nešetřil, A. Raspaud and E. Sopena, Colorings and girth of oriented planar graphs, Discrete Math. 165–166 (1–3) (1997), 519–530.
[11] Pascal Ochem. Oriented colorings of triangle-free planar graphs. Inf. Process. Lett., 92(2):71-76, 2004.
[12] A. Raspaud and E. Sopena, Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs, Inf. Processing Letters 51 (1994), 171–174.
[13] E. Sopena, The chromatic number of oriented graphs, J. Graph Theory 25 (1997), 191–205.

Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: brdnoleg@math.nsc.ru

Иванова Анна Олеговна
Якутский государственный университет им. М.К. Аммосова,
ул. Кулаковского 48,
677000, Якутск, Россия
E-mail address: shmgnanna@mail.ru