

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 20, №1, стр. 124–131 (2023)

УДК 512.54

DOI 10.33048/semi.2023.20.011

MSC 20G07

НЕПРИВОДИМЫЕ КОВРЫ ЛИЕВА ТИПА B_l , C_l И F_4 НАД ПОЛЯМИ

А.О. ЛИХАЧЕВА AND Я.Н. НУЖИН

АБСТРАКТ. V.M. Levchuk described irreducible carpets of Lie type of rank greater than 1 over the field F , at least one additive subgroup of which is an R -module, where F is an algebraic extension of the field R , in assumption that the characteristic of the field F is different from 0 and 2 for the types B_l , C_l , F_4 , and for the type G_2 it is different from 0, 2 and 3 (Algebra i Logika, 1983, 22, no. 5). It turned out that, up to conjugation by a diagonal element, all additive subgroups of such carpets coincide with one intermediate subfield between R and F . We solve a similar problem for carpets of types B_l , C_l , F_4 over a field of characteristic 0 and 2. It turned out that carpets appear in characteristic 2, which are parameterized by a pair of additive subgroups, and for types B_l and C_l one of these two additive subgroups may not be a field.

Keywords: Chevalley group, carpet of additive subgroups, carpet subgroup.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Φ — приведенная неразложимая система корней ранга l , $\Phi(F)$ — элементарная группа Шевалле типа Φ над полем F . Она порождается своими корневыми подгруппами $x_r(F) = \{x_r(t) \mid t \in F\}$, $r \in \Phi$. Подгруппы $x_r(F)$ абелевы и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in F$ справедливы соотношения

$$(1) \quad x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u).$$

Для целей данной работы можно рассматривать или универсальную, или присоединенную группу Шевалле. Назовем *ковром типа Φ ранга l над F* набор

ЛИХАЧЕВА, А.О., NUZHIN, YA.N., IRREDUCIBLE CARPETS OF LIE TYPE B_l , C_l AND F_4 OVER FIELDS.

© 2022 Лихачева А.О., Нужин Я.Н..

Работа поддержана РФФ (грант 22-21-00733).

Поступила 28 марта 2022 г., опубликована 26 февраля 2023 г.

аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$$

поля F с условием

$$(2) \quad C_{ij,rs} \mathfrak{A}_r^i \mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \text{ при } r, s, ir+js \in \Phi, i > 0, j > 0,$$

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$(3) \quad [x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j), \text{ } r, s, ir+js \in \Phi.$$

Всякий ковер \mathfrak{A} типа Φ над F определяет *ковровую* подгруппу

$$\Phi(\mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi \rangle$$

группы $\Phi(F)$, где $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная множеством M . Ковер \mathfrak{A} называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $\Phi(\mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, то есть если $\Phi(F) \cap x_r(F) = x_r(\mathfrak{A}_r)$ для всех $r \in \Phi$, и — *неприводимым*, если все его аддитивные подгруппы ненулевые.

Используемое здесь определение ковра дал В.М. Левчук [1] (см. также [2, вопрос 7.28]), он же в статье [3] описал неприводимые ковры ранга больше 1 над полем F , хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R -модулем, где F — алгебраическое расширение поля R , в предположении, что характеристика поля F отлична от 0 и 2 для типов B_l , C_l , F_4 , а для типа G_2 отлична от 0, 2 и 3. Оказалось, что с точностью до сопряжения диагональным элементом все аддитивные подгруппы этих ковров совпадают с одним промежуточным подполем между R и F . Назовем такие ковры *константными*. Мы решаем аналогичную задачу для ковров типа B_l , C_l , F_4 над полем характеристики 0 и 2. Выяснилось, что неконстантные ковры появляются только в характеристике 2 и они параметризуются парой аддитивных подгрупп, причем для типов B_l и C_l одна из этих двух аддитивных подгрупп может не быть полем и примеры таких ковров указаны в [4]. Появление неконстантных ковров для типов B_l , C_l , F_4 в характеристике 2 и для типа G_2 в характеристике 3 не было неожиданностью, и оно следует из работы второго автора [5], где для данных типов описаны группы лежащие между группами Шевалле над различными несовершенными полями, большее из которых является алгебраическим расширением меньшего (см. также замечание на стр. 84 в монографии Р. Стейнберга [6]). Тип G_2 в характеристиках 0, 2 и 3 рассмотрен в работах [7, 8]. Таким образом, в данной статье завершается описание неприводимых ковров ранга больше 1 над полем F , хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R -модулем, где F — алгебраическое расширение поля R . Для ранга 1 условие ковровости (2) вырождается, а ковровая подгруппа будет изоморфна некоторой подгруппе из $SL_2(F)$ или $PSL_2(F)$, порожденной элементарными трансвекциями, и в этом случае общие методы уже не работают.

Основным результатом статьи является

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер типа B_l ($l \geq 2$), C_l ($l \geq 2$) или F_4 над полем F , причем хотя бы одна аддитивная подгруппа \mathfrak{A}_r является R -модулем, где F — алгебраическое расширение поля R . Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом либо $\mathfrak{A}_r = P$ при всех

$r \in \Phi$, для некоторого подполя P поля F , либо $\text{char}F = 2$, существует несовершенное подполе K поля F и

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \text{ короткий корень} \\ Q, & \text{если } r \text{ длинный корень} \end{cases}$$

для двух различных бесконечных аддитивных подгрупп P и Q поля K , удовлетворяющих включениям

$$(4) \quad K^2 \leq Q < P \leq K.$$

и равенствам

$$(5) \quad P = P^{-1}, \quad Q = Q^{-1}.$$

Кроме того, ковер $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ является замкнутым.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Группа $\Phi(F)$ увеличивается до расширенной группы Шевалле при помощи всех диагональных элементов $h(\chi)$, где χ — F -характер целочисленной решетки корней $\mathbb{Z}\Phi$, то есть гомоморфизм аддитивной группы $\mathbb{Z}\Phi$ в мультипликативную группу F^* поля F [9, §7.1]. Любой F -характер χ однозначно задается значениями на фундаментальных корнях и для любых $r \in \Phi$ и $t \in F$

$$(6) \quad h(\chi)x_r(t)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t).$$

То, что равенство (6) естественным образом сочетается с определением ковра, утверждает следующая

Лемма 1. [10, лемма 1] *Сопрягая диагональным элементом $h(\chi)$ ковровую подгруппу $\Phi(\mathfrak{A})$, получим ковровую подгруппу*

$$h(\chi)\Phi(\mathfrak{A})h(\chi)^{-1} = \Phi(\mathfrak{A}'),$$

определяемую ковром

$$\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{A}'_r \mid r \in \Phi\}, \quad \text{где } \mathfrak{A}'_r = \chi(r)\mathfrak{A}_r.$$

Ковер \mathfrak{A}' из леммы 1 естественно назвать *сопряженным* к исходному ковра \mathfrak{A} и мы можем говорить о сопряженных коврах, не привязывая их к ковровым подгруппам. Поэтому допустимо такое высказывание. "С точностью до сопряжения диагональным элементом ковер \mathfrak{A} совпадает с ковром \mathfrak{A}' ."

Для системы корней типа A_2 условия ковровости имеют только один вид $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$ (с точностью до вращения, см. рисунок 1).

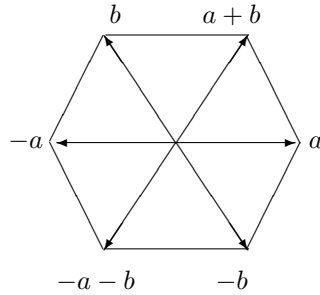


Рис. 1

Для системы корней Φ типа B_2 (см. рисунок 2) мы имеем три вида условий ковровости: $\mathfrak{A}_a \mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$, $\mathfrak{A}_a^2 \mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$ и $2\mathfrak{A}_a \mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$.

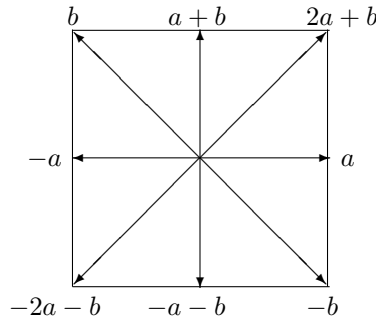


Рис. 2

Доказательство следующей леммы, фактически, повторяет рассуждения доказательства теоремы 2 из [11, стр. 530] для типа B_2 , но там накладывалась инвариантность относительно диагональной подгруппы порядка больше 3 и в действительности рассматривались замкнутые ковры, хотя понятие "ковер" не использовалось. Здесь работают только условия ковровости.

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — ковер типа B_2 над полем F , $\{a, b\}$ — фундаментальная система для Φ и пусть $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$. Тогда $t^n \in \mathfrak{A}_r$ для любого $t \in \mathfrak{A}_r$ и любого целого числа $n > 0$, если r есть $a + b$ или $2a + b$.

Доказательство. В силу предположения $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$. Поэтому из включений $\mathfrak{A}_{-a} \mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a-b}$ и $\mathfrak{A}_{-a}^2 \mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b}$ получаем $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi^-$. Сейчас из условий ковровости $\mathfrak{A}_{a+b}^2 \mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$ и $\mathfrak{A}_{-a} \mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$ получаем включения $\mathfrak{A}_{a+b}^2 \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$ и соответственно $\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$. Таким образом,

$$(7) \quad \mathfrak{A}_{a+b}^2 \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}.$$

Далее, из условий ковровости $\mathfrak{A}_{a+b} \mathfrak{A}_{-2a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a}$ следует $\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a}$. Объединяя последнее включение с условием ковровости $\mathfrak{A}_{-a} \mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$, получаем

$$(8) \quad \mathfrak{A}_{a+b} \mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}.$$

Пусть $t \in \mathfrak{A}_{a+b}$. Из включений (7) следует $t^2 \in \mathfrak{A}_{a+b} \cap \mathfrak{A}_{2a+b}$. Отсюда и в силу включения (8) индукцией по n получаем $t^n \in \mathfrak{A}_{a+b}$ для всех натуральных чисел n .

Пусть $t \in \mathfrak{A}_{2a+b}$. Из включений (7) и (8) также легко следует, что $t^n \in \mathfrak{A}_{2a+b}$ для всех натуральных чисел n . \square

Доказательство следующей леммы элементарно и мы его опускаем.

Лемма 3. Пусть F — алгебраическое расширение поля R , A — ненулевая аддитивная подгруппа поля F , являющаяся R -модулем, и $t^n \in A$ для любого $t \in A$ и для всех целых чисел $n > 0$. Тогда $1 \in A$ и $A = A^{-1}$, где A^{-1} состоит из всех обратных к ненулевым элементам из A в объединении с нулем.

Лемма 4. [12, лемма 5] Пусть $Q \subseteq P$ — аддитивные подгруппы поля F характеристики $p > 0$ с условиями:

- (1) $1 \in Q$;
- (2) $P^p Q \subseteq Q$;
- (3) $Q = Q^{-1}$.

Пусть K — наименьшее подполе в F , содержащее P . Тогда Q содержит поле K^p .

Лемма 5. Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер типа A_2 или B_2 над полем F , $\{a, b\}$ — фундаментальная система для Φ , причем хотя бы одна аддитивная подгруппа \mathfrak{A}_r является R -модулем, где F — алгебраическое расширение поля R . Тогда, если $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$, то либо $\mathfrak{A}_r = P$ при всех $r \in \Phi$ для некоторого подполя P поля F , либо Φ типа B_2 , $\text{char} K = 2$, существует несовершенное подполе K поля F и

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \text{ короткий корень} \\ Q, & \text{если } r \text{ длинный корень} \end{cases}$$

для двух различных бесконечных аддитивных подгрупп P и Q поля K , удовлетворяющих включениям

$$(9) \quad K^2 \leq Q < P \leq K.$$

и равенствам

$$(10) \quad P = P^{-1}, \quad Q = Q^{-1}.$$

Доказательство. Пусть Φ типа A_2 или $\text{char} F > 2$ и Φ типа B_2 . Тогда в силу [3, следствие 3.2] $\mathfrak{A}_r = \chi(r)P$, $r \in \Phi$, для некоторого подполя P поля F и подходящего F -характера χ решетки $\mathbb{Z}\Phi$. Поскольку $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$, то $\chi(a), \chi(b) \in P$, а так как любой F -характер определяется своими значениями на фундаментальных корнях, то $\mathfrak{A}_r = P$ для всех $r \in \Phi$.

Пусть Φ типа B_2 . Не теряя общности, можно считать, что \mathfrak{A}_{a+b} или \mathfrak{A}_{2a+b} является R -модулем.

Пусть \mathfrak{A}_{a+b} является R -модулем. Тогда $1 \in \mathfrak{A}_{a+b}$ и $\mathfrak{A}_{a+b} = \mathfrak{A}_{a+b}^{-1}$ в силу лемм 2 и 3. Используя включение $1 \in \mathfrak{A}_{a+b} \cap \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$ и условия ковровости, получаем $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi$. Сейчас применяя только условия ковровости, приходим к равенствам $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_s$ при $|r| = |s|$. Положим $\mathfrak{A}_r = P$, если r — короткий корень, и $\mathfrak{A}_r = Q$, если корень r длинный.

Если $\text{char}K \neq 2$, то из условий ковровости $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$ и $2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$ следует, что $P = Q$ и P является подкольцом поля F , а следовательно, подполем в силу алгебраичности расширения F/R .

Пусть $\text{char}K = 2$. Тогда R^2 — поле и F — его алгебраическое расширение. Поскольку \mathfrak{A}_{a+b} является R -модулем и $1 \in \mathfrak{A}_{a+b}$, то $R \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$. Поэтому аддитивная подгруппа \mathfrak{A}_{2a+b} является R^2 -модулем в силу условия ковровости $\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$. Отсюда $1 \in \mathfrak{A}_{2a+b}$ и $\mathfrak{A}_{2a+b} = \mathfrak{A}_{2a+b}^{-1}$ снова в силу лемм 2 и 3. Таким образом, равенства (10) установлены, $1 \in Q$, $PQ \subseteq P$ и $P^2Q \subseteq Q$. Поэтому либо $P = Q$ и P — поле, либо по лемме 4 существует несовершенное подполе K поля F , удовлетворяющее включениям (9).

Второй случай, когда \mathfrak{A}_{2a+b} является R -модулем, рассматривается подобным образом. \square

Лемма 6. [9, стр. 50] *Любой положительный корень $r \in \Phi^+$ может быть представлен в виде суммы фундаментальных корней $r = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}$ таким образом, что $p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_s}$ является корнем для всех $s \leq k$.*

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть $\Pi = \{p_1, \dots, p_l\}$ — фундаментальная система корней системы корней Φ . С точностью до сопряжения диагональным элементом можно считать, что $1 \in \mathfrak{A}_{-p_i}$ для всех $p_i \in \Pi$. С другой стороны, не теряя общности можно считать, что для некоторых i, j одна из аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}_{p_i+p_j}$ или $\mathfrak{A}_{2p_i+p_j}$ является R -модулем. Пусть Φ_{ij} — подсистема корней с фундаментальной системой $\{p_i, p_j\}$. По лемме 5 $\mathfrak{A}_r = P$ для всех коротких корней из Φ_{ij} и $\mathfrak{A}_r = Q$ для всех длинных корней из Φ_{ij} , причем в данном случае мы не исключаем совпадения аддитивных подгрупп P и Q . В силу связности графа Кокстера, ассоциированного с системой Φ , аналогичное утверждение справедливо для любой подсистемы Φ_{km} , порожденной соседними корнями на графе Кокстера. В частности, $\mathfrak{A}_r = P$ для всех коротких фундаментальных корней и $\mathfrak{A}_r = Q$ для всех длинных фундаментальных корней, причем выполняются условия (4) и (5) из теоремы 1. Используя лемму 5, установим справедливость этого утверждения для всех аддитивных подгрупп индукцией по высоте корней $h(r)$, совпадающей с суммой коэффициентов в представлении корня r через Π . Но, для того чтобы применять лемму 5, сначала нужно получить включения $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех отрицательных корней $r \in \Phi^-$.

По лемме 6 любой отрицательный корень $r \in \Phi^-$ представляется в виде $r = s - p_i$, где $h(p_i) = 1$, $s \in \Phi^-$ и $|h(s)| = |h(r)| - 1$. Возможны три случая:

- 1) $\{s, -p_i\}$ — фундаментальная система типа A_2 ;
- 2) $\{s, -p_i\}$ — фундаментальная система типа B_2 ;
- 3) $s, -p_i$ — короткие корни и они порождают подсистему корней типа B_2 .

Индукцией по $|h(r)|$ установим включение $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех отрицательных корней $r \in \Phi^-$. В случаях 1) и 2) в силу условия ковровости $\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_{-p_i} \subseteq \mathfrak{A}_r$, а также индуктивного предположения, получаем включение $1 \in \mathfrak{A}_r$. В случае 3) сумма $s + p_i$ является корнем, p_i — короткий корень и $\{s + p_i, -p_i\}$ — фундаментальная система типа B_2 . Поэтому в силу условия ковровости $\mathfrak{A}_{-p_i}^2\mathfrak{A}_{s+p_i} \subseteq \mathfrak{A}_r$, а также индуктивного предположения, получаем включение $1 \in \mathfrak{A}_r$.

По лемме 6 любой положительный корень $r \in \Phi^+$ представим в виде $r = s + p_i$, где $h(p_i) = 1$, $h(s) = h(r) - 1$. Возможны три случая:

- 1) $\{s, p_i\}$ — фундаментальная система типа A_2 ;
- 2) $\{s, p_i\}$ — фундаментальная система типа B_2 ;
- 3) s, p_i — короткие корни и они порождают подсистему корней типа B_2 .

Индукцией по высоте корней покажем, что $\mathfrak{A}_{-r} = \mathfrak{A}_r$ и \mathfrak{A}_r совпадает с P или Q в зависимости от длины корня r .

В случае 1) сразу получаем равенство $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_{p_i}$ в силу индуктивного предположения и леммы 5, где \mathfrak{A}_{p_i} совпадает с P или Q . В случае 2) тоже сразу в силу индуктивного предположения и леммы 5 получаем равенство $\mathfrak{A}_r = P$, поскольку корень r короткий. В случае 3) разность $s - p_i$ является корнем, p_i — короткий корень и $\{s - p_i, p_i\}$ — фундаментальная система типа B_2 . Поэтому $\mathfrak{A}_{p_i} = P$, а в силу индуктивного предположения $\mathfrak{A}_{s-p_i} = Q$. Отсюда $\mathfrak{A}_r = Q$ по лемме 5.

Итак, мы доказали, что $\mathfrak{A}_r = P$ для всех коротких и $\mathfrak{A}_r = Q$ для всех длинных корней. Условия (4) и (5) из теоремы 1 выполняются в силу леммы 5. Осталось понять, что исходный ковер \mathfrak{A} замкнут. При $P = Q$ ковер \mathfrak{A} замкнут, так как в этом случае он сопряжен с константным ковром, а при переходе к сопряженному коврику замкнутость не изменяется. Если же подгруппы P и Q различны, то в силу включений (4) ($K^2 \leq Q \leq P \leq K$) ковровая подгруппа $\Phi(\mathfrak{A})$ лежит между группами Шевалле $\Phi(K^2)$ и $\Phi(K)$ и тогда K — несовершенное поле характеристики 2. Группы, лежащие между группами Шевалле над несовершенными полями, большее из которых является алгебраическим расширением меньшего, описаны в [5], и там же установлено, что они определяются замкнутыми ковриками аддитивных подгрупп (см. также [4]). Поскольку поле K является алгебраическим расширением своего квадрата K^2 , то наш исходный ковер \mathfrak{A} замкнут.

Теорема доказана.

Авторы глубоко признательны рецензенту за указанные опечатки и полезные замечания, которые несомненно способствовали улучшению текста статьи.

REFERENCES

- [1] V.M. Levchuk, *Parabolic subgroups of some ABA-groups*, Mat. Zametki, **31**:4 (1982), 509–525. Zbl 0489.20041
- [2] *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory, 19th ed.*, Edited by E.I. Khukhro and V.D. Mazurov, Sobolev Institut of Mathematics, Novosibirsk, 2018. MR3981599
- [3] V.M. Levchuk, *Generating sets of root elements of Chevalley groups over a field*, Algebra Logic, **22**:5 (1983), 362–371. Zbl 0668.20037
- [4] Ya.N. Nuzhin, A.V. Stepanov, *Subgroups of Chevalley groups of types B_1 and C_1 containing the group over a subring, and corresponding carpets*, St. Peterbg. Math. J., **31**:4 (2020), 719–737. Zbl 1442.20030
- [5] Ya.N. Nuzhin, *Intermediate subgroups in the Chevalley groups of type B_1 , C_1 , F_4 and G_2 over the nonperfect fields of characteristic 2 and 3*, Sib. Math. J., **54**:1 (2013), 119–123. Zbl 1273.20044
- [6] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley groups*, Yale University, New Haven, 1968. Zbl 1196.22001
- [7] S.K. Franchuk, *On irreducible carpets of additive subgroups of type G_2 over fields of characteristic $p > 0$* , Vladikavkaz. Mat. Zh., **22**:1 (2020), 78–84. Zbl 1463.22006
- [8] Ya.N. Nuzhin, E.N. Troyanskaya, *Irreducible carpets of additive subgroups of type G_2 over a field of characteristic 0*, J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys., **15**:5 (2022), 610–614. Zbl 7624297
- [9] R. Carter, *Simple groups of Lie type*, Wiley & Sons, London etc., 1972. Zbl 0248.20015

- [10] V.A. Koibaev, S.K. Kuklina, A.O. Likhacheva, Ya.N. Nuzhin, *Subgroups, of Chevalley groups over a locally finite field, defined by a family of additive subgroups*, Math. Notes, **102**:6 (2017), 792–798. Zbl 1387.20038
- [11] Ya.N. Nuzhin, *Groups contained between groups of Lie type over various fields*, Algebra Logic, **22**:5 (1983), 378–389. Zbl 0544.20040
- [12] Ya.N. Nuzhin, A.V. Stepanov, *Bruhat decomposition for carpet subgroups of Chevalley groups over fields*, Algebra Logic, **60**:5 (2021), 327–335. Zbl 7456769

ALENA OLEGOVNA LIKHACHEVA
NORTH CAUKASUS CENTER FOR MATHEMATICAL RESEARCH,
NORTH OSSETIAN STATE UNIVERSITY AFTER K.L. KHETAGUROV &
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY,
PR.SVOBODNY, 79,
660041, KRASNOYARSK, RUSSIA
Email address: likhacheva.alyona@mail.ru

YAKOV NIFANTEVICH NUZHIN
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY,
PR.SVOBODNY, 79,
660041, KRASNOYARSK, RUSSIA
Email address: nuzhin2008@rambler.ru