S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 20, №1, стр. 140–149 (2023) УДК 510.5
DOI 10.33048/semi.2023.20.013 MSC 03D99

ОГРАНИЧЕННО КОМБИНАТОРНО-СЕЛЕКТОРНЫЕ МНОЖЕСТВА

Д.И. ИВАНОВ, О.В. ИВАНОВА

Abstract. This article discusses the issue of classification of their own subsets of $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ by means of partial Boolean functions. For an arbitrary partial Boolean function β defines the notion of β-limited combinatorial-selector set, which is a generalization of the concept of β-selector set [1]. Fully describe the classes of these sets, the relationship between these classes by inclusion.

Keywords: combinatorial sets, combinatorial-selector sets, limited-combinatorial sets, limited combinatorial-selector set.

1. Введение

Представленная работа является логическим продолжением статьи [11], в которой рассматриваются подмножества множества $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ с точки зрения их классификации посредством булевых функций (БФ) и эффективной вычислимости. Начало такой классификации положил К. Джокуш, определив полурекурсивное множество [8], как множество $A \subseteq N$, для которого существует всюду определенная вычислимая функция $f : N \times N \to N$ такая, что

$$(\forall x)\,(\forall y)\ (f(x, y) \in \{x, y\} \wedge ((\chi(x) \vee \chi(y)) = 1 \Leftrightarrow f(x, y) \in A))\ ,$$

где χ_A − характеристическая функция множества A, то есть

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, \text{если } t \in A; \\ 0, \text{если } t \notin A. \end{cases}$$

Ivanov D.I. Ivanova O.V., Limited combinatorial-selector sets.

Поступила 19 августа 2022 г., опубликована 19 февраля 2023 г.

Как видно, в определении участвует булева функция – дизъюнкция. По аналогии А.Н. Дегтев предложил использовать в определении произвольную БФ β, назвав такие множества β-комбинаторными, а именно, множество A называется β-комбинаторным, где β − произвольная n-местная БФ, если существует n-местная всюду определенная на N вычислимая функция f, принимающая значения из N, такая что

$$(\forall x_1, ..., x_n)\ (\beta\,(\chi_A(x_1), ..., \chi_A(x_n)) = 1 \Leftrightarrow f(x_1, ..., x_n) \in A)\ .$$

Накладывая ограничения на функцию f, а именно, потребовав, чтобы функция f была селекторной, т. е.

$$(\forall x_1, ..., x_n)(f(x_1, ..., x_n) \in \{x_1, \dots, x_n\}),$$

придём к определению понятия β-комбинаторно-селекторного (β-селекторного) множества [1, 4]. А меняя в нем эквивалентность на импликацию, получим определение β-импликативно-селекторного множества [3]. Рассматривая в качестве f произвольную частично вычислимую функцию, получим определения слабо β-импликативно-селекторного и β-комбинаторно-селекторного множеств, которые изучены и получены соотношения между их классами в работах [2, 5-7, 9, 10].

Ограниченно-комбинаторные множества, описанные в работе [11], являются обобщением понятия β-комбинаторных множеств посредством замены всюду определенной БФ на частичную. В настоящей статье рассматриваются ОК-множества с дополнительным требованием селекторности функции f, полностью описаны классы этих множеств и установлены их соотношению по включению.

2. Основные результаты

Будем называть БФ β *частичной*, если хотя бы для одного из наборов

$$(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \{0, 1\}^n$$

значение БФ β на этом наборе не определено ($\beta\,(\theta_1, \dots, \theta_n)\uparrow$).

Частично вычислимая функция f называется *селекторной*, если

$$(\forall x_1, \dots, x_n)\,(f(x_1, \dots, x_n)\downarrow\ \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \in \{x_1, \dots, x_n\}),$$

где $f(x_1, \dots, x_n)\downarrow$ означает, что значение функции $f(x_1, \dots, x_n)$ определено.

Подмножества множества $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, рассматриваемые в статье, полагаем отличными от $\varnothing$ и N.

Определение 1. *Множество $A \subseteq N = \{0, 1, 2, \dots\}$ называется β-ограниченно комбинаторно-селекторным (β-ОКС), если существует n-местная частично вычислимая селекторная функция f такая, что для всех, $x_1, \dots, x_n \in N$ выполнены условия:*

(i) $f\,(x_1, \dots, x_n)\uparrow \Leftrightarrow \beta\,(\chi\,(x_1)\,, \dots, \chi\,(x_n))\uparrow$,

(ii) $f(x_1, \dots, x_n) \in A \Leftrightarrow \beta\,(\chi\,(x_1)\,, \dots, \chi\,(x_n)) = 1$,

где χ − характеристическая функция множества A. В этом случае говорим, что A является β-ОКС множеством с соответствующей частично вычислимой селекторной функцией f.

Назовем частичную БФ β *допустимой* , если она не является нигде не определённой и существует хотя бы одно β-ОКС множество A, такое что $A \neq \varnothing$,

$A \neq N$. Понятие допустимой БФ несколько отличается от аналогичного определения в статье [11], но в обоих вариантах обуславливается исключением из рассмотрения тривиальных случаев.

Будем обозначать класс всех перечислимых множеств $-$ $\mathbf{E}_1$, а $\mathbf{E}_0 = \{X : X = N \setminus Y, Y \in \mathbf{E}_1\}$ $-$ класс множеств, имеющих перечислимое дополнение. Тогда $\mathbf{R} = \mathbf{E}_0 \cap \mathbf{E}_1$ $-$ класс всех вычислимых множеств.

Рассмотрим ряд вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства основного результата.

Лемма 1. *Если β-допустимая БФ, то $\beta\,(\theta, \ldots, \theta) \neq 1 - \theta \in \{0, 1\}$.*

Доказательство. Пусть A является β-ОКС множеством с соответствующей частично вычислимой селекторной функцией f для подходящей допустимой БФ β, a_θ $-$ фиксированные элементы, такие что

$$a_\theta \in \begin{cases} A, \text{если } \theta = 1 \\ N \setminus A, \text{ если } \theta = 0. \end{cases}$$

Тогда $f(a_\theta, \ldots, a_\theta) = a_\theta$ (или же $f(a_\theta, \ldots, a_\theta) \uparrow$), поэтому $\beta\,(\theta, \ldots, \theta) = \theta$ (или $\beta\,(\theta, \ldots, \theta) \uparrow$). $\square$

Лемма 2. *Любое вычислимое множество является β-ОКС множеством для всякой допустимой частичной БФ β.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathbf{R}$, и β $-$ произвольная допустимая n-местная частичная БФ. Определим n-местную частично вычислимую функцию $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ следующим образом: если $\beta\,(\chi_A\,(x_1)\,, \ldots, \chi_A\,(x_n)) \uparrow$, то считаем $f(x_1, \ldots, x_n) \uparrow$; если $\beta\,(\chi_A\,(x_1)\,, \ldots, \chi_A\,(x_n)) = 1$, то полагаем $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, где x_i - элемент с наименьшим номером, такой что: $x_i \in A$, заметим, такой x_i всегда найдётся для допустимой БФ по лемме 1; аналогично, если $\beta\,(\chi_A\,(x_1)\,, \ldots, \chi_A\,(x_n)) = 0$, то $f(x_1, \ldots, x_n) = x_j$, где x_j - элемент с наименьшим номером, такой что: $x_j \in (N \setminus A) \cap \{x_1, \ldots, x_n\}$. Таким образом, получили, что множество A является β-ОКС с частично вычислимой селекторной функцией f. $\square$

Поскольку всякое β-ОКС множество является и β-ОК, следующая лемма является прямым следствием леммы 2 статьи [11].

Лемма 3. *Всякое β-ОКС множество или является перечислимым, или имеет перечислимое дополнение, для любой допустимой частичной БФ β.* $\square$

В статье [1] описаны β-селекторные множества, которые можно получить, если в определении β-ОКС множества вместо частичной БФ использовать всюду определенную, при этом частично вычислимая селекторная функция станет всюду определенной. Доказано, что семейство β-селекторных множеств совпадает либо с семейством вычислимых, либо с семейством полурекурсивных множеств [1].

Замечание. Следует отметить, что в указанной статье [1] из рассмотрения исключается тождественная БФ $\beta\,(x) = x$, для которой любое подмножество множества N является β-селекторным множеством.

Лемма 4. *Если частичная БФ β такая, что $\beta(0,0,\ldots,0)\uparrow$ и $\beta(1,1,\ldots,1)\uparrow$, или, если $\beta(0,0,\ldots,0)\downarrow$ и $\beta(1,1,\ldots,1)\downarrow$, то любое β-ОКС множество A вычислимо.*

Доказательство. Пусть $\beta(0,0,\ldots,0)\uparrow$, рассмотрим значения

$$\beta(1,0,\ldots,0);\beta(0,1,\ldots,0);\ldots,\beta(0,0,\ldots,1).$$

Если хотя бы одно из них определено, то, как следует из доказательства леммы 2 [11], $A\in\mathbf{E}_1$. Иначе, в каждом из n наборов заменим один из 0 на 1. Если хотя бы одно из полученных значений будет определено, то также $A\in\mathbf{E}_1$. Продолжая указанную процедуру, в любом случае получим $A\in\mathbf{E}_1$, так как БФ β не является нигде не определенной. Аналогично, если $\beta(1,1,\ldots,1)\uparrow$, то β-ОКС множество A принадлежит классу $\mathbf{E}_0$. Следовательно, если значения $\beta(0,0,\ldots,0)$ и $\beta(1,1,\ldots,1)$ не определены одновременно, то $A\in\mathbf{R}$.

Далее, пусть для частичной БФ $\beta:\beta(0,0,\ldots,0)\downarrow$, $\beta(1,1,\ldots,1)\downarrow$ и для некоторого набора $\beta(1,\ldots,1,\ldots,0,\ldots,0)\uparrow$. Меняя 0 на 1, на некотором шаге получим $A\in\mathbf{E}_1$, а меняя 1 на 0 – $A\in\mathbf{E}_0$, т. е. $A\in\mathbf{R}$. □

Лемма 5. *Для булевых функций*

$$\beta_\theta\left(\theta_1,...,\theta_n\right)=\begin{cases}\theta, \text{\textit{если} } \theta_1=...=\theta_n=\theta\\ \uparrow, \text{ \textit{иначе} },\end{cases}$$

семейство β_θ-ОКС множеств совпадает с классом $\boldsymbol{E}_\theta$.

Доказательство. По лемме 3 $A\in\mathbf{E}_\theta$ для любого β_θ-ОКС множества A. С другой стороны, любое перечислимое (коперечислимое) множество B является β-ОКС множеством с частично вычислимой селекторной функцией g, которую можно получить перечисляя множество B $(N\setminus B)$:

$$g\left(x_1,...,x_n\right)=\begin{cases}x_1, \text{если } x_1,...,x_n\in B\ \ (N\setminus B)\\ \uparrow, \text{ в противном случае }.\end{cases}$$

□

Воспользуемся понятиями и терминами, сформулированными в работе [11].

Определение 2. [11] *Сужение частичной булевой функции $\beta\left(t_1,...,t_n\right)$, полученное заменой $(n-m)$ ее переменных $t_{i_{m+1}},...,t_{i_n}, 1\le m\le(n-1)$ на константы $\theta_{i_p}\in\{0,1\}, p\in\{m+1,\ldots,n\}$, такое, что функция $\beta_1\left(t_{i_1},\ldots,t_{i_m}\right)$ становится всюду определенной БФ, называется сужением по переменным $t_{i_1},\ldots,t_{i_m}$ на наборе констант $\left(\theta_{i_{m+1}},\ldots,\theta_{i_n}\right)$:*

$$\beta_1\left(t_{i_1},\ldots,t_{i_m}\right)=\beta\left(t_{i_1},\ldots,t_{i_m}\right)\left[\theta_{i_{m+1}},\ldots,\theta_{i_n}\right].$$

Определение 3. [11] *Сужение называется максимальным, если оно всюду определенное и для любого $j\in\{m+1,\ldots,n\}$, булева функция*

$$\beta_{1_j}(t_{i_1},\ldots,t_{i_m},t_{i_j})[\theta_{i_{m+1}},\ldots,\theta_{i_{j-1}},\theta_{i_{j+1}},\ldots,\theta_{i_n}]$$

становится частичной БФ для любого набора констант.

Лемма 6. *Если БФ $\beta(t_1,\dots,t_n)$ допускает сужение по переменным $t_{i_1},\dots,t_{i_m}$ на наборе констант $\left(\theta_{i_{m+1}},\dots,\theta_{i_n}\right)$, причем существуют $l,t\in\{i_{m+1},\dots,i_n\}$, $l\neq t$, такие что $\theta_l=1-\theta_t$, то семейство β-ОКС множеств совпадает с классом вычислимых множеств.*

Доказательство. Переименовывая, если нужно, переменные, без ограничения общности можно считать, что сужение будет по первым m переменным. Если β удовлетворяет условию леммы, то для максимального сужения

$$\beta\left(t_1,\dots,t_m\right)\left[\theta_{m+1},\dots,\theta,\dots,1-\theta,\dots,\theta_n\right]$$

существуют наборы $(\theta_1,\dots,\theta_m)$ и $(\delta_1,\dots,\delta_m)$, такие что

$$\beta\left(\theta_1,\dots,\theta_m,\theta_{m+1},\dots,1-\theta,\dots,1-\theta,\dots,\theta_n\right)\uparrow,$$
$$\beta\left(\delta_1,\dots,\delta_m,\theta_{m+1},\dots,\theta,\dots,\theta,\dots,\theta_n\right)\uparrow.$$

Тогда, из доказательства леммы 2 [11], β-ОКС будет перечислимым и коперечислимым одновременно, т. е вычислимым. □

Может оказаться, что БФ β допускает несколько максимальных сужений.

Определение 4. [11] *Последовательностью максимальных сужений для БФ β называется набор всех возможных ее максимальных сужений:*

$$\begin{gathered}\beta_1\left(t_{11},t_{12},\dots,t_{1k_1}\right)=\beta\left(t_{11},t_{12},\dots,t_{1k_1}\right)\left[\theta_{1(k_1+1)},\theta_{1(k_1+2)},\dots,\theta_{1n}\right],\\ 1\leq k_1<n,\\ \beta_2\left(t_{21},t_{22},\dots,t_{2k_2}\right)=\beta\left(t_{21},t_{22},\dots,t_{2k_2}\right)\left[\theta_{2(k_2+1)},\theta_{2(k_2+2)},\dots,\theta_{2n}\right],\\ 1\leq k_2<n,\\ \dots,\\ \beta_r\left(t_{r1},t_{r2},\dots,t_{rk_r}\right)=\beta\left(t_{r1},t_{r2},\dots,t_{rk_r}\right)\left[\theta_{r(k_r+1)},\theta_{r(k_r+2)},\dots,\theta_{rn}\right],\\ 1\leq k_r<n\end{gathered}$$

Определение 5. [11] *Булева функция называется разложимой, если для каждого i $(1\leq i\leq r)$ функции последовательности максимальных сужений β_i получены на наборах одних и тех же констант $(\theta,\dots,\theta)\,,\theta\in\{0,1\}$*

$$\begin{gathered}\beta_1\left(t_{11},t_{12},\dots,t_{1k_1}\right)=\beta\left(t_{11},t_{12},\dots,t_{1k_1}\right)\left[\theta,\theta,\dots,\theta\right],1\leq k_1<n,\\ \beta_2\left(t_{21},t_{22},\dots,t_{2k_2}\right)=\beta\left(t_{21},t_{22},\dots,t_{2k_2}\right)\left[\theta,\theta,\dots,\theta\right],1\leq k_2<n,\\ \dots,\\ \beta_r\left(t_{r1},t_{r2},\dots,t_{rk_r}\right)=\beta\left(t_{r1},t_{r2},\dots,t_{rk_r}\right)\left[\theta,\theta,\dots,\theta\right],1\leq k_r<n,\end{gathered}$$

а в остальных случаях значение β не определено.

Лемма 7. *Если допустимая частичная булева функция не является разложимой и отлична от функций*

$$\beta_\theta\left(\theta_1,...,\theta_n\right)=\begin{cases}\theta,\textit{если }\theta_1=...=\theta_n=\theta\\ \uparrow,\ \textit{иначе },\end{cases}$$

то любое β-ОКС множество A будет вычислимым ($A\in\boldsymbol{R}$).

Доказательство. По лемме 4, для функций, одновременно определённых или одновременно неопределённых на наборах из «нулей» и «единиц», β-ОКС множества будут вычислимыми.

Иначе, пусть $\beta(\theta,\dots,\theta)\downarrow$. Так как БФ не является разложимой и отлична от функций β_θ, значит, существует набор переменных (без ограничения общности считаем $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $1 \leq k < n$), не входящих одновременно ни в одно из максимальных сужений, такой что $\beta(t_1, t_2, \ldots, t_k, t_{k+1}, \ldots, t_n) \downarrow$ при

$$t_1 = 1-\theta, t_2 = 1-\theta, ..., t_k = 1-\theta, 1 \leq k < n, t_{k+1} = \theta, ..., t_n = \theta.$$

Зафиксируем этот набор констант. Если окажется, что переменная t_1 входит в одно из сужений на наборе из соответствующих констант данного набора, то при $k = 1$, получим $\beta(\theta, \ldots, \theta) \uparrow$. Поэтому $k > 1$, и, если это максимальное сужение по одной переменной, то по лемме 6 семейство β-ОКС множеств совпадает с классом $\mathbf{R}$. Иначе, полагая, что переменная t_s так же участвует в этом максимальном сужении на наборе оставшихся констант и $s \in \{2, 3, \ldots, k\}$, получим $k > 2$, и любое β-ОКС множество A так же попадет в класс $\mathbf{R}$ (лемма 6). Если же $s \in \{k+1, k+2, \ldots, n\}$, то $n-k \neq 1$ (т.к. иначе $\beta(1-\theta, \ldots, 1-\theta) \downarrow$) и снова $A \in \mathbf{R}$. Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что семейство β-ОКС множеств является вычислимым, иначе придем к противоречию (так как $t_1, t_2, \ldots, t_k$ не входят одновременно ни в одно из максимальных сужений).

Может оказаться, что ни одно из максимальных сужений БФ β на наборе констант из зафиксированного набора не содержит ни одной переменной из множества $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$. Тогда, поменяв значение переменной t_1 на θ, получим, что для этого набора значение БФ не определено и $A \in \mathbf{E}_{1-\theta}$. Далее, присвоим t_2 значение θ, и, если значение функции для нового набора будет определено, то $A \in \mathbf{E}_\theta$, а, стало быть, A – вычислимо. Иначе, t_3 присвоим значение θ и продолжим процедуру. Тогда, либо на некотором шаге получим, что $A \in \mathbf{R}$, либо $\beta(\theta, \ldots, \theta) \uparrow$, что противоречит условию. □

Определение 6. *Назовём сужение разложимой БФ особым, если оно отлично от константы и для него справедливо:*

$$\beta(1-\theta, 1-\theta, \ldots, 1-\theta)[\theta, \theta, \ldots, \theta] = \theta, \text{ для } \theta = 0 \text{ или } \theta = 1.$$

Лемма 8. *Для любой разложимой БФ β, допускающей особое сужение, класс β-ОКС множеств совпадает с классом $\boldsymbol{R}$.*

Доказательство. Пусть A – β-ОКС множество с частично вычислимой селекторной функцией f для разложимой БФ β, а k-местная функция

$$\beta(\chi_A(x_{i_1}), \ldots, \chi_A(x_{i_k}))[1, \ldots, 1] : \beta(0, \ldots, 0)[1, \ldots, 1] = 1$$

является ее особым сужением. Может оказаться, что при некотором $l : 1 \leq l < k-1$ (в случае равенства получим недопустимую БФ), функция на наборе из l «единиц» и $(k-l)$ «нулей» принимает значение 1, а из $(l+1)$ «единиц» и $(k-l-1)$ «нулей» – 0, т. е. с точностью до перестановки переменных

$$\beta(1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0)[1, \ldots, 1] = 1$$
$$\beta(1, \ldots, 1, 1, 0, \ldots, 0)[1, \ldots, 1] = 0$$

Выберем наименьшее из возможных l. Обозначим в f переменную, стоящую на $(l+1)$ месте за x. Отождествим остальные переменные, принимающие в функции β значение 0 с y, а принимающие 1 – с z. Тогда

$$\beta(\chi_A(x), \chi_A(y), \chi_A(z)) : \beta(0, 0, 1) = 1, \beta(1, 0, 1) = 0$$

Пусть g – частично вычислимая селекторная функция, полученная из f отождествлением соответствующих переменных, а $a \in A$, $\overline{a} \in N \setminus A$, тогда

$$g(x, \overline{a}, a) \in A \Leftrightarrow x \notin A,$$

т. к., вычислимая функция g определена для любого аргумента x, значит, при $x \neq a$ и $x \neq \overline{a}$, верно $g(x, \overline{a}, a) \neq x$, что означает

$$x \in A \Leftrightarrow g(x, \overline{a}, a) = \overline{a}.$$

Поэтому, A является вычислимым множеством.

Если особым сужением β является функция $\beta(1, \dots, 1)[0, \dots, 0] = 0$, то, заменив все 0 на 1 и наоборот, и рассуждая аналогичным образом, получим, что и в этом случае A является вычислимым. $\square$

Замечание. Если же сужение (без ограничения общности - по первым k переменным) является константой, т. е.

$$(\forall x_1, \dots, x_k)\beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_k))[\theta, \dots, \theta] = \theta, \theta = 1(0).$$

то по лемме 3 β-ОКС множество A будет перечислимым (коперечислимым). Обратно, для любого перечислимого (коперечислимого) множества B, определим функцию f, перечисляя множество B $(N \setminus B)$:

$$f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \begin{cases} x_n, \text{если вычислятся } x_{k+1}, ..., x_n \\ \uparrow, \text{ в противном случае .} \end{cases}$$

Тогда B будет β-ОКС множеством с частично вычислимой селекторной функцией f.

Теорема 1. *Для произвольной допустимой частичной БФ β, семейство β-ОКС множеств совпадает с семейством вычислимых множеств $\boldsymbol{R}$ или с семейством полурекурсивных перечислимых $\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{S}$ или с семейством полурекурсивных коперечислимых множеств $\boldsymbol{E}_0 \cap \boldsymbol{S}$ или же с семейством перечислимых $\boldsymbol{E}_1$ или коперечислимых $\boldsymbol{E}_0$ множеств.*

Доказательство. Как было доказано ранее (лемма 7), для неразложимой БФ β, любое β-ОКС множество является вычислимым. Исключением являются функции β_θ, для которых семейство β_θ-ОКС множеств совпадает с классом $\mathbf{E}_\theta$ (лемма 5).

Рассмотрим далее разложимые БФ. Пусть множество A является β-ОКС для некоторой разложимой частичной БФ β с соответствующей вычислимой функцией $f(x_1, \dots, x_n)$. Рассмотрим последовательность максимальных сужений функции $\beta : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$. Если хотя бы одно из сужений является особым, то множество A будет вычислимым (лемма 8). Поэтому, считаем данный случай рассмотренным. Иначе, так как

$$\beta_1(\chi_A(x_{11}), \chi_A(x_{12}), ..., \chi_A(x_{1k_1})) = \beta(\chi_A(x_{11}), \chi_A(x_{12}), ..., \chi_A(x_{1k_1}))[\theta, \theta, ..., \theta]$$

всюду определенная БФ, то соответствующая ей вычислимая функция $f_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1})$, полученная из $n-$местной функции f подстановкой

$$x_{1(k_1+1)} = x_{1(k_1+2)} = \dots = x_{1n} = a_\theta,$$

станет также всюду определенной, где a_θ $-$ фиксированный элемент, такой что

$$a_\theta \in \begin{cases} A, \text{если } \theta = 1 \\ N \setminus A, \text{если } \theta = 0. \end{cases}$$

Однако, нельзя утверждать, что функция f_1 будет селекторной. Поэтому, определим по ней k_1-местную вычислимую функцию g_1 следующим образом: учитывая утверждение леммы 3 будем перечислять множество A $(N \setminus A)$, если $\theta = 1(0)$, и положим

$$g_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}) = f_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}), \text{ если } f_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}) \neq a_\theta.$$

Если же $f_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}) = a_\theta$ и вычислилось первым значение

$$x_{1i} \in \{x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}\},$$

то положим $g_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}) = x_{1i}$. Заметим, что такое значение вычислится всегда, т. к. сужение не является особым. Таким образом, вычислимая функция g_1 будет селекторной, а множество A окажется β_1-селекторным с соответствующей функцией g_1. Такие множества были рассмотрены в работе [1], в которой доказано, что семейство β-селекторных множеств совпадает либо с семейством рекурсивных ($\mathbf{R}$), либо с семейством полурекурсивных ($\mathbf{S}$) множеств. Если снять ограничение и считать функцию $\beta(x) = x$ допустимой, то следует добавить к рассмотрению семейство всех подмножеств множества N. Учитывая тот факт, что $A \in \mathbf{E}_\theta$, где $\theta \in \{0, 1\}$, можно утверждать: A принадлежит одному из классов:$\mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{S}, \mathbf{R}, \theta \in \{0, 1\}$.

Аналогично показывается, что множество A является также $\beta_2, \ldots, \beta_r$-селекторным множеством с соответствующими всюду определенными вычислимыми функциями $g_2, \ldots, g_r$, т. е. $A \in K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_r$, где

$$K_i \in \{\mathbf{R}, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{S}\}, \theta \in \{0, 1\}, i \in \{1, \ldots, r\},$$

а, стало быть, A принадлежит одному из классов:

$$\mathbf{R}, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{S}, \theta \in \{0, 1\}.$$

Обратно, возьмём произвольное множество B из того же класса, что и множество A. Тогда $B \in K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_r$, т. е. $B \in K_j$, для любого $j \in \{1, \ldots, r\}$. Если для некоторого значения индекса s окажется, что

$$\beta_s(\chi_B(x_{s1}), \chi_B(x_{s2}), \ldots, \chi_B(x_{sk_s}))[\theta, \ldots, \theta] = \theta = const, \theta = 1(0),$$

определим соответствующую функцию

$$h_s^1(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_{sn}, \text{если } x_{s(k_s+1)}, \ldots, x_{sn} \text{ вычислятся в } B(N \setminus B) \\ \uparrow, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь и далее индекс переменной x_{jl}, $l \in \{1, ..., n\}$ обозначает ее позицию в функциях h_j^1

В других случаях множество B будет β_j-селекторным множеством, а соответствовать ему – всюду определенная вычислимая селекторная функция $h_j(x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jk_j})$. Доопределим каждую из таких функции h_j до n-местных частично вычислимых функций h_j^1 следующим образом: перечисляя множество B $(N \setminus B)$, если $B \in \mathbf{E}_1(\mathbf{E}_0)$, положим $h_j^1 = h_j$, если значения переменных, которые входят в h_j^1, но не входят в h_j, т.е. $x_{j(k_j+1)}, x_{j(k_j+2)}, \ldots, x_{jn}$, принадлежат B $(N \setminus B)$, и h_j^1 не определено иначе. Очевидно, функция h_j^1 тоже будет селекторной.

Таким образом, получим множество частично вычислимых селекторных функции $h_j^1(x_1, \ldots, x_n), j \in \{1, \ldots, r\}$. Будем одновременно вычислять значения этих функций. Если первым вычислится значение $h_k^1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, для некоторого набора значений переменных $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, то положим

$$h(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = h_k^1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

если же ни одно из значений $h_j^1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ не вычислится, положим $h(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \uparrow$. Тогда множество B будет β-ОКС множеством с соответствующей вычислимой функцией $h(x_1, \ldots, x_n)$.

□

3. Заключение

В качестве визуализации полученных результатов представим диаграмму соотношения между классами β-ограниченно комбинаторно-селекторных множеств по включению.

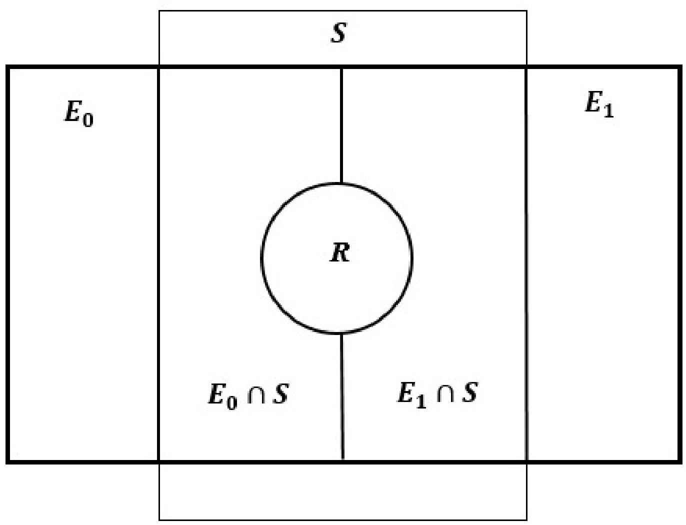

Рис. 1. Диаграмма включения классов β-ограниченно комбинатороно-селекторных множеств.

References

[1] A.N. Degtev, *Recursive-combinatorial properties of subsets of the natural numbers*, Algebra Logic, **29**:3 (1990), 204–210. Zbl 0727.03026

[2] A.N. Degtev, *Weak combinatorial selective properties of subsets of the natural numbers*, Algebra Logic, **29**:4 (1990), 280–286. Zbl 0733.03033

[3] A.N. Degtev, *Implicatively selector sets*, Algebra Logic, **35**:2 (1996), 80–85. Zbl 0897.03044

[4] A.N. Degtev, *Almost combinatorial selector sets*, Math. Notes, **68**:6 (2000), 721–723. Zbl 0990.03032
[5] A.N. Degtev, D.I. Ivanov, *Weakly combinatorial selector sets*, Algebra Logic, **37**:6 (1998), 357–362. Zbl 0913.03047
[6] A.N. Degtev, D.I. Ivanov, *Weakly implicatively selective sets of dimension 3*, Discrete Math. Appl., **9**:4 (1999), 395–402. Zbl 0965.03055
[7] A.N. Degtev, D.I. Ivanov, *About the classes of linear and self-dual weakly implicative selector sets*, Tyumen State University Herald, **4** (2004), 238–241.
[8] C.G. jun. Jockusch, *Semirecursive sets and positive reducibility*, Trans. Am. Math. Soc., **131**:2 (1968), 420–436. Zbl 0198.32402
[9] D.I. Ivanov, *Weakly implicative selector sets*, Russ. Math., **50**:9 (2006), 27–31. Zbl 07092351
[10] D.I. Ivanov, *Weakly combinatorial selector sets*, Russ. Math., **50**:11 (2006), 20–23 (2006). Zbl 07092373
[11] D.I. Ivanov, M.L. Platonov, *Limited-combinatorial sets*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **16** (2019), 1553–1560. Zbl 1436.03222

Dmitry Ivanovich Ivanov
Tyumen State University,
Volodarskogo St., 6,
625003 Tyumen, Russian Federation
Email address: d.i.ivanov@utmn.ru

Olga Vladimirovna Ivanova
Email address: i1offa@list.ru