S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 20, №1, стр. 150–164 (2023) УДК 514.13
DOI 10.33048/semi.2023.20.014 MSC 51M09

ЗАДАЧА О ТЕНИ И ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

А.В. КОСТИН

Abstract. In this paper we consider the problem of shadow in the Lobachevsky space. This problem can be considered as the establishment of conditions to ensure the membership of the points to the generalized convex hull of a family of sets. The boundary values of the parameters are determined for which the same configurations of balls ensure that the point belongs to the generalized convex hull of balls in Euclidean and hyperbolic spaces. In addition to balls, the article discusses families of horoballs, as well as combinations of balls and horoballs. The article shows how the Euclidean surfaces of revolution of constant negative curvature are connected with tangent cones to the horospheres of the Lobachevsky space.

Keywords: problem of shadow, hyperbolic space, generalized convexity, sphere, ball, surface of constant curvature, horosphere, horoball.

1. Введение

Задача о тени поставлена Г. Худайбергановым [1] в 1982 году в следующей формулировке:

какое минимальное число непересекающихся шаров с центрами на $(n-1)$-мерной сфере евклидова пространства R^n и радиуса меньшего, чем радиус сферы, достаточно для того, чтобы каждая прямая, проходящая через центр сферы, пересекалась хотя бы с одним из шаров семейства?

Kostin, A.V., Problem of shadow and surface of constant curvature.

This paper has been supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program ("Priority-2030") .

Поступила 29 марта 2020 г., опубликована 20 февраля 2023 г.

В двумерном случае Г. Худайбергановым доказано, что для этой цели достаточно двух кругов. В этой же работе предполагалось, что в n-мерном случае достаточно n шаров. Это предположение оказалось ошибочным. Ю.Б.Зелинский, И.Ю. Выговская и М.В. Стефанчук ([2], см. также [3]) доказали, что в n-мерном евклидовом пространстве при $n > 2$ необходимо и достаточно $n + 1$ шара. Этой задаче и её различным вариациям и обобщениям посвящен ряд работ Ю.Б. Зелинского и его учеников, коллег и последователей.
Задача о тени является частным случаем задачи о нахождении минимальных условий, обеспечивающих принадлежность точки обобщённо-выпуклой оболочке семейства множеств. Приведём соответствующие определения, взяв в качестве "базового" пространства пространство Лобачевского.

Определение 1. *Множество U из n-мерного пространства Лобачевского H^n называется m-выпуклым относительно точки $M \in H^n \backslash U$, если существует m-мерная плоскость, проходящая через точку M и не имеющая с множеством U общих точек.*

Пересечение множеств, m-выпуклых относительно точки M, является m-выпуклым относительно точки M.

Определение 2. *Множество $U \in H^n$, m-выпуклое относительно каждой точки $M \in H^n \backslash U$, называется m-выпуклым.*

Множества из этого определения также удовлетворяют аксиоме выпуклости: пересечение m-выпуклых множеств само является m-выпуклым.

Определение 3. *Минимальное m-выпуклое множество, содержащее множество $U \in H^n$, называется m-выпуклой оболочкой множества U.*

Если m-мерные плоскости в определениях заменить на m-мерные полуплоскости, то получим определения для m-полувыпуклых множеств и m-полувыпуклых оболочек.

В работе будут рассматриваться главным образом только случаи для $m = 1$. Задача о тени в постановке Г.Худайберганова с этой точки зрения может быть переформулирована как задача о нахождения минимального числа непересекающихся шаров с центрами на $(n - 1)$-мерной сфере евклидова пространства, имеющих радиусы, меньшие, чем радиус этой сферы, и обеспечивающих принадлежность центра сферы 1-выпуклой оболочке семейства шаров. Выпуклые в традиционном понимании множества (отрезок, соединяющий каждую пару точек множества, принадлежит множеству) будут 1−выпуклыми и 1−полувыпуклыми. Невыпуклый многоугольник на рис.1, рассматриваемый как двумерная фигура (не каркас), является 1−полувыпуклым (для каждой непринадлежащей ему точки плоскости найдётся луч с началом в этой точке, непересекающийся с многоугольником), но не 1−выпуклым множеством.

Для этого множества 1−выпуклая оболочка совпадает с выпуклой оболочкой, понимаемой в традиционном смысле. Пара точек образует множество, 1−выпуклое и 1−полувыпуклое. Одна из возможных конфигураций кругов, обеспечивающих принадлежность центра окружности их 1−выпуклой оболочке, представляет собой пример 1−полувыпуклого, но, очевидно, не 1−выпуклого множества (Рис.2). Эти примеры являются общими и для евклидовой, и

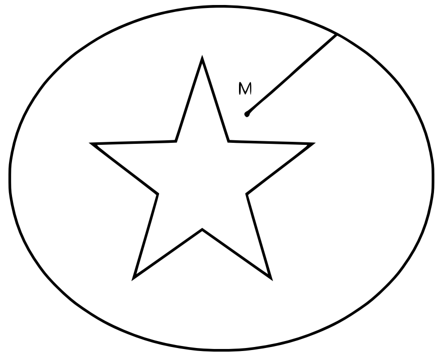

Рис. 1. 1-полувыпуклый многоугольник

для гиперболической геометрии, а многоугольник на рис.1 можно также рассматривать как многоугольник в проективной модели плоскости Лобачевского. Всюду при рассмотрении принадлежности точки M (полу)выпуклой оболочке множеств будет предполагаться, что эти множества не пересекаются и не содержат точку M. Будем также говорить, что эти множества создают тень в точке M.

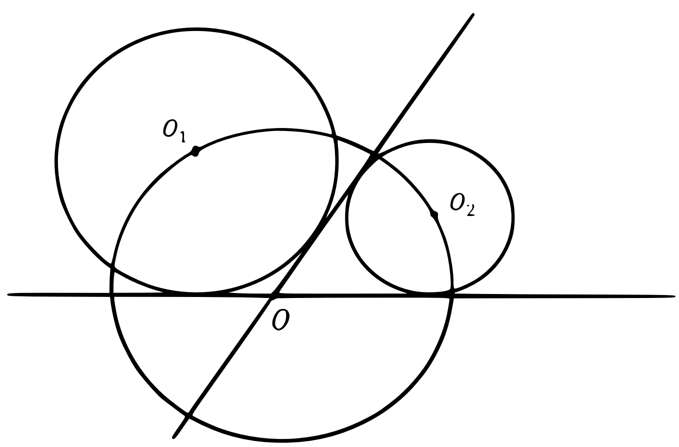

Рис. 2. Пара кругов с центрами на окружности

В работах [4], [5] в евклидовом пространстве вместо шаров, привязанных к сфере, рассматриваются множества, получаемые из одного множества с непустой внутренностью с помощью преобразований, включающих либо движения и гомотетии, либо только параллельные переносы и гомотетии, и оценивается число множеств такого вида, обеспечивающих принадлежность выбранной точки их $1-$выпуклой и $1-$полувыпуклой оболочке. В обзорной работе [6] кроме изложения результатов даются новые постановки задач о принадлежности точек обобщённо-выпуклой оболочке семейств множеств (см.также [7]), и приводятся все необходимые определения для евклидова случая. В евклидовом пространстве рассматривается обобщение задачи о тени не только для центра сферы, а для всех точек шара, ограниченного сферой. Доказывается, что в двумерном случае для того, чтобы каждая прямая, проходящая через внутреннюю точку окружности S^1, пересекалась хотя бы с одним из непересекающихся кругов с центрами на S^1 и радиусами, меньшими радиуса окружности S^1, требуется три круга. На плоскости Лобачевского в аналогичной задаче число кругов зависит от радиуса окружности и растёт до бесконечности с ростом радиуса [10]. В [6] предлагаются также варианты задачи, когда центры шаров, создающих тень в выбранной точке, лежат на двух сферах с центрами в этой точке. В статьях М.В. Ткачука и Т.М. Осипчук [8] рассматриваются обобщения задачи о тени, когда центры шаров, создающих тень, находятся на границе произвольной области в евклидовом пространстве. В статье [9] тех же авторов рассматривается случай, когда центры шаров, создающих тень в точке, располагаются на эллипсоиде вращения. В [11] рассматривается аналогичный случай в пространстве Лобачевского, а также его обобщения. В работе Ю.Б. Зелинского [12] рассматривается аналог задачи о тени в комплексном пространстве. Статьи [13], [14] посвящены изучению открытых множеств, m-выпуклых относительно каждой точки границы. В этих работах приводятся примеры множеств в евклидовом пространстве, не являющихся m-(полу)выпуклыми, но обладающих свойством m-(полу)выпуклости относительно каждой своей граничной точки, оценивается число компонент связности таких множеств в малых размерностях.

2. Основные результаты

В работе рассмотрены различные аналоги задачи о тени в двумерном и трёхмерном пространствах Лобачевского, в частности, аналоги задачи о тени с центрами шаров на двух сферах, в евклидовом пространстве рассмотренной Ю. Б. Зелинским.

В теоремах 1,2 определены условия, обеспечивающие принадлежность точки обобщённо-выпуклой оболочке орикругов на плоскости Лобачевского и оришаров в трёхмерном пространстве Лобачевского, удалённых от данной точки на два расстояния.

В теореме 3 определены метрические характеристики, обеспечивающие принадлежность точки 1-полувыпуклой оболочке шаров, центры которых расположены на двух расстояниях от данной точки. Как следствие, получены метрические характеристики конфигурации из двух шаров и трёх оришаров, достаточные для принадлежности точки их обобщённо-выпуклой оболочке.
В теореме 4 определены условия, достаточные для принадлежности центра сферы 1-полувыпуклой оболочке непересекающихся шаров с центрами на этой сфере.

В теореме 5 установлена связь евклидовых поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны с касательными конусами к орисфере в трёхмерном пространстве Лобачевского.

3. Принадлежность точки обобщенно-выпуклой оболочке шаров и оришаров

Определение 4. *Орициклом, см.* [15], *называется линия, ортогонально пересекающая пучок параллельных прямых на гиперболической плоскости. Орикругом называется часть плоскости Лобачевского, ограниченная орициклом. Орифероӣ называется поверхность, ортогонально пересекающая связку параллельных прямых в гиперболическом пространстве. Оришаром называется область пространства Лобачевского, ограниченная орисферой.*

В [10] найдены условия, обеспечивающие принадлежность точки 1-выпуклой оболочке орикругов на плоскости Лобачевского, удалённых от этой точки на одно и то же расстояние. Показано, что для этого требуется три орикруга. Приведено также обобщение этого результата для всех точек, принадлежащих выпуклой оболочке орикругов, понимаемой традиционно. Для принадлежности точки 1-полувыпуклой оболочке никакого конечного числа орикругов, находящихся от точки на одном расстоянии, недостаточно. Множество, состоящее из двух орикругов, является 1−полувыпуклым. Множество, состоящее из трёх орикругов, может как быть 1-полувыпуклым, так и не быть. В последнем случае все три расстояния от точки, не принадлежащей объединению орикругов, но принадлежащей их 1−полувыпуклой оболочке, должны быть различными. На рис.3 в модели Пуанкаре в круге центр O абсолюта Ω принадлежит 1−выпуклой оболочке орикругов ω_1 и ω_2.

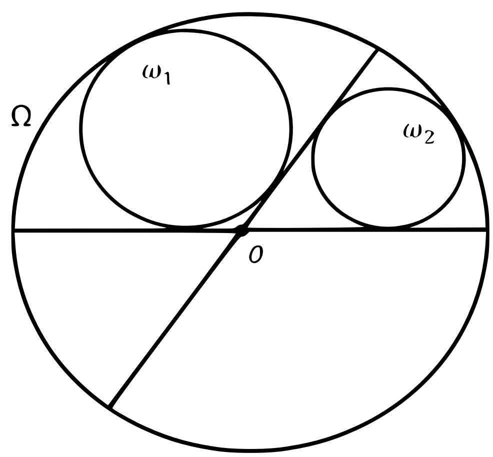

Рис. 3. Пара орикругов в модели Пуанкаре

На рис.4 приведена конфигурация из трех орикругов, обеспечивающая принадлежность центра абсолюта их 1−полувыпуклой оболочке. Три луча, выходящие из центра абсолюта, образуют здесь попарно различные углы. В двух последних случаях задача о принадлежности точки O 1−(полу)выпуклой оболочке может быть сформулирована в евклидовых терминах как задача о принадлежности центра евклидовой окружности 1−(полу)выпуклой оболочке непересекающихся кругов, касающихся этой окружности.

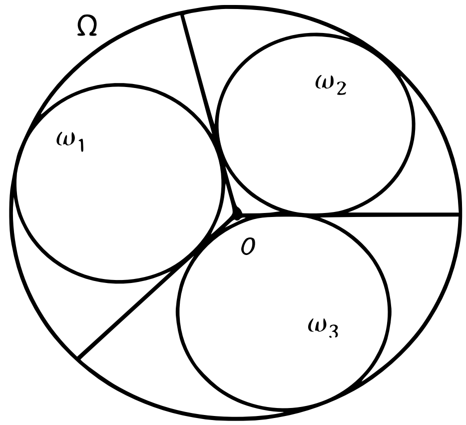

Рис. 4. Конфигурация из трех орикругов в модели Пуанкаре

Теорема 1. *Пусть точка M на плоскости Лобачевского принадлежит 1-полувыпуклой оболочке непересекающихся открытых (замкнутых) орикругов, удалённых от M на два расстояния. Тогда минимальное число таких орикругов равно четырём.*

Доказательство. Трёх непересекающихся орикругов, удалённых от M на два расстояния, очевидно, недостаточно. В этом случае между двумя орикругами, удалёнными от точки M на одно и тоже расстояние, найдётся луч с началом в M, не имеющий общих точек с орикругами. Проведём через точку M две неортогональные прямые. Впишем в каждый из полученных углов по орикругу. Если прямые на гиперболической плоскости кривизны $K = -\dfrac{1}{\rho^2}$ образуют угол α, то орикруги будут удалены от точки M на расстояния $-\rho \cdot \ln|sin\frac{\alpha}{2}|$ и $-\rho \cdot \ln|cos\frac{\alpha}{2}|$ (длины дуг граничных орициклов между точками касания при этом равны соответственно $2\rho \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$ и $2\rho \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$, и сумма их не превосходит $4\sqrt{2}\rho$, см.также [16]). Четыре замкнутых орикруга при этом обеспечивают принадлежность точки M их 1-полувыпуклой оболочке. Приблизим два орикруга, вписанные в вертикальные углы на одно и то же малое расстояние к точке M, так, чтобы они не пересекались с двумя оставшимися орикругами. Четыре открытых орикруга также обеспечат принадлежность точки M их 1-полувыпуклой оболочке. □

Теорема 2. *Пусть точка M в пространстве Лобачевского принадлежит 1-выпуклой (2-полувыпуклой) оболочке непересекающихся открытых (замкнутых) оришаров, удалённых от M на два расстояния. Тогда минимальное число таких оришаров равно четырём.*

Доказательство. Трёх непересекающихся оришаров, удалённых от M на два расстояния, недостаточно. Через точку M в этом случае проходила бы плоскость симметрии двух оришаров, находящихся от M на одном расстоянии. Точка M при этом не принадлежала бы и 2-полувыпуклой оболочке оришаров. Воспользуемся моделью Пуанкаре трёхмерного пространства Лобачевского в евклидовом шаре

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4.$$

Поместим точку M в центр абсолюта. Первый оришар Ω_1 возьмём первоначально таким, чтобы точка M лежала на его границе. Пусть он изображается единичным евклидовым шаром с центром в точке с координатами $(0, 0, 1)$. Диаметры абсолюта будут играть роль прямых и в пространстве Лобачевского, а диаметральные сечения будут плоскостями гиперболического пространства (как и сечения сферами, ортогональными абсолюту). Три оставшихся оришара $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ возьмём так, чтобы они касались друг друга и оришара Ω_1. Евклидовы центры шаров, изображающих оришары, можно расположить в точках с координатами

$$(-\frac{2\sqrt{3}}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{4}{7}), (-\frac{2\sqrt{3}}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{4}{7}), (\frac{4\sqrt{3}}{7}, 0, -\frac{4}{7}).$$

Евклидовы радиусы их равны $\frac{6}{7}$. С помощью элементарных геометрических вычислений убеждаемся, что каждый из оришаров $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ в поскости $z = 0$ перекрывает угол чуть больше $80,4°$. Если все оришары открыты, то каждая прямая, проходящая через не принадлежащую им точку M, будет пересекаться с одним из оришаров. Чуть удалим оришары от точки M, сместив их по осям, проходящим через эту точку. Получим, что каждая прямая , содержащая M, будет пересекаться хотя бы с одним из замкнутых оришаров. Для полуплоскостей, содержащих M, утверждение очевидно.

□

Теорема 3. *Для того, чтобы точка M в трёхмерном пространстве Лобачевского принадлежала 1-полувыпуклой оболочке шаров, не содержащих M, центры которых расположены на двух сферах с центром в точке M, достаточно пяти открытых (замкнутых) шаров. Если при этом r – меньший радиус сферы, а R – больший, то в конфигурации, обеспечивающей выполнение этого условия,*

$$\tanh \frac{r}{\rho} < \frac{2\cosh\frac{R}{\rho} - \sqrt{4 + 3\sinh^2\frac{R}{\rho}}}{\sqrt{3}\sinh\frac{R}{\rho}}.$$

Доказательство. Возьмём два равных шара достаточно малого радиуса r, касающиеся в точке M. В касательной плоскости проведём три луча, образующие между собой разные углы. Углы можно выбрать близкими по величине к $2\pi/3$. Центры трёх шаров, касающихся проведённых лучей, разместим в касательной плоскости на расстоянии R от точки M. Определим условия, при которых такая конфигурация шаров обеспечит принадлежность точки M 1-полувыпуклой оболочке шаров. При фиксированном значении R верхняя грань для r определится из условия, когда лучи в касательной плоскости образуют равные попарные углы $2\pi/3$. Пусть $\tilde{r}$– радиус шаров с центрами в касательной плоскости к шарам радиуса r. Тогда

$$\cosh\frac{r + \tilde{r}}{\rho} = \cosh\frac{r}{\rho}\cosh\frac{R}{\rho}.$$

Отсюда

$$\tanh\frac{r}{\rho}=\frac{\cosh\dfrac{R}{\rho}-\cosh\dfrac{\tilde r}{\rho}}{\sinh\dfrac{\tilde r}{\rho}}.$$

Учитывая, что

$$\sinh\frac{\tilde r}{\rho}=\sinh\frac{R}{\rho}\sin\frac{\pi}{3},$$

получим

$$\tanh\frac{r}{\rho}=\frac{2\cosh\dfrac{R}{\rho}-\sqrt{4+3\sinh^2\dfrac{R}{\rho}}}{\sqrt{3}\sinh\dfrac{R}{\rho}}.$$

Если в аналогичной конфигурации углы между лучами будут разными, чуть уменьшив радиусы двух первых шаров и увеличив радиусы шаров с центрами в касательной плоскости, можно добиться выполнения условий теоремы. □

Следствие 1. *Двух шаров, радиусы которых меньше, чем $\rho\operatorname{artanh}(\frac{2}{\sqrt{3}}-1)$, и трёх оришаров достаточно для того, чтобы точка $M\in H^3$ принадлежала их 1-полувыпуклой оболочке.*

Доказательство. В конфигурации из предыдущей теоремы сохраним два первых шара, а центры оставшихся устремим к бесконечности. В пределе эти шары станут оришарами, а неравенство примет вид: $\tanh\frac{r}{\rho}<\frac{2}{\sqrt{3}}-1$. В евклидовом пространстве в аналогичной конфигурации с пятью шарами важно только отношение радиусов сфер, на которых расположены центры шаров. В пространстве Лобачевского и в конфигурации с пятью шарами радиусы первых двух шаров должны быть меньше, чем $\rho\operatorname{artanh}(\frac{2}{\sqrt{3}}-1)$.

□

С помощью аналогичной конструкции оценим сверху число шаров с центрами на одной сфере, достаточное для того, чтобы центр этой сферы принадлежал их 1-полувыпуклой оболочке.

Теорема 4. *Для того, чтобы центр O сферы S^2 в трёхмерном пространстве Лобачевского H^3 принадлежал 1-полувыпуклой оболочке шаров, не содержащих O, центры которых расположены на сфере S^2, достаточно десяти открытых (замкнутых) шаров. Если радиус R сферы S^2 больше определенного значения, то для принадлежности центра сферы 1-полувыпуклой оболочке достаточно девяти шаров.*

Доказательство. В H^3 возьмём два открытых шара B_1, B_2 радиуса R, касающихся в точке O. Эти шары создают тень всюду, кроме плоскости Σ, которой касаются шары B_1, B_2. На окружности радиуса R с центром O в плоскости Σ возьмём четыре точки, делящие окружность на равные части. В них разместим центры четырёх шаров B_3-B_6, касающихся шаров B_1, B_2. Радиусы этих шаров будут равны $r=\rho\operatorname{arcosh}(\cosh^2\frac{R}{\rho})-R$. Каждый из этих шаров виден из точки O в плоскости Σ под углом α, таким, что

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \cosh\frac{R}{\rho}(\sqrt{\cosh^2\frac{R}{\rho}+1}-1).$$

Здесь $\sqrt{2}-1 < \sin\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}$. Ещё четыре шара $B_7 - B_{10}$ можно разместить в оставшихся промежутках так, чтобы 10 открытых шаров обеспечивали тень в точке O. Чуть уменьшив радиусы шаров, получим, что 10 замкнутых шаров обеспечивают принадлежность центра сферы их 1-полувыпуклой оболочке. В евклидовом пространстве такая конфигурация шаров не допускает уменьшения их числа при изменении радиуса сферы [4]. В пространстве Лобачевского при увеличении R число шаров с центрами в плоскости Σ можно уменьшить. Граничное значение R_0 радиуса R , при котором возможно уменьшения числа шаров, создающих тень, определяется из уравнения

$$\sin\frac{\pi}{7} = \cosh\frac{R}{\rho}(\sqrt{\cosh^2\frac{R}{\rho}+1}-1).$$

Отсюда получим, что R_0 приближённо равняется $\rho \cdot 0,1857731043$.

□

4. Поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны

Если рассматривать принадлежность точки M пространства Лобачевского обобщённо выпуклой оболочке оришаров, то очевидно, что каждый луч с началом в точке M, лежащий внутри касательного конуса к граничной орисфере оришара, пересекается с оришаром. Внутренняя геометрия на орисфере евклидова. Интересным фактом является то, что изометрическое вложение поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны в евклидово пространство тоже связано с орисферами.

Хорошо известно (см. [17]–[20]), что профиль (начальный меридиан) поверхности вращения постоянной кривизны $K = -\frac{1}{a^2}$ евклидова пространства в декартовых координатах может быть задан следующим образом:

$$\begin{cases} z = \int\sqrt{\dfrac{a^2(1-b^2)-x^2}{x^2+a^2b^2}}dx, \\ y = 0, \end{cases} \tag{1}$$

или

$$\begin{cases} z = \int\sqrt{\dfrac{a^2(1+b^2)-x^2}{x^2-a^2b^2}}dx, \\ y = 0. \end{cases} \tag{2}$$

В первом случае при $b \neq 0$ при вращении получим поверхность, имеющую конические особые точки и рёбра возврата. После разреза по меридиану каждый сегмент поверхности отображается на круговой сектор плоскости Лобачевского. Во втором случае при $b \neq 0$ при вращении получим поверхность, имеющую рёбра возврата. После разреза по меридиану каждый сегмент поверхности отображается на эквидистантный сектор плоскости Лобачевского. При $b = 0$

$$(3) \qquad \begin{cases} z = \int \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{x^2}} dx, \\ \qquad\qquad y = 0. \end{cases}$$

в обоих случаях получим псевдосферу Бельтрами-Миндинга.

Покажем, как все эти поверхности связаны с касательными конусами к орисфере в трёхмерном пространстве Лобачевского. На рисунках 5-7 в проективной модели абсолют Ω представляет собой квадрику, гомеоморфную сфере. Орисферы изображаются эллипсоидами, касающимися абсолюта. Касательные конусы в этой модели являются конусами и с аффинной точки зрения.

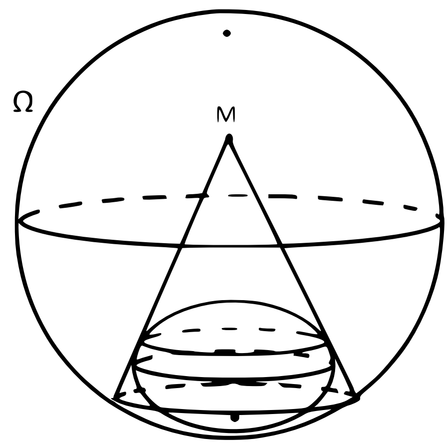

Рис. 5. Касательный конус к орисфере в проективной модели

Теорема 5. *Каждый сегмент поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны в евклидовом пространстве глобально изометричен части касательного конуса до линии, по которой конус касается орисферы. При этом для поверхности с меридианом (1) вершина конуса лежит в собственной области (см.рис.5), для поверхности с меридианом (3) вершина является бесконечно удалённой (рис.7). Для поверхности с меридианом (2) вершина лежит в идеальной области трёхмерного пространства Лобачевского (рис.6). В этом случае сегмент поверхности между двумя рёбрами возврата изометричен части конуса между линиями касания к двум орисферам.*

Доказательство. Максимальный радиус параллели поверхности с меридианом (1) легко определяется: $x_{max} = a\sqrt{1-b^2}$. Положим $a = 1$. Тогда после разреза по меридиану один сегмент поверхности отобразится на сектор круга радиуса $r = \operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{1-b^2}}{b}$. Поверхность вращения прямой вокруг пересекающей её прямой в трёхмерном пространстве Лобачевского H^3 локально несёт на себе геометрию той же кривизны, что и пространство, в которое она вложена. Эту поверхность, в случае, когда прямые неортогональны, называют также конусом параллельности, поскольку существует плоскость, которой параллельны все образующие конуса. Если рассматривать обе полости поверхности, то таких плоскостей будет две. Впишем в одну полость конуса орисферу, и покажем, что для каждого конуса именно его часть до линии касания с орисферой изометрична сегменту соответствующей евклидовой поверхности вращения. В плоскости осевого сечения конуса введём метрику Пуанкаре плоскости Лобачевского

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

так, чтобы орицикл, получающийся в сечении касательной орисферы, задавался уравнением $v = 1$. Пусть образующая конуса задаётся уравнением $u^2 + v^2 = 1$, а ось вращения конуса – уравнением $u = \sqrt{1-b^2}$. В этом случае длина окружности, по которой конус касается орисферы, будет совпадать с длиной ребра возврата на поверхности с меридианом (1) при $a = 1$. Нужно, чтобы длина дуги образующей от точки касания $A(0,1)$ до точки $M(\sqrt{1-b^2}, b)$ совпала с длиной сегмента меридиана от конической точки до ребра возврата. Переведя инверсией с центром в точке (-1,0) точки A, M в точки $\tilde{A}(1,2), \tilde{M}(1, \frac{2b}{1+\sqrt{1-b^2}})$, элементарным интегрированием формы $ds = \frac{dv}{v}$ по прямой $\tilde{A}\tilde{M}$ получим:

$$AM = \tilde{A}\tilde{M} = \ln\frac{1+\sqrt{1-b^2}}{b} = \operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{1-b^2}}{b}.$$

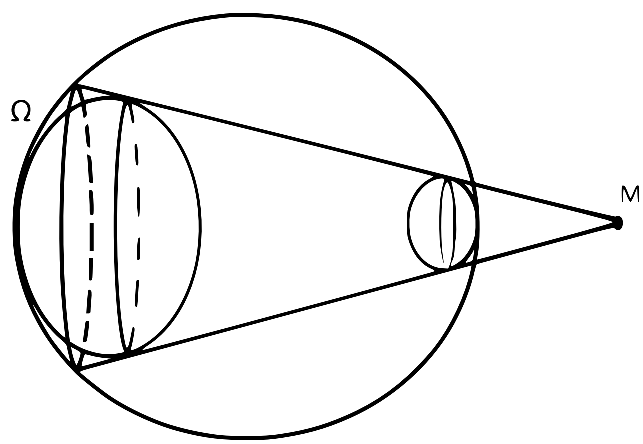

Рис. 6. Касательный конус с вершиной за абсолютом

Рассмотрим теперь поверхность с меридианом (2). Минимальный радиус орбиты $x_{min} = ab$, максимальный – $x_{max} = a\sqrt{1+b^2}$. Положим опять $a = 1$. Тогда длина дуги меридиана от горлового сечения до ребра возврата равна $h = \operatorname{arcosh}\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}$. Сегмент поверхности после разреза по меридиану отображается на эквидистантный сектор высоты h. Без разрезания сегмент поверхности отображается на часть поверхности вращения прямой вокруг расходящейся с ней прямой в трёхмерном пространстве Лобачевского H^3. Покажем, что сегмент поверхности глобально изометричен части касательного конуса к орисфере, когда вершина конуса уходит в идеальную область расширенного трёхмерного пространства Лобачевского. Воспользуемся опять моделью Пуанкаре. Сечение касательной орисферы опять зададим уравнением $v = 1$. Образующую конуса зададим параметрически:

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t. \end{cases} \tag{4}$$

Для того, чтобы максимальная параллель поверхности с меридианом (2) при $a = 1$ изометрично отображалась на линию, по которой конус с идеальной вершиной касается орисферы, ось вращения в сечении должна иметь уравнение $u = \sqrt{1+b^2}$. Горловое сечение поверхности в пространстве Лобачевского (сечение с минимальной длиной параллели) должно соответствовать горловому сечению поверхности в евклидовом пространстве. Минимальная длина параллели поверхности в пространстве Лобачевского, очевидно, определится значением параметра $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, соответствующего минимуму функции

$$\frac{\sqrt{1+b^2} - \sin t}{\cos t}.$$

Отсюда получим: $t = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$. Этому значению параметра соответствует точка P с координатами $u = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}, v = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$. Длина минимальной параллели в пространстве Лобачевского будет равна $2\pi \cdot b$, то есть, совпадает с длиной минимальной параллели соответствующей поверхности в евклидовом пространстве. Длина отрезка, соединяющего точку $(0, 1)$ и точку P, также будет равна

$$\ln \frac{1+\sqrt{1+b^2}}{b} = \operatorname{arcosh} \frac{\sqrt{1+b^2}}{b},$$

то есть, совпадает с h. Горловое сечение поверхности в пространстве Лобачевского будет соответствовать поляре идеальной вершины конуса. Если орисферу, которой касается конус, отразить симметрично относительно этой поляры, то образ, очевидно, будет касаться того же конуса с идеальной вершиной. Часть этого конуса между двумя линиями касания с орисферами и будет глобально изометрична одному сегменту евклидовой поверхности вращения с меридианом (2).

Для псевдосферы соответствующее утверждение очевидно. Касательный конус в этом случае будет поверхностью вращения прямой вокруг параллельной ей прямой в трёхмерном пространстве Лобачевского H^3.

В модели Пуанкаре в евклидовом полупространстве с метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

касательный конус к орисфере $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ может быть задан уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Одна полость псевдосферы Бельтрами-Миндинга кривизны $K = -1$ изометрична части касательного конуса, для точек которой $z \geq 1$. $\square$

А.Д. Сахаров предлагал рассматривать пространство с разной сигнатурой метрики в различных областях в космологических моделях [21]. Для вложения в плоское пространство продолжений касательных конусов к орисфере

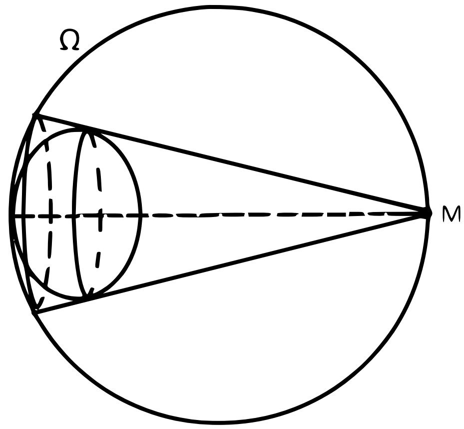

Рис. 7. Касательный конус с вершиной на абсолюте

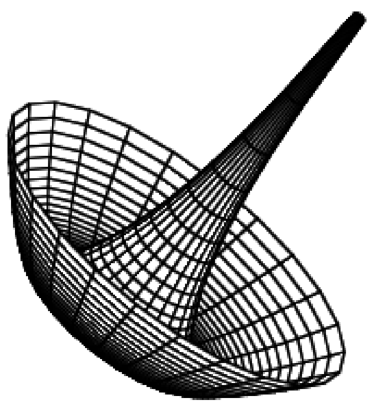

Рис. 8. "Полная"псевдосфера

после линий касания в пространстве с декартовыми координатами x, y, z вне цилиндров, содержащих евклидовы поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны, также нужно изменить сигнатуру метрики, введя псевдоевклидову структуру с помощью формы $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$. В частности, меридиан продолжения поверхности с начальным меридианом 1 может быть задан так:

$$
(5) \qquad \begin{cases} z = \displaystyle\int \sqrt{\frac{x^2 - a^2(1-b^2)}{x^2 + a^2b^2}}\,dx, \\ \hfill y = 0, \end{cases}
$$

а меридиан продолжения поверхности с меридианом (2) – следующим образом:

$$
(6) \qquad \begin{cases} z = \displaystyle\int \sqrt{\frac{a^2(1+b^2) - x^2}{a^2b^2 - x^2}}\,dx, \\ \hfill y = 0. \end{cases}
$$

К месту склейки (общей предельной касательной плоскости) евклидовы и псевдоевклидовы части поверхностей подходят тангенциально.
Одна полость псевдосферы Бельтрами-Миндинга с её псевдоевклидовым продолжением изображены на рис. 8. Меридиан продолжения псевдосферы (см. [22]–[24]), имеет ту же длину отрезка касательной, что и трактриса, только в псевдоевклидовой метрике.

References

[1] G. Khudaiberganov, *On uniformly polynomially convex hull of the union of balls*, Manuscript Dep. VINITI 21.02.1982, no. 1772 - 85 Dep.

[2] Yu.B. Zelinskii, I.Yu. Vygovska, M.V. Stefanchuk, *Generalized convex sets and the problem of shadow*, Ukr. Math. J., **67**:12 (2016), 1874–1883. Zbl 1405.52006

[3] Y.B. Zelinskii, *The Problem of the shadows*, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Sér. Rech. Déform., **66**:1 (2016), 37–42. Zbl 1376.52006

[4] Yu.B. Zelinskii, *Generalized convex envelopes of sets and the problem of shadow*, J. Math. Sci., New York, **211**:5 (2015), 710–717. Zbl 1335.52013

[5] Y.B. Zelinskii, *The shadow problem for a family of convex sets*, Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., **12**:4 (2015), 197–204. Zbl 1340.52012

[6] Yu.B. Zelinskii, I.Yu. Vygovska, H.K. Dakhil *The shadow problem and mixed problems*, Proc. Int. Geom. Cent., **9**:3-4 (2016), 50—58. MR3701555

[7] Yu.B. Zelinskii, M.V. Stefanchuk, *Generalizations of the shadow problem*, Ukr. Math.J., **68**:6 (2016), 862–867. Zbl 1498.52009

[8] T.M. Osipchuk, M.V. Tkachuk *The problem of shadow for domains in Euclidean spaces*, J. Math. Sci., New York, **224**:4 (2017), 555–562. Zbl 1381.51017

[9] T.M. Osipchuk, M.V. Tkachuk *The shadow problem for the ellipsoid of revolution*, Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., **12**:3 (2015), 243–250. Zbl 1340.52004

[10] A.V. Kostin, *Problem of shadow in the Lobachevskii space*, Ukr. Math. J., **70**:11 (2019), 1758—1766. Zbl 1472.51013

[11] A.V. Kostin, *Some generalizations of the shadow problem in the Lobachevsky space*, Ukr. Math. J., **73**:1 (2021), 67—75. Zbl 1483.52008

[12] Y.B. Zelinskii, *Problem of shadow (complex case)*, Adv. Math., Sci. J., **5**:1 (2016), 1–5. Zbl 1377.30020

[13] Yu.B. Zelinskii, Kh.K. Dakkhil, B.A. Klishchuk *On weakly m-convex sets*, Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky, **2017**:4 (2017), 3—6. Zbl 1374.52002

[14] T.M. Osipchuk, *On semiconvexity of open sets with smooth boundery in the plane*, Proc. Intern. Geom. Center, **12**:4 (2019), 69—88.

[15] B.A. Rosenfel'd, *Non-Euclidean spaces*, Nauka, Moscow, 1969. Zbl 0176.18901

[16] A.V. Kostin, N.N. Kostina *An interpretation of Casey's theorem and of its hyperbolic analogue*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **13** (2016), 242–251. Zbl 1433.51013

[17] F. Minding, *Ueber die Biegung krummer Flächen*, J. Reine Angew. Math., **18** (1838), 297–302. ERAM 018.0601cj

[18] F. Minding, *Wie sich entscheiden läßt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse*, J. Reine Angew. Math., **19** (1839), 370–387. ERAM 019.0625cj

[19] F. Minding, *Beiträge zur Theorie der kürzerten Linien auf krummen Flächen*, J. Reine Angew. Math., **20** (1840), 323–327. ERAM 020.0649cj

[20] F. Klein, *Vorlesungen uber nicht-euklidische Geometrie*, Springer, Berlin, 1928. JFM 54.0593.01

[21] A.D. Sakharov, *Cosmological transitions with changes in the signature of the metric*, Zh. Eksp. Teor. Fiz, **87** (1984), 375—383.

[22] A.V. Kostin, *Asymptotic lines on the pseudo-spherical surfaces*, Vladikavkaz. Mat. Zh., **21**:1 (2019), 16–26. Zbl 1463.53021

[23] A.V. Kostin, *Asymptotic lines on pseudospheres and the angle of parallelism*, Russ. Math., **65**:6 (2021), 21—28. Zbl 1471.53010

[24] A.V. Kostin, *Evolutes of meridians and asymptotics on pseudospheres*, J. Math. Sci., New York, **263**:3 (2022), 371—378. Zbl 1493.51013

Andrey Viktorovich Kostin
Kazan Federal University, Elabuga Institute
Kazanskaya, 89,
423604, Elabuga, Russia
Email address: kostin_andrei@mail.ru