S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 20, №1, стр. 207–210 (2023) УДК 519.17
DOI 10.33048/semi.2023.20.017 MSC 05C25

ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЙ ГРАФ С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{143, 108, 27; 1, 12, 117\}$ НЕ СУЩЕСТВУЕТ

А.А. Махнев, М.М. Исакова, А.А. Токбаева

Abstract. There is a formally self-dual distance-regular graph Γ with classical parameters $d = 3$, $b = \alpha + 1 = q$, $\beta = q^2 + q - 1$ and intersection array $\{(q^2+q-1)(q^2+q+1), (q^2+q)q^2, q^3; 1, (q^2+q), q^2(q^2+q+1)\}$. For the graph Γ we have the strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3 (Γ_3 is pseuqo-geometric for $pG_{q-1}(q^2+q-1, (q^2+q+1)(q-1))$).

It is proved that a distance-regular graph with intersection array $\{143, 108, 27; 1, 12, 117\}$ $(q = 3)$ does not exist.

Keywords: distance-regular graph, formally self-dual graph, triple intersection numbers.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф диаметра d, $i \in \{2, 3, ..., d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u, w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u, w) = i$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это

Makhnev, A.A., Isakova M.M, Tokbaeva A.A., Distance-regular graph with intersection array $\{143, 108, 27; 1, 12, 117\}$ does not exist.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научного проекта №20-51-53013.

Поступила 16 октября 2021 г., опубликована 9 марта 2023 г.

степень графа, $c_1 = 1$. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ [1].

Дистанционно регулярный граф называется формально самодуальным, если первая $P = (P_{ij})$ и вторая $Q = (Q_{ij})$ матрицы его собственных значений совпадают.

Связный неполный граф Γ называется графом Тервиллигера (с параметром μ), если для любых двух вершин u, w на расстоянии 2 подграф $[u]\cap[w]$ является μ-кликой.

В [2] Юришич и Видали рассматривли дистанционно регулярные графы с классическими параметрами d, b, α, β и $b = \alpha + 1$ или $b = \alpha$. Они доказали, что дистанционно регулярные графы с классическими параметрами $d, b, b-1, b^{d-1}$ являются d-кубами.

Q-полиномиальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3 имеет массив пересечений $\{t(c_2+1)+a_3, tc_2, a_3+1; 1, c_2, t(c_2+1)\}$, где $(t^2-a_3-1)(c_2+1) = a_3(a_3+1)$ [3]. Положим $a = a_3$. Скажем, что Γ — граф типа (I), если c_2+1 делит a, Γ — граф типа (II), если c_2+1 делит $a+1$, Γ — граф типа (III), если c_2+1 не делит a и не делит $a+1$. Доказательство несуществования небольших графов типа (III) получено в [4].

Граф Γ типа (I) является формально самодуальным. Если этот граф имеет классические параметры d, b, α, β, то $d = 3$, $b = \alpha+1 = q$, $\beta = q^2+q-1$ и Γ имеет массив пересечений $\{(q^2+q-1)(q^2+q+1), (q^2+q)q^2, q^3; 1, (q^2+q), q^2(q^2+q+1)\}$. Далее, Γ имеет собственные значения $q^4+2q^3+q^2-1, q^3+q^2-1, -1, -(q^2+q+1)$ кратностей $1, (q^2+q+1)(q^2+q-1), (q^2+q+1)(q^2+q-1)q^2, (q^2+q-1)q^3$ соответственно.

При $q = 2$ получим массив пересечений $\{35, 24, 8; 1, 6, 28\}$, а при $q = 3$ – $\{143, 108, 27; 1, 12, 117\}$. С помощью тройных чисел пересечений в [5] было доказано, что первый граф не существует.

Теорема 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{143, 108, 27; 1, 12, 117\}$ *не существует.*

В доказательстве теоремы 1 используются тройные числа пересечений [5].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{ {u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right] = |\left\{ {u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right\}|$. Числа $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right]$ будем писать $[r_1r_2r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1r_2r_3]$ нет общих формул. Однако, в [5] изложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u,v), U = d(v,w), V = d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x,u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$, и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим:

$$\begin{cases} \sum_{l}^{d}[ljh] = p_{jh}^{U} - [0jh] \\ \sum_{l}^{d}[ilh] = p_{ih}^{V} - [i0h] \qquad (+) \\ \sum_{l}^{d}[ijl] = p_{ij}^{W} - [ij0] \end{cases}$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j| > W$ или $i+j < W$ имеем $p_{ij}^{W} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, ..., d\}$.

Положим $S_{ijh}(u,v,w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th} \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$. Если параметр Крейна $q_{ij}^{h} = 0$, то $S_{ijh}(u,v,w) = 0$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{143, 108, 27; 1, 12, 117\}$. Тогда Γ имеет $1 + 143 + 1287 + 297 = 1728$ вершин, спектр $143^1, 35^{143}, -1^{1287}, -13^{297}$, вторую матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 143 & 1287 & 297 \\ 1 & 35 & -9 & -27 \\ 1 & -1 & -9 & 9 \\ 1 & -13 & 39 & -27 \end{pmatrix},$$

и числа пересечений

(1) $p_{11}^1 = 34$, $p_{21}^1 = 108$, $p_{22}^1 = 936$, $p_{32}^1 = 243$, $p_{33}^1 = 54$;

(2) $p_{11}^2 = 12$, $p_{21}^2 = 104$, $p_{22}^2 = 966$, $p_{31}^2 = 27$, $p_{32}^2 = 216$, $p_{33}^2 = 54$;

(3) $p_{21}^3 = 117$, $p_{22}^3 = 936$, $p_{31}^3 = 26$, $p_{32}^3 = 234$, $p_{33}^3 = 36$.

Отсюда граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами (1728,1287,966,936), а Γ_3 сильно регулярен с параметрами (1728,297,36,54). Ввиду границы Дельсарта порядок клики в Γ не больше $1 + 143/13 = 12$.

Для вершин u, v, w графа Γ положим $[rst] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$.

Лемма 1. *Пусть $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$. Тогда для тройных чисел пересечений выполняются равенства:*

$[111] = r_{11}$, $[112] = r_{10} - r_7 - 2r_8 - r_9/8 + 861/8$, $[113] = -r_{10} + r_7 + 2r_8 + r_9/8 - 765/8$, $[121] = -r_{11} - r_8 + 12$, $[122] = -4r_{10} + 2r_7 + 6r_8 + r_9/8 - 245/8$, $[123] = 4r_{10} + r_{11} - 2r_7 - 5r_8 - r_9/8 + 981/8$, $[131] = r_8$, $[132] = 3r_{10} - r_7 - 4r_8 + 27$, $[133] = -3r_{10} + r_7 + 3r_8$;

$[211] = -r_{10} - r_{11} + 12$, $[212] = 2r_7 + 2r_8 + r_9/8 - 245/8$, $[213] = r_{10} + r_{11} - 2r_7 - 2r_8 - r_9/8 + 981/8$, $[221] = 4r_{10} + 4r_{11} - 2r_7 - 2r_8 - 3r_9/8 + 2815/8$, $[222] = r_9$, $[223] = -4r_{10} - 4r_{11} + 2r_7 + 2r_8 - 5r_9/8 + 4905/8$, $[231] = -3r_{10} - 3r_{11} + 2r_7 + 2r_8 + 3r_9/8 - 2079/8$, $[232] = -2r_7 - 2r_8 - 9r_9/8 + 7965/8$, $[233] = 3r_{10} + 3r_{11} + 3r_9/4 - 2079/4$;

$[311] = r_{10}$, $[312] = -r_{10} - r_7 + 27$, $[313] = r_7$, $[321] = -4r_{10} - 3r_{11} + 2r_7 + 3r_8 + 3r_9/8 - 2079/8$, $[322] = 4r_{10} - 2r_7 - 6r_8 - 9r_9/8 + 7965/8$, $[323] = 3r_{11} + 3r_8 + 3r_9/4 - 2079/4$, $[331] = 3r_{10} + 3r_{11} - 2r_7 - 3r_8 - 3r_9/8 + 2295/8$, $[332] = -3r_{10} + 3r_7 + 6r_8 + 9r_9/8 - 6453/8$, $[333] = -3r_{11} - r_7 - 3r_8 - 3r_9/4 + 2295/4$,

где $r_7 \in \{0, 1, ..., 27\}$, $r_9 \in \{645, 653, ..., 765\}$, $r_8, r_{10}, r_{11} \in \{0, 1, ..., 12\}$, r_9 сравнимо с 5 по модулю 8.

Доказательство. Решая систему линейных уравнений $(+)$ со свободными неизвестными $r_7 = [313]$, $r_8 = [131]$, $r_9 = [222]$, $r_{10} = [311]$, $r_{11} = [111]$, получим требуемые равенства. Из равенства $[112] = r_{10} - r_7 - 2r_8 - r_9/8 + 861/8$ следует, что r_9 сравнимо с 5 по модулю 8. □

Заметим, что $[112] + [113] = 12$, поэтому (с учетом равенства $c_2 = 12$) имеем $r_{11} = 0$. Отсюда окрестность любой вершины в Γ не содержит 3-коклик (Γ не содержит 3-лап). Покажем, что Γ является графом Тервиллигера. Действительно, если $[u] \cap [v]$ содержит две несмежные вершины y_1, y_2, и $y_3 \in \Gamma_3(u) \cap [v]$, то $\{y_1, y_2, y_3\}$ является 3-кокликой из $[v]$, противоречие.

В графе Тервиллигера $\{u\} \cup ([u] \cap [v])$ является 13-кликой, противоречие с границей Дельсарта.

Теорема 1 доказана.

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1989. Zbl 0747.05073

[2] A. Jurišić, J. Vidali, *Restrictions on classical distance-regular graphs*, J. Algebr. Comb., **46**:3-4 (2017), 571–588. Zbl 1456.05180

[3] I.N. Belousov, A.A. Makhnev, M.S. Nirova, *On Q-polynomial distance-regular graphs* Γ *with strongly regular graphs* Γ_2 *and* Γ_3, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **16** (2019), 1385–1392. Zbl 1426.05061

[4] A.A. Makhnev, M.M. Isakova, A.A. Tokbaeva, *The nonexistence small Q-polynomial graphs of type (III)*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **17** (2020), 1270–1279. Zbl 1443.05093

[5] A. Jurišić, J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3*, Des. Codes Cryptography, **65**:1-2 (2012), 29–47. Zbl 1245.05036

Aleksandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
str. S.Kovalevskaya, 16,
620990, Yekaterinburg, Russia
Email address: makhnev@imm.uran.ru

Mariana Malilovna Isakova
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
str. Chernyshevsky, 175,
360004, Nalchik, Russia
Email address: isakova2206@mail.ru

Albina Aniuarovna Tokbaeva
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
str. Chernyshevsky, 175,
360004, Nalchik, Russia
Email address: tok2506@mail.ru