S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 20, №1, стр. 211–244 (2023) УДК 517.956.225
DOI 10.33048/semi.2023.20.018 MSC 35J05

КРИТЕРИЙ СОБОЛЕВСКОЙ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ЛИПШИЦЕВЫХ ОБЛАСТЯХ. II

А.И. ПАРФЁНОВ

Abstract. We study the Dirichlet problem for the Poisson equation in bounded Lipschitz domains. We show that its well-posedness in the higher order Sobolev space implies a discrete Hardy type inequality that contains a positive harmonic function with vanishing trace and the approximative numbers of the boundary of the domain. This necessary condition is also expected to be sufficient for the well-posedness. A simpler condition occurring in the author's straightenability theory of Lipschitz domains is shown to be equivalent to the existence of a homeomorphism that straightens the boundary and preserves with respect to composition the subspace of zero trace functions in the considered Sobolev space.

Keywords: approximative numbers, Dirichlet problem for the Poisson equation, Hardy type inequality, Lipschitz domain, straightening.

Введение

Пусть $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 2$ целые, $1 < p < \infty$, а Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$. Скажем, что задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

$W^{m,p}$-корректна (кратко: имеет место $W^{m,p}$-корректность), если для любого $f \in W^{m-2,p}(\Omega)$ существует единственная функция $u \in W^{m,p}(\Omega)$ (где $W^{m,p}(\Omega)$

Parfenov, A.I., Criterion for the Sobolev well-posedness of the Dirichlet problem for the Poisson equation in Lipschitz domains. II.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Поступила 3 мая 2022 г., опубликована 13 марта 2023 г.

означает пространство Соболева) с обобщенным лапласианом $\Delta u = f$ и нулевым следом $\gamma_0 u$. В силу первой части данной статьи $W^{1,p}$-корректность при $p \geqslant 2$ равносильна как $W^{1,p/(p-1)}$-корректности, так и условию Нистрёма

$$(\exists \alpha > 0)\ (\forall a \in \partial\Omega)\ (\forall \beta \in (0, \operatorname{diam}\Omega))$$
$$\int_{B(a,\beta)\cap\Omega} (U/\varrho)^p\, dx \leqslant \alpha\beta^{n-p} \sup_{B(a,\beta)\cap\Omega} U^p.$$

Здесь $B(a,\beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x-a| < \beta\}$, $\varrho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, а непрерывная функция $U : \Omega \to (0,\infty)$ имеет нулевой след на границе $\partial\Omega$ и гармонична в некоторой ее окрестности. Доказательство этого критерия использует формулу Богдана, которая приближенно выражает функцию Грина области Ω через функцию U. Образно говоря, функция U содержит информацию об эффекте влияния границы $\partial\Omega$ на уравнение Пуассона.

В настоящей второй части статьи планировалось показать, что $W^{m,p}$-корректность при $m \geqslant 2$ равносильна условию, которое мы обозначаем через $\Omega \in \mathcal{W}^{m,p}$. Ввиду масштабности задачи решено изложить здесь только необходимость условия $\Omega \in \mathcal{W}^{m,p}$ и один близкий вопрос, отложив достаточность и сопоставление критерия с литературой до третьей части.

Условие $\Omega \in \mathcal{W}^{m,p}$ возникает как комбинация двух соображений. Во-первых, функция U важна не только при $m = 1$, так как формула Богдана независима от применяемых функциональных пространств, а решения однородных уравнений (гармонические функции в случае уравнения Пуассона) иногда дают контрпримеры для задач в областях с конкретными особенностями границы. Во-вторых, задачи в «достаточно гладких» областях часто изучают с помощью локализации и распрямления границы. Соответствующая замена переменных порождает, образно говоря, эффект влияния границы $\partial\Omega$ на применяемое функциональное пространство.

В.Г. Мазья и Т.О. Шапошникова получили в работах [19, 20, 21, 22, 23] в рамках подхода с локализацией и распрямлением границы наименее ограничительные условия на $\partial\Omega$ в теоремах о соболевской корректности или нетеровости общей эллиптической краевой задачи. Они сочетали результаты типа Агмона–Дуглиса–Ниренберга для полупространства с рядом Неймана, оценивая отклонение $\partial\Omega$ от гиперплоскости в терминах поточечных мультипликаторов для пространств Слободецкого. В работах [28, 29, 30, 31, 32] автор дополнил эту теорию теорией распрямляемости, которая большей частью состоит из критерия справедливости общего *дискретного весового неравенства* (ДВН — разновидность неравенства типа Харди для проиндексированных двоичными кубами числовых семейств) и из равносильности (для более общих пространств Лизоркина–Трибеля $F^s_{p,q}(\Omega)$) следующих четырех условий:

- ДВН с участием аппроксимационных чисел границы $\partial\Omega$;
- условие в терминах поточечных мультипликаторов;
- распрямляемость на границе: идентичность пространства следов для функционального пространства в липшицевой области и пространства следов для гладкой области;
- распрямляемость в области: существование диффеоморфизма, который распрямляет область и сохраняет функциональное пространство при замене переменной.

Работа [33], содержащая результаты по корректности задачи (1) в весовом пространстве Соболева $W_w^{2,p}(\Omega)$ с весом w макенхауптовского типа, показала применимость ДВН к проблеме корректности и простоту внесения дополнительного веса в ДВН. Так возникла идея определить условие $\Omega \in \mathcal{W}^{m,p}$, нагружая функцией U классическое ДВН теории распрямляемости.

Структура (данной второй части) статьи следующая. В § 1 показано, что гармоническая функция $u \in C(\overline{\Omega}) + W^{2,1}(\Omega)$ со следом $\gamma_0 u = 0$ равна нулю. Отсюда следует, что при $f \in C_0^\infty(\Omega)$ решение $u \in W^{m,p}(\Omega)$ $(m \geqslant 2)$ задачи (1) является минус потенциалом Грина $-\mathbf{G}f$ функции f.

В § 2 введены аппроксимационные числа функций (osc-числа и osq-числа) и получена некоторая оценка osq-числа границы области.

В § 3 введены классы $\mathcal{W}_{\mathrm{osc}}^{m,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ и $\mathcal{W}_{\mathrm{osq},M,N}^{m,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ $(m \geqslant 2)$ всех липшицевых функций в $\mathbb{R}^{n-1}$, удовлетворяющих ДВН с участием их аппроксимационных чисел и глобального аналога U_ω функции U. Главный результат параграфа содержит равенство

$$\mathcal{W}_{\mathrm{osc}}^{m,p}(\mathbb{R}^{n-1}) = \bigcup_{M\in\mathbb{N}\ \&\ N\geqslant 1} \mathcal{W}_{\mathrm{osq},M,N}^{m,p}(\mathbb{R}^{n-1})$$

и локальный вариант вложения $\mathcal{W}_{\mathrm{osq},M,N}^{m,p}(\mathbb{R}^{n-1}) \subset \mathcal{W}_{\mathrm{osc}}^{m,p}(\mathbb{R}^{n-1})$.

В § 4 на основе формулы Богдана и §§ 1–3 установлен главный результат статьи: $W^{m,p}$-корректность при $m \geqslant 2$ влечет включение $\Omega \in \mathcal{W}^{m,p}$, где $\mathcal{W}^{m,p}$ — класс всех ограниченных липшицевых областей Ω таких, что $\partial\Omega$ локально задается функциями из $\mathcal{W}_{\mathrm{osc}}^{m,p}(\mathbb{R}^{n-1})$. Отметим, что при $m = 2$ можно обойтись без введения osq-чисел и большинства построений §§ 2–4.

В заключительном § 5 с помощью § 3 установлено, что из существования билипшицева гомеоморфизма, который распрямляет область и сохраняет при замене переменных подпространство $\{u \in W^{m,p}(\Omega) \colon \gamma_0 u = 0\}$, вытекает классическое ДВН теории распрямляемости. Обратная импликация содержится в [31], так что выделение случая нулевых граничных значений не приводит к появлению нового понятия распрямляемости. Этот отрицательный результат сближает теорию распрямляемости с теорией краевых задач.

Соглашения. Буква c указывает на различные положительные константы, зависящие от параметров, перечисленных в скобках. Диаметр diam и расстояние dist берутся относительно евклидовой метрики $|x - y|$, но $|\alpha|$ для мультииндекса α — это его длина. Градиент $(D_i f)_{i=1}^n$ и лапласиан $D_{11}f + \cdots + D_{nn}f$ функции f обозначаются через ∇f и Δf, вектор $(0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ — через e_n, а первые $n-1$ компонент вектора $x \in \mathbb{R}^n$ — через x'. При этом

$$|x'|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n-1} |x_i|.$$

Пусть mes — мера Лебега. Положим $s \wedge t = \min\{s,t\}$ и $s \vee t = \max\{s,t\}$ для $s, t \in \mathbb{R}$. Функциональные пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$.

1. Теорема единственности гармонических функций

Приведем часть основных определений статьи.

Определение 1. *Для $\alpha > 0$ и шара или куба $B \subset \mathbb{R}^d$ с центром $\mathfrak{c}_B$ пусть*

$$\alpha B = \{\alpha(x - \mathfrak{c}_B) + \mathfrak{c}_B \colon x \in B\}.$$

Для $1 \leqslant p < \infty$ *и непустого измеримого множества* X *в* $\mathbb{R}^d$ *обозначим через* $L^p(X)$ *пространство Лебега всех (классов эквивалентности) измеримых* p*-суммируемых функций в* X*. На нем вводится норма*

$$\|f\|_{L^p(X)} = \left(\int_X |f|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Обозначим также $\|f\|_{L^\infty(X)} = \operatorname{ess\,sup}_X |f|$.

Ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *называется липшицевой, если* $\Omega \neq \varnothing$ *и для любого* $a \in \partial\Omega$ *существуют число* $\beta > 0$*, движение (аффинная изометрия)* $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *и липшицева функция* $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ *такие, что*

$$D(a) = a \quad \& \quad B(a,\beta) \cap D(\Omega) = \{x \in B(a,\beta)\colon x_n > \omega(x')\}.$$

Пусть Ω *— ограниченная липшицева область. Символом* $C(\overline{\Omega})$ *обозначаем пространство всех функций в* Ω*, которые имеют непрерывное продолжение на замыкание* $\overline{\Omega}$ *области* Ω.

Пусть $\Gamma(\beta) = \int_0^\infty t^{\beta-1}e^{-t}\,dt$ *при* $\beta > 0$*. Введем фундаментальное решение оператора Лапласа и функцию Грина области* Ω *формулами*

$$\mathfrak{E}(0) = -\infty, \quad \mathfrak{E}(x) = \begin{cases} (2\pi)^{-1}\ln|x| & \text{при} \quad n = 2 \ \&\ x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \\ \frac{\Gamma(n/2)}{(2-n)2\pi^{n/2}}|x|^{2-n} & \text{при} \quad n \geqslant 3 \ \&\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \end{cases}$$

$$G(x,y) = -\mathfrak{E}(x-y) + \int_{\partial\Omega} \mathfrak{E}(y-\cdot)\,d\omega(x,\cdot,\Omega) \quad \text{при} \quad x, y \in \Omega.$$

Здесь $\omega(x,\cdot,\Omega)$ *— гармоническая мера в точке* x *относительно области* Ω*. Это такая конечная борелевская мера на* $\partial\Omega$*, что*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u\,d\omega(x,\cdot,\Omega) \tag{2}$$

для любой гармонической функции $u \in C(\overline{\Omega})$.

Положим $\mathbb{N}_0 = \{k \in \mathbb{Z}\colon k \geqslant 0\}$ *и* $\mathbb{N} = \{k \in \mathbb{Z}\colon k \geqslant 1\}$.

Для $m \in \mathbb{N}_0$ *и* $1 \leqslant p < \infty$ *пространство Соболева* $W^{m,p}(\Omega)$ *— это банахово пространство всех функций* $f \in L^p(\Omega)$*, имеющих обобщенные производные* $D^\gamma f \in L^p(\Omega)$ *при* $|\gamma| \leqslant m$*. На нем задана норма*

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\gamma| \leqslant m} |D^\gamma f|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Для $0 < s < 1$ *введем весовое пространство Соболева* ($\varrho(x) = \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$)

$$W_s(\Omega) = \left\{f \in W^{1,1}(\Omega)\colon \|f\|_{W_s(\Omega)} = \int_\Omega |f|\,dx + \int_\Omega \varrho^{-s}|\nabla f|\,dx < \infty\right\}.$$

В [34, § 1] отмечены существование и единственность гармонической меры, а также свойства $G(x,y) = G(y,x) > 0$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная липшицева область. Описывающие $\partial\Omega$ функции ω дифференцируемы почти всюду по теореме Радемахера [43, (2.2.2)], что позволяет локально на $\partial\Omega$ определить поверхностную меру

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla\omega(\xi)|^2}\,d\xi.$$

Она инвариантна относительно движений пространства $\mathbb{R}^n$ и потому допускает не зависящее от параметризаций (a,β,D,ω) задание на всей границе $\partial\Omega$.

При $1 \leqslant p < \infty$ обозначим через $L^p(\partial\Omega)$ пространство L^p относительно меры $d\sigma$ на $\partial\Omega$. Оператор следа $\gamma_0 : C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega) \ni f \mapsto f\big|_{\partial\Omega}$ по [39, гл. 13] имеет продолжение по непрерывности $\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$. Непрерывное вложение $W_s(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$ дает оператор следа $\gamma_0 : W_s(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$.

Пусть $u \in W^{m,p}(\Omega)$ $(m \geqslant 2)$ — решение задачи Дирихле (1) с правой частью $f \in C_0^\infty(\Omega)$, где условие «$u = 0$ на $\partial\Omega$» понимается как $\gamma_0 u = 0$. В силу [34, § 1] для потенциала Грина $\mathbf{G}f(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy$ выполнены соотношения

$$v = \mathbf{G}f + u \in (C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)) + W^{m,p}(\Omega),$$
$$\Delta v = -f + f = 0 \quad \& \quad \gamma_0 v = 0 + 0 = 0.$$

Мы хотим заключить, что $v = 0$. Для установления этого хватило бы теоремы единственности гармонических функций

$$\Delta u = 0 \quad \& \quad \gamma_0 u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0, \tag{3}$$

верной для функций класса $C(\overline{\Omega}) + W^{2,1}(\Omega)$ или класса $W^{1,2}(\Omega) + W^{2,1}(\Omega)$.

По теореме вложения Соболева

$$W^{1,2}(\Omega) + W^{2,1}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega) + W^{1,n/(n-1)}(\Omega) = W^{1,n/(n-1)}(\Omega),$$

что вкупе с известными результатами по $W^{1,p}$-корректности [34, § 4] дает требуемое утверждение для $n = 2, 3$ и некоторых классов областей при $n \geqslant 4$. Заметим, что для пространства $W^{1,p}(\Omega)$ единственность (3) не обязательно имеет место. В самом деле, при $\pi < \Pi < 2\pi$ и $\mu = \pi/\Pi$ положим

$$\Omega = \{x = (r\cos\phi, r\sin\phi) \colon 0 < r < 1 \;\&\; 0 < \phi < \Pi\},$$
$$u(x) = \{r^{-\mu} - r^{\mu}\}\sin(\mu\phi).$$

Функция u гармоническая и является ядром Мартина для точки $0 \in \partial\Omega$. Для $1 \leqslant p < 2\Pi/(\pi + \Pi)$ имеем $u \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\gamma_0 u = 0$ [34, § 5]. Этот пример неединственности известен уже Нечасу (пример 1.1 в [26, гл. 5]).

Пусть $u = u_1 + u_2 \in W^{1,2}(\Omega) + W^{2,1}(\Omega)$ для $n \geqslant 3$ и связной границы $\partial\Omega$. С привлечением теоремы вложения мы можем выразить u_i через Δu_i и $\gamma_0 u_i$ по одной и той же явной формуле (10.3) в [12] с участием оператора $((1/2)I + K)^{-1}$, где K — оператор потенциала двойного слоя на $\partial\Omega$. Это дает единственность (3) для класса $W^{1,2}(\Omega) + W^{2,1}(\Omega)$. Мы не будем переносить это рассуждение на случай несвязной $\partial\Omega$, потому что при выводе критерия $W^{m,p}$-корректности лучше не полагаться на нетривиальные результаты по корректности задачи Дирихле (1) в пространствах дробной гладкости.

В отдельной публикации автор планирует доказать формулу Пуассона (2) и теорему единственности (3) для широкого класса гармонических функций и дать обзор литературы по этим двум темам. Здесь ограничимся теоремой-минимум и упомянем только следующий результат: теорема 5.8 в [17] устанавливает (3) для пространства Бесова $B_{1,1}^{1+s(\Omega)}(\Omega)$, где $s(\Omega) \in (0,1)$ достаточно близко к единице. При этом включение $u \in B_{1,1}^{1+s(\Omega)}(\Omega)$ для гармонической u по теореме 4.1 из [17] равносильно условию

$$|u| + |\nabla u| + \varrho^{1-s(\Omega)}|\nabla^2 u| \in L^1(\Omega),$$

где $\nabla^2 u$ — это вектор $(D^\gamma u)_{|\gamma|=2}$. В утверждении о единственности из [12, § 7] использовано эквивалентное (при $\Delta u = 0$) условие $u \in W_{s(\Omega)}(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть* Ω *— ограниченная липшицева область в* $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$. *Тогда существует* $0 < s < 1$ *такое, что единственность* (3) *имеет место для функций* $u \in C(\overline{\Omega}) + W_s(\Omega)$. *В частности, единственность* (3) *выполняется при* $u \in C(\overline{\Omega}) + W^{2,1}(\Omega)$.

Доказательство. Из основной теоремы в [25] следует, что существуют липшицевы области Ω_k $(k \in \mathbb{N})$ класса C^∞ такие, что $\Omega_k \Subset \Omega_{k+1} \Subset \Omega$, $\lim_{k\to\infty} \Omega_k = \Omega$, а границы $\partial\Omega_k$ задаются в фиксированном конечном наборе карт функциями с равномерно ограниченными постоянными Липшица.

Обозначим

$$\varrho(a) = \operatorname{dist}(a, \partial\Omega) \quad \& \quad B_a = B(a, \varrho(a)/3) \quad \text{при} \quad a \in \Omega.$$

Ввиду леммы 5.9 в [17] найдется $0 < \mu < 1$ такое, что

$$\begin{gathered}(\forall X \in \Omega)\ (\exists k_0)\ (\exists \alpha_0 > 0)\ (\forall k \geqslant k_0)\ (\forall a \in \partial\Omega_k)\\ X \in \Omega_k \quad \& \quad \omega(X, B_a \cap \partial\Omega_k, \Omega_k) \leqslant \alpha_0 \varrho^{n-2+\mu}(a).\end{gathered}$$

Возьмем $X \in \Omega$ произвольно и найдем соответствующие k_0 и α_0.

Пусть $u = u_1 + u_2$, $\Delta u = 0$ и $\gamma_0 u = 0$ для $u_1 \in C(\overline{\Omega})$ и $u_2 \in W_s(\Omega)$, $s = 1 - \mu$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Плотность $C^\infty(\overline{\Omega})$ в $C(\overline{\Omega})$ и вложение $C^\infty(\overline{\Omega}) \subset W_s(\Omega)$ позволяют считать, что $\sup_\Omega |u_1| \leqslant \varepsilon$, а осреднение u по Соболеву позволяет считать, что $u \in C^\infty(\Omega)$. Для любого $a \in \Omega$ ввиду гармоничности функции u, соотношения $4B_a \cap \partial\Omega \neq \varnothing$ и формулы Ньютона–Лейбница выводим, что

$$\begin{aligned}\sup_{B_a} |u| &\leqslant \frac{c_1(n)}{\operatorname{mes} 2B_a} \int_{2B_a} |u|\, dx \leqslant c_1\varepsilon + \frac{c_1}{\operatorname{mes} 2B_a} \int_{2B_a} |u_2|\, dx \\ &\leqslant c_1\varepsilon + c_2(\Omega)\biggl(\frac{1}{\sigma(4B_a \cap \partial\Omega)} \int_{4B_a \cap \partial\Omega} |\gamma_0 u_2|\, d\sigma + \varrho^{1-n}(a) \int_{4B_a \cap \Omega} |\nabla u_2|\, dx\biggr) \\ &\leqslant (c_1 + c_2)\varepsilon + c_2 \varrho^{1-n}(a) \int_{4B_a \cap \Omega} |\nabla u_2|\, dx.\end{aligned}$$

Возьмем $k \geqslant k_0$. Применяя к семейству $((1/4)B_a)_{a \in \partial\Omega_k}$ известную $4r$-лемму (она доказывается почти так же, как $5r$-лемма [43, теорема 1.3.1]), построим множество $A \subset \partial\Omega_k$ такое, что

$$\begin{gathered}\text{шары } (1/4)B_a \text{ с } a \in A \text{ попарно не пересекаются,}\\ \partial\Omega_k \subset \bigcup_{a \in \partial\Omega_k} (1/4)B_a \subset \bigcup_{a \in A} B_a.\end{gathered}$$

По формуле Пуассона (2) и теореме Фубини

$$\begin{aligned}|u(X)| &= \biggl|\int_{\partial\Omega_k} u\, d\omega(X, \cdot, \Omega_k)\biggr| \leqslant \sum_{a \in A} \Bigl[\sup_{B_a} |u|\Bigr] \omega(X, B_a \cap \partial\Omega_k, \Omega_k) \\ &\leqslant (c_1 + c_2)\varepsilon \sum_{a \in A} \omega(X, B_a \cap \partial\Omega_k, \Omega_k) + \alpha_0 c_2 \int_\Omega |\nabla u_2|\, dx \sum_{a \in A:\ x \in 4B_a} \varrho^{-s}(a).\end{aligned}$$

При $x \in B_a$ имеем $(2/3)\varrho(a) < \varrho(x) < (4/3)\varrho(a)$ и

$$(1/4)B_a \subset B(x, (5/12)\varrho(a)) \subset B(x, (5/8)\varrho(x)).$$

Отсюда $x \in B_a$ для не более чем $c_3(n)$ точек $a \in A$, так что

$$\sum_{a\in A} \omega(X, B_a \cap \partial\Omega_k, \Omega_k) \leqslant c_3\omega(X, \partial\Omega_k, \Omega_k) = c_3.$$

Если $x \in 4B_a \cap \Omega$ и $y \in (1/4)B_a$, то $\varrho(x) < (7/3)\varrho(a)$, $|x-y| < (17/12)\varrho(a)$,

$$\varrho^{-s}(a) \leqslant c(n)\varrho^{-n-s}(a) \int_{(1/4)B_a} dy \leqslant c_4(n,s) \int_{(1/4)B_a} \{\varrho(x) + |x-y|\}^{-n-s}\, dy,$$

$$(\forall x \in \Omega) \qquad \sum_{a\in A\colon x\in 4B_a} \varrho^{-s}(a) \leqslant c_4 \int_{\mathbb{R}^n} \{\varrho(x) + |x-y|\}^{-n-s}\, dy = c_5(n,s)\varrho^{-s}(x),$$

$$\int_\Omega |\nabla u_2|\, dx \sum_{a\in A\colon x\in 4B_a} \varrho^{-s}(a) \leqslant c_5 \int_{\varrho(x)<(7/3)\sup_{\partial\Omega_k}\varrho} \varrho^{-s}|\nabla u_2|\, dx.$$

Ввиду $u_2 \in W_s(\Omega)$ переход к пределу при $k \to \infty$ дает, что $|u(X)| \leqslant (c_1+c_2)c_3\varepsilon$. Произвольность выбора $\varepsilon > 0$ и $X \in \Omega$ показывает, что $u = 0$. Мы доказали (3) для класса $C(\overline{\Omega}) + W_s(\Omega)$.

Из формулы Ньютона–Лейбница следует, что $W^{2,1}(\Omega) \subset \bigcap_{0<s<1} W_s(\Omega)$. Это доказывает единственность (3) для класса $C(\overline{\Omega}) + W^{2,1}(\Omega)$. $\square$

2. Оценка osq-числа границы области

Дадим вторую часть основных определений статьи.

Определение 2. *При $M \in \mathbb{N}_0$ пусть $\mathbb{P}^n_M$ — пространство всех многочленов в $\mathbb{R}^n$ полной степени не выше M. При $F \in \mathbb{P}^n_M$, $a \in \mathbb{R}^n$ и $\beta > 0$ положим*

$$E(F)_{a,\beta} = \left(\sum_\gamma A_\gamma^2 \beta^{2|\gamma|}\right)^{1/2} \quad \textit{для} \quad F(x) = \sum_\gamma A_\gamma \{x-a\}^\gamma \quad (A_\gamma \in \mathbb{R}),$$
$$E(F) = E(F)_{0,1}.$$

Для $M \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 1$ и открытого шара или куба $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ обозначим через $Q_{M,N}(B)$ множество всех функций $f \in C^\infty(B)$ таких, что $\sup_B |\nabla f| \leqslant N$ и для некоторого $F \in \mathbb{P}^n_M \setminus \{0\}$

$$F(\xi^\uparrow) = 0 \quad (\forall \xi \in B),$$
$$\inf_{\xi\in B} |D_n F(\xi^\uparrow)| \geqslant E(F)_{\mathfrak{c}_B^\uparrow, r_B}/(Nr_B),$$

где $\xi^\uparrow = (\xi, f(\xi))$, а r_B — радиус шара или ребро куба B.

Через $R_{M,N}(B)$ обозначим множество всех функций $f \in C(\overline{B})$ таких, что для некоторого $F \in \mathbb{P}^n_M \setminus \{0\}$

$$r_B^{1-n} \int_B |F(\xi^\uparrow)|\, d\xi + r_B^2 E(D_{nn}F)_{\mathfrak{c}_B^\uparrow, r_B} \leqslant E(F)_{\mathfrak{c}_B^\uparrow, r_B}/N.$$

Для функции $g \in L^r(B)$ положим

$$\operatorname{osc}_r^M g(B) = (\operatorname{mes} B)^{-1/r} \inf_{f\in\mathbb{P}^{n-1}_M} \|f-g\|_{L^r(B)}, \tag{4}$$

$$\operatorname{osq}_r^{M,N} g(B) = (\operatorname{mes} B)^{-1/r} \inf_{f\in Q_{M,N}(B)} \|f-g\|_{L^r(B)}. \tag{5}$$

Прокомментируем данные определения.

Конечномерность линеала $\mathbb{P}^n_M$ и аффинная замена переменных показывают, что величина $E(F)_{a,\beta}$ сравнима с L^r-средними $(\operatorname{mes} B(a,\beta))^{-1/r}\|F\|_{L^r(B(a,\beta))}$ и с $\sup_{B(a,\beta)}|F|$. Для эквивалентных ℓ^1-норм этот факт содержится в [29, (1.14)]. Далее будем применять его без явного упоминания.

Множество $Q_{M,N}(B)$ содержит все постоянные ввиду $N \geqslant 1$.

Функции из $Q_{M,N}(B)$ будем называть квазимногочленами. У этого термина много других значений, особенно линейная комбинация функций вида $x^\alpha e^{\langle a,x\rangle}$.

Условие $f \in R_{M,N}(B)$ (N велико) задает некоторое понятие близости f на множестве B к рациональной функции f_0/f_1 с $f_0 \in \mathbb{P}^{n-1}_M$ и $f_1 \in \mathbb{P}^{n-1}_{M-1} \setminus \{0\}$.

Обозначение для аппроксимационных чисел (4) позаимствовано в [41]. При работе с банаховыми функциональными пространствами обычно достаточно случая $r = 1$. В геометрической теории меры применяются варианты чисел $\operatorname{osc}^1_r g(B)$ для множеств, не являющихся графиками функций. Эти варианты называются β-числами Джонса [7, с. 12].

Определение (5) представляется новым.

Перейдем теперь к оцениванию osq-чисел границы липшицевой области Ω. Пусть $u \in W^{m,p}(\Omega)$ ($m \geqslant 2$) и $\gamma_0 u = 0$. Функцию u можно по интегральному представлению Соболева приблизить многочленом $F \in \mathbb{P}^n_M$ ($M = m-1$) таким образом, что след $\gamma_0 F$ контролируется в терминах производных

$$\nabla^m u = (D^\gamma u)_{|\gamma|=m}.$$

Отсюда можно оценить osq-число, отвечающее границе $\partial\Omega$, если градиент ∇F не вырождается на $\partial\Omega$ так, как он вырождается в следующем примере:

$$m = 3 \quad \& \quad \Omega = (0,1)\times(0,1) \quad \& \quad u(x) = F(x) = x_1 x_2 \quad \text{при} \quad x \approx 0.$$

В дальнейшем будет удобно заменить условие невырожденности ∇F геометрическим условием $\omega \in R_{M,N}(B)$. Эта идея реализуется в следующих лемме и теореме.

Лемма 1. *В кольце многочленов $\mathbb{P}^n = \bigcup_{M=0}^\infty \mathbb{P}^n_M$ рассмотрим идеал*

$$I_\omega = \{F \in \mathbb{P}^n \colon F(\xi, \omega(\xi)) = 0 \ \text{для всех}\ \xi \in B\},$$

отвечающий непрерывной функции $\omega : B \to \mathbb{R}$ на шаре или кубе $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Пусть $I_\omega \neq \{0\}$. Тогда среди ненулевых многочленов в I_ω наименьшей степени по x_n найдется многочлен, делящий в $\mathbb{P}^n$ любой многочлен из I_ω.

Доказательство. Приведем ряд определений, связанных с леммой Гаусса.

Пусть A — целостное кольцо. Это значит, что $A \neq \{0\}$, A коммутативно ($ab = ba$ при $a, b \in A$) и не имеет делителей нуля (из $ab = 0$ следует, что $a = 0$ или $b = 0$). Элемент $a \in A$ называется единицей, если $ab = 1$ для некоторого $b \in A$. Элемент $a \neq 0$ неприводим, если он не является единицей и из $a = bc$ следует, что b или c — единица. Кольцо A называется факториальным, если любое $a \neq 0$ представляется произведением

$$a = \varepsilon \prod_{i=1}^q a_i \quad (q \in \mathbb{N}_0)$$

с единицей ε и неприводимыми a_i, причем набор $(a_1, \dots, a_q)$ единствен с точностью до перестановок его элементов и их умножения на единицы. Множество

K всех дробей a/b ($a \in A$ и $b \in A \setminus \{0\}$) с отождествлением

$$a_1/b_1 = a_2/b_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 b_2 = a_2 b_1$$

и обычными арифметическими операциями оказывается полем и называется полем частных кольца A [18, § II.3].

Пусть A — факториальное кольцо с полем частных K, а многочлен $f = f(X)$ с коэффициентами из K (пишем $f \in K[X]$) ненулевой. Приводя коэффициенты f к общему знаменателю, представим f в виде $f = kf_1$ с ненулевыми $k \in K$ и $f_1 \in A[X]$. Вынося из коэффициентов многочлена f_1 общие неприводимые множители, можем считать, что коэффициенты f_1 взаимно просты (т.е. если ненулевой $d \in A$ делит все коэффициенты f_1, то d — единица). В этом случае k называется содержанием многочлена f и обозначается $\operatorname{cont}(f)$. Оно определено с точностью до умножения на единицы из A. Более формальное определение $\operatorname{cont}(f)$ дано в [18, § V.6]. Лемма Гаусса [18, § V.6] гласит, что

$$\operatorname{cont}(fg) = \operatorname{cont}(f)\operatorname{cont}(g) \text{ для любых ненулевых } f, g \in K[X].$$

Кольцо $A = \mathbb{P}^{n-1}$ всех многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$ факториально [18, § V.6], а кольцо $\mathbb{P}^n$ совпадает с $A[x_n]$ [18, § V.3]. Пусть многочлен

$$F = \operatorname{cont}(F)F_1 \in I_\omega \setminus \{0\} \subset A[x_n]$$

имеет наименьшую возможную степень (по x_n). Содержание $\operatorname{cont}(F) \in \mathbb{P}^{n-1}$ отлично от нуля на плотном в B множестве, так как обратное противоречило бы аналитичности многочленов и свойству $\operatorname{cont}(F) \neq 0$. Отсюда $F_1 \in I_\omega \setminus \{0\}$, причем F_1 тоже имеет наименьшую возможную степень.

Возьмем любой $G \in I_\omega$. Разделим G на F_1 по алгоритму Евклида [18, § V.4], считая G и F_1 элементами в $K[x_n]$. Получаем

$$G = F_1 \underbrace{\operatorname{cont}(Q)Q_1}_{Q} + \underbrace{\operatorname{cont}(R)R_1}_{R}$$

для некоторых многочленов $Q, R \in K[x_n]$ с $\deg R < \deg F_1$. Здесь при $Q = 0$ считается, что $\operatorname{cont}(Q) = 1$ и $Q_1 = 0$ (аналогично для R). Числители и знаменатели дробей $\operatorname{cont}(Q)$ и $\operatorname{cont}(R)$ отличны от нуля на плотном в B множестве, поскольку это же самое верно для произведения этих четырех многочленов. Поэтому $R_1 \in I_\omega$ ввиду $G, F_1 \in I_\omega$. Минимальность степени F_1 дает, что $R_1 = 0$ и $G = F_1 Q$. Пусть $Q \neq 0$. По лемме Гаусса

$$\operatorname{cont}(G) = \operatorname{cont}(F_1)\operatorname{cont}(Q) = \operatorname{cont}(Q).$$

Однако $G \in A[x_n]$, откуда $\operatorname{cont}(Q) \in A$ и поэтому $Q \in A[x_n]$. Доказали, что G делится на F_1 в кольце $\mathbb{P}^n = A[x_n]$. □

Пусть $B = (-1/2, 1/2)^{n-1}$, а функция $\omega : 3B \to \mathbb{R}$ θ-липшицева (т.е. для любых ξ и η имеем $|\omega(\xi) - \omega(\eta)| \leqslant \theta|\xi - \eta|$), причем $\omega(0) = 0$. Обозначим

$$\begin{cases} \Theta = 6 + 6\theta\sqrt{n}, \\ X_\omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x' \in 3B \ \& \ \omega(x') < x_n < \Theta + 1\}, \\ Y = B \times (\Theta - 1/2, \Theta + 1/2). \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть $M = m - 1 \in \mathbb{N}$ и $M^\star \in \mathbb{N}$. Тогда найдется постоянная*

$$N = N(n, \theta, m, M^\star) \geqslant 1,$$

для которой верно следующее утверждение: если $\omega \in R_{M^\star,N}(3B)$, *функция* $u \in W^{m,1}(X_\omega)$ *положительна на* X_ω *и гармонична на* $2Y$, *а след* $\gamma_0 u$ *равен нулю на части* $\{\omega(x') = x_n\}$ *границы* ∂X_ω, *то*

$$\operatorname{osq}_1^{M,N} \omega(2B) u(\mathfrak{c}_Y) \leqslant N \int_{X_\omega} |\nabla^m u| \, dx.$$

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ существуют θ-липшицева функция $\omega_N : 3B \to \mathbb{R}$ с $\omega_N(0) = 0$ и $\omega_N \in R_{M^\star,N}(3B)$ (с соответствующим многочленом $F_N^\star \in \mathbb{P}^n_{M^\star}$) и функция $u_N \in W^{m,1}(X_{\omega_N})$ такие, что u_N положительна на X_{ω_N} и гармонична на $2Y$, $\gamma_0 u_N = 0$ на части $\{\omega_N(x') = x_n\}$ границы ∂X_{ω_N} и

$$\operatorname{osq}_1^{M,N} \omega_N(2B) u_N(\mathfrak{c}_Y) > N \int_{X_{\omega_N}} |\nabla^m u_N| \, dx. \tag{6}$$

Без умаления общности считаем, что $E(F_N^\star) = 1$ и $u_N(\mathfrak{c}_Y) = 1$.

Ввиду неравенства Гарнака функции u_N на кубе Y отделены от нуля и от бесконечности не зависящими от N постоянными. Канторовский диагональный процесс позволяет найти последовательность $N_1 < N_2 < \cdots$, θ-липшицеву функцию ω на кубе $3B$ с $\omega(0) = 0$, многочлен $F^\star \in \mathbb{P}^n_{M^\star}$ и положительную гармоническую функцию u на кубе Y такие, что при $k \to \infty$

$$\begin{aligned} \|\omega - \omega_{N_k}\|_{L^\infty(3B)} &\to 0, \\ E(F^\star - F^\star_{N_k}) &\to 0, \\ \|u - u_{N_k}\|_{L^\infty(Y)} &\to 0. \end{aligned}$$

Из включений $\omega_N \in R_{M^\star,N}(3B)$ следует, что

$$\int_{3B} |F^\star(\xi, \omega(\xi))| \, d\xi = 0 \quad \& \quad D_{nn} F^\star = 0.$$

Значит, многочлен $F^\star \neq 0$ принадлежит идеалу I_ω (над $3B$) из леммы 1 и имеет степень $\leqslant 1$ по x_n. Ясно, что наименьшая возможная степень для элементов в $I_\omega \setminus \{0\}$ равна 1. По лемме 1 существует многочлен $F_\star \in I_\omega \setminus \{0\}$ вида

$$F_\star(x) = f_0(x') + f_1(x') x_n,$$

делящий в $\mathbb{P}^n$ любой многочлен из I_ω.

Легко видеть, что множество X_{ω_N} является звездным относительно куба Y. Интегральное представление Соболева [5] для функции u_N и вписанного в Y шара доставляет многочлен $F_N \in \mathbb{P}^n_M$ такой, что

$$|u_N(x) - F_N(x)| \leqslant c(n, \theta, m) \int_{V_x} |x - y|^{m-n} |\nabla^m u_N(y)| \, dy$$

для почти всех $x \in X_{\omega_N}$, где V_x — это выпуклая оболочка множества $\{x\} \cup Y$. Ввиду теоремы Фубини и плотности $C^\infty(\overline{X_{\omega_N}})$ в $W^{m,1}(X_{\omega_N})$ имеем

$$\int_{X_{\omega_N}} |u_N - F_N| \, dx \leqslant c_1(n, \theta, m) \int_{X_{\omega_N}} |\nabla^m u_N| \, dx, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \int_{3B} |F_N(\xi, \omega_N(\xi))| \, d\xi &= \int_{3B} |\gamma_0 u_N - F_N|_{(\xi, \omega_N(\xi))} \, d\xi \\ &\leqslant c(n, \theta, m) \int_{X_{\omega_N}} \rho_N^{m-1} |\nabla^m u_N| \, dx \end{aligned}$$

$$\leqslant c_2(n,\theta,m)\int_{X_{\omega_N}}|\nabla^m u_N|\,dx, \tag{8}$$

где $\rho_N(x)=x_n-\omega_N(x')$.

Множества $Q_{M,N}(2B)$ содержат константы, так что ввиду (6)

$$\int_{X_{\omega_N}}|\nabla^m u_N|\,dx \xrightarrow{N\to\infty} 0,$$

$$\|u_{N_k}-F_{N_k}\|_{L^1(K)} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \text{ для любого } K\Subset X_\omega,$$

$$\|u-F_{N_k}\|_{L^1(Y)}\leqslant\|u-u_{N_k}\|_{L^1(Y)}+\|u_{N_k}-F_{N_k}\|_{L^1(Y)} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

$$\int_{3B}|F_{N_k}(\xi,\omega_{N_k}(\xi))|\,d\xi \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Поэтому в пространстве $\mathbb{P}^n_M$ существует предел $F=\lim_{k\to\infty}F_{N_k}$ такой, что $F\in I_\omega$, $F\geqslant 0$ в X_ω, $F=u>0$ на кубе Y и $\Delta F=0$. Отсюда $F>0$ в X_ω по сильному принципу максимума [15, теорема 3.5].

Допустим, что $D_nF(\xi,\omega(\xi))=0$ для некоторого $\xi\in\overline{2B}$. Если $f_1(\xi)=0$, то $f_0(\xi)=-f_1(\xi)\omega(\xi)=0$ ввиду $F_\star\in I_\omega$, так что $F_\star(x)=0$ при $x'=\xi$. Отсюда и $F(x)=0$ при $x'=\xi$, поскольку $F\in I_\omega$ делится на $F_\star$, но это противоречит положительности F в X_ω. Следовательно, $f_1(\xi)\neq 0$ и

$$\omega=-f_0/f_1\in C^\infty \text{ в окрестности точки } \xi.$$

Это противоречит предположению $D_nF(\xi,\omega(\xi))=0$ по лемме Хопфа–Олейник о граничной точке [15, лемма 3.4].

Пусть теперь $\nu=\inf_{\xi\in 2B}D_nF(\xi,\omega(\xi))>0$. Легко проверяется, что

$$(\exists k_0)\ (\exists\tau>0)\ (\forall k\geqslant k_0)\quad \begin{cases}\inf_{(\xi,t)\in 2B\times[-\tau,\tau]}D_nF_{N_k}(\xi,\omega_{N_k}(\xi)+t)\geqslant\nu/2,\\ \sup_{\xi\in 2B}|F_{N_k}(\xi,\omega_{N_k}(\xi))|\leqslant\nu\tau/2.\end{cases}$$

Отсюда при $k\geqslant k_0$ найдется $f_{N_k}\in C^\infty(2B)$ такое, что

$$F_{N_k}(\xi,f_{N_k}(\xi))=0,$$

$$\|f_{N_k}-\omega_{N_k}\|_{L^\infty(2B)}\leqslant\tau,$$

$$\int_{2B}|f_{N_k}-\omega_{N_k}|\,d\xi\leqslant\frac{2}{\nu}\int_{2B}|F_{N_k}(\xi,\omega_{N_k}(\xi))|\,d\xi\leqslant\frac{2c_2}{\nu}\int_{X_{\omega_{N_k}}}|\nabla^m u_{N_k}|\,dx.$$

Для достаточно больших $k\geqslant k_0$ имеем $f_{N_k}\in Q_{M,N_k}(2B)$ и приходим к противоречию со свойством (6).

Полученные противоречия доказывают теорему 2 от противного. □

Отметим, что нетрудно доказать оценку

$$\operatorname{osc}^1_1\omega(3B)\int_Y|u|\,dy\leqslant c(n,\theta)\int_{X_\omega}|\nabla^2u|\,dx$$

для любой функции $u\in W^{2,1}(X_\omega)$ со следом $\gamma_0u=0$ на части $\{\omega(x')=x_n\}$ границы ∂X_ω. Эта оценка позволяет упростить многие рассуждения статьи для случая $m=2$.

3. Классы $\mathcal{W}^{m,p}_{\mathrm{osc}}(\mathbb{R}^{n-1})$ и $\mathcal{W}^{m,p}_{\mathrm{osq},M,N}(\mathbb{R}^{n-1})$

Дадим третью часть основных определений статьи.

Определение 3. *Введем семейства открытых двоичных кубов в* $\mathbb{R}^{n-1}$*:*

$$\mathcal{D} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}_k,$$
$$\mathcal{D}_k = \bigl\{I\colon I = (0, 2^{-k})^{n-1} + 2^{-k}K \ \text{для некоторого}\ K \in \mathbb{Z}^{n-1}\bigr\}.$$

Пусть $l_I = 2^{-k}$ *(ребро куба) при* $I \in \mathcal{D}_k$.

Для $I \in \mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_0$ *определим куб* $I' \in \mathcal{D}$ *условиями* $I \subset I'$ *и* $l_{I'} = 2l_I$.

Рассмотрим липшицеву функцию $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ *с надграфиком*

$$\Omega_\omega = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_n > \omega(x')\}.$$

Положим $\alpha_I = U_\omega(\mathfrak{c}_I, \omega(\mathfrak{c}_I) + l_I)$ $(I \in \mathcal{D})$ *для функции* $U_\omega \in C^\infty(\Omega_\omega) \cap C(\overline{\Omega_\omega})$ *со свойствами*

$$U_\omega > 0 \quad \& \quad \Delta U_\omega = 0 \quad \& \quad U_\omega\big|_{\partial\Omega_\omega} = 0.$$

Пусть $m \geqslant 2$ *целое и* $1 < p < \infty$. *Скажем, что* $\omega \in \mathcal{W}^{m,p}_{\mathrm{osc}}(\mathbb{R}^{n-1})$, *если*

$$(\exists C > 0)\ (\forall \beta_I \in \mathbb{R})$$
$$\sum_{I\in\mathcal{D}} l_I^{n-mp-p} \operatorname{osc}_1^m \omega(2I)^p \alpha_I^p |\beta_I|^p \leqslant C \sum_{I\in\mathcal{D}} l_I^{n-mp} \alpha_I^p |\beta_I - \beta_{I'}|^p, \tag{9}$$

где числа $\beta_{I'}$ *считаются равными нулю при* $I \in \mathcal{D}_0$.

Класс $\mathcal{W}^{m,p}$ *состоит из всех ограниченных липшицевых областей* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *таких, что в определении липшицевости (§ 1) для любого* $a \in \partial\Omega$ *функцию* ω *можно взять принадлежащей к* $\mathcal{W}^{m,p}_{\mathrm{osc}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

При $M \in \mathbb{N}$ *и* $N \geqslant 1$ *скажем, что* $\omega \in \mathcal{W}^{m,p}_{\mathrm{osq},M,N}(\mathbb{R}^{n-1})$, *если*

$$(\exists C > 0)\ (\forall \beta_I \in \mathbb{R})$$
$$\sum_{I\in\mathcal{D}} l_I^{n-mp-p} \operatorname{osq}_1^{M,N} \omega(2I)^p \alpha_I^p |\beta_I|^p \leqslant C \sum_{I\in\mathcal{D}} l_I^{n-mp} \alpha_I^p |\beta_I - \beta_{I'}|^p. \tag{10}$$

Функция U_ω с требуемыми свойствами существует и единственна с точностью до положительного множителя. Два доказательства этого факта даны в начале доказательства теоремы 4 из [34].

Функция U_ω в сущности является ядром Мартина для граничной точки на бесконечности и иногда именуется французским словом réduite.

Условия (9) и (10) представляются новыми. Они являются частными случаями общего дискретного весового неравенства (ДВН) вида

$$(\exists C > 0)\ (\forall \beta_I \in \mathbb{R}) \quad \sum_{I\in\mathcal{D}} a_I |\beta_I|^p \leqslant C \sum_{I\in\mathcal{D}} b_I |\beta_I - \beta_{I'}|^p,$$

критерий справедливости которого дан в теореме 16 из [28].

По следствию 2.11 из [31] условие $(9)\big|_{\alpha_I = l_I}$ равносильно распрямляемости в области (см. введение) для пространства Лизоркина–Трибеля $F^m_{p,q}$, в частности для пространства Соболева $W^{m,p} = F^m_{p,2}$ (подробнее в § 5).

Получим теперь ряд свойств квазимногочленов и сравним с их помощью osc-числа и osq-числа и условия (9) и (10).

Лемма 2. *Для любых* $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n-1} \setminus \{0\}$ *и* $f \in Q_{M,N}(B)$ *верна оценка*

$$\|D^\alpha f\|_{L^\infty(B)} \leqslant c(n, M, N, \alpha) r_B^{1-|\alpha|}.$$

Доказательство. Если $F \in C^\infty$ в окрестности точки $(\xi, f(\xi))$, то

$$D_\xi^\alpha F(\xi, f(\xi)) = D^{(\alpha,0)} F(\xi, f(\xi)) + \sum_{q=1}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\beta^1,\dots,\beta^q \in \mathbb{N}_0^{n-1}\setminus\{0\}:\\ \beta=\beta^1+\dots+\beta^q \leqslant \alpha}} C_{\alpha,\{\beta^i\}} D^{(\alpha-\beta,q)} F(\xi, f(\xi)) D^{\beta^1} f(\xi) \cdots D^{\beta^q} f(\xi) \tag{11}$$

с коэффициентами $C_{\alpha,\{\beta^i\}} \in \mathbb{N}_0$. Это проверяется индукцией по $|\alpha|$.

Аффинная замена переменных и вычитание $f(\mathfrak{c}_B)$ из f дают, что лемму 2 достаточно проверить при $\mathfrak{c}_B = 0$, $r_B = 1$ и $f(0) = 0$.

Пусть многочлен F отвечает квазимногочлену f по определению множества $Q_{M,N}(B)$. Деление F на $E(F)$ позволяет считать, что $E(F) = 1$, откуда

$$D_\xi^\alpha F(\xi, f(\xi)) = 0,$$

$$\inf_{\xi \in B} |D_n F(\xi, f(\xi))| \geqslant 1/N, \tag{12}$$

$$\sup_{(\xi,t) \in B \times [-1,1]} |D^\gamma F(\xi, f(\xi) + t)| \leqslant c(n, M, N, \gamma), \quad \gamma \in \mathbb{N}_0^n. \tag{13}$$

Правая часть в (11) содержит слагаемое $D_n F(\xi, f(\xi)) D^\alpha f(\xi)$, а во все остальные члены входят производные $D^{\beta^i} f$ порядков $|\beta^i| < |\alpha|$, так что индукция по $|\alpha|$ доказывает лемму 2. □

Лемма 3. *Пусть* $h(\xi) = F(\xi, g(\xi))$ *для многочлена* $F \in \mathbb{P}_M^n$ *и квазимногочлена* $g \in Q_{M,N}(B)$*, причем* $r_B = 1$*. Тогда*

$$\|D^\alpha h\|_{L^\infty(B)} \leqslant c(n, M, N, \alpha) \|h\|_{L^1(B)}$$

для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n-1}$.

Обсудим эту нетривиальную лемму подробно. Она утверждает справедливость неравенства разных метрик (неравенства Никольского), которое легко выводится из содержащего лишь L^∞-метрику неравенства

$$\|D^\alpha h\|_{L^\infty(B)} \leqslant c(n, M, N, \alpha) \|h\|_{L^\infty(B)}$$

Маркова–Бернштейна. Название происходит от неравенства

$$(\forall f \in \mathbb{P}_M^1) \quad \|f^{(k)}\|_{L^\infty(-1,1)} \leqslant \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(M^2 - j^2)}{(2k-1)!!} \|f\|_{L^\infty(-1,1)} \tag{14}$$

(А.А. Марков при $k = 1$, В.А. Марков при $k \geqslant 2$) и от группы неравенств С.Н. Бернштейна, таких как аналоги оценки (14) для монотонных многочленов, тригонометрических многочленов и целых функций экспоненциального типа (ЦФЭТ), оценка удвоения $\|f\|_{L^\infty(-1,1)} \leqslant C\|f\|_{L^\infty(-1/2,1/2)}$ и неравенство

$$(\forall f \in \mathbb{P}_M^1)\ (\forall x \in (-1,1)) \quad |f'(x)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{1-x^2}} \|f\|_{L^\infty(-1,1)}.$$

Известно много неравенств Маркова–Бернштейна (включая весовые) для алгебраических многочленов, рациональных функций, тригонометрических многочленов и ЦФЭТ. Упомянем также неравенства Маркова–Бернштейна для многочленов в нормированных пространствах [16, 38, 42] и некоторых разновидностей квазимногочленов [2, 4, 8, 9, 10, 11, 24, 37].

Неравенства Маркова–Бернштейна для сужений алгебраических многочленов на алгебраические многообразия (включая многообразия с особенностями) изучаются в работах [1, 3, 13, 14, 27, 35, 36] и указанной в них литературе. Мы выведем лемму 3 из теоремы Фeффермана–Нарасимхана о продолжении.

Доказательство. Допустим, что для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n-1}$

$$\|D^\alpha h\|_{L^\infty(B)} \leqslant c_\alpha \|h\|_{L^\infty(B)} \tag{15}$$

с постоянной $c_\alpha = c(n, M, N, \alpha)$. Разбивая B на малые множества, без труда устанавливаем интерполяционное неравенство

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad \|h\|_{L^\infty(B)} \leqslant \varepsilon \max_{|\alpha|=1} \|D^\alpha h\|_{L^\infty(B)} + c(n, \varepsilon)\|h\|_{L^1(B)}.$$

Взяв $\varepsilon = \big(2\max_{|\alpha|=1} c_\alpha\big)^{-1}$, получаем

$$\|h\|_{L^\infty(B)} \leqslant c(n, M, N)\|h\|_{L^1(B)},$$

что в сочетании с (15) доказывает лемму 3.

Пусть квазимногочлену g по определению множества $Q_{M,N}(B)$ отвечает многочлен $G \in \mathbb{P}^n_M \setminus \{0\}$. Для $\mu > 0$ положим

$$F_\mu(x) = F(x', \mu x_n) \quad \& \quad G_\mu(x) = G(x', \mu x_n) \quad \& \quad g_\mu = g/\mu.$$

Тогда $F_\mu(\xi, g_\mu(\xi)) = h(\xi)$ и $G_\mu(\xi, g_\mu(\xi)) = 0$, откуда $g_\mu \in Q_{M,N_2}(B)$ с некоторым $N_2 = c(n, M, N, \mu)$. Выбор $\mu = \sqrt{n-1}N$ показывает, что при проверке (15) можно без умаления общности считать, что $|\nabla g| \leqslant 1/\sqrt{n-1}$.

Предположим, что B — куб. Зафиксируем $\xi \in B$. Для любого $0 < \beta \leqslant 1$ найдется открытый куб Ξ_β такой, что $\xi \in \Xi_\beta \subset B$ и $r_{\Xi_\beta} = \beta$. Обозначим

$$\begin{aligned} Q_\beta &= \Xi_\beta \times (g(\mathfrak{c}_{\Xi_\beta}) - \beta/2, g(\mathfrak{c}_{\Xi_\beta}) + \beta/2),\\ X_\beta &= \{x \in (1/2)Q_\beta \colon G(x) = 0\},\\ Y_\beta &= \{x \in Q_\beta \colon G(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Свойство $|\nabla g| \leqslant 1/\sqrt{n-1}$ показывает, что

$$\{(\eta, g(\eta)) \colon \eta \in (1/2)\Xi_\beta\} \subset X_\beta \quad \& \quad \{(\eta, g(\eta)) \colon \eta \in \Xi_\beta\} \subset Y_\beta.$$

Из G-аналога неравенств (12) и (13) следует, что при $\beta \leqslant \delta = \delta(n, M, N)$ производная $D_n G$ сохраняет знак на кубе Q_β, откуда

$$\{(\eta, g(\eta)) \colon \eta \in (1/2)\Xi_\beta\} = X_\beta \quad \& \quad \{(\eta, g(\eta)) \colon \eta \in \Xi_\beta\} = Y_\beta.$$

Теорема о продолжении Фeффермана–Нарасимхана [13, § 1] вкупе со сдвигом начала координат в точку $\mathfrak{c}_{Q_\beta}$ доставляет такие постоянные

$$\delta^\star = \delta^\star(n, M, N) > 0 \quad \& \quad M^\star = M^\star(n, M, N) \in \mathbb{N},$$

что при $\beta \leqslant \delta^\star$ для некоторых многочленов $F_1 \in \mathbb{P}^n_{M^\star}$ и $F_2 \in \mathbb{P}^n_{M^\star}$ имеем

$$\begin{gathered} 1 \leqslant F_1 \leqslant 2 \quad \text{на} \quad Q_\beta,\\ \sup_{Q_\beta} |F_2| \leqslant c(n, M, N) \sup_{X_\beta} |F|,\\ F = F_1^{-1} F_2 \quad \text{на} \quad Y_\beta. \end{gathered}$$

Положим

$$\beta = \beta(n, M, N) = 1 \wedge \delta \wedge \delta^\star.$$

С учетом неравенства Маркова в $\mathbb{P}^n_{M^\star}$ выводим

$$\begin{gathered}\|D^\gamma F_1\|_{L^\infty(Q_\beta)} \leqslant c(n,M,N,\gamma),\\ \|D^\gamma F_1^{-1}\|_{L^\infty(Q_\beta)} \leqslant c(n,M,N,\gamma),\\ \sup_{X_\beta}|F| = \|h\|_{L^\infty((1/2)\Xi_\beta)} \leqslant \|h\|_{L^\infty(B)},\\ \|D^\gamma F_2\|_{L^\infty(Q_\beta)} \leqslant c(n,M,N,\gamma)\|h\|_{L^\infty(B)},\end{gathered}$$

$$h(\eta) = F(\eta, g(\eta)) = F_1^{-1}(\eta, g(\eta))F_2(\eta, g(\eta)) \quad \text{на} \quad \Xi_\beta. \tag{16}$$

Отметим, что $(\xi, g(\xi)) \in Y_\beta \subset Q_\beta$. Дифференцируя (16) по формуле Лейбница и формуле (11) и оценивая $D^{\beta^i}g$ по лемме 2, получаем неравенство

$$|D^\alpha h(\xi)| \leqslant c(n,M,N,\alpha)\|h\|_{L^\infty(B)}.$$

Ввиду произвольности $\xi \in B$ это доказывает (15), если B — куб.

Пусть $\xi \in B$ для шара B. Существует аффинная изометрия $A : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ такая, что $AB = B$ и точка $A\xi - \mathfrak{c}_B$ лежит на прямой $\eta_1 = \dots = \eta_{n-1}$ в $\mathbb{R}^{n-1}$. При $0 < \beta \leqslant 2/\sqrt{n-1}$ найдется куб Ξ_β с $A\xi \in \Xi_\beta \subset B$ и $r_{\Xi_\beta} = \beta$. Рассуждая, как выше, для многочлена $F_A(x) = F(A^{-1}x', x_n)$ и квазимногочлена

$$g_A \in Q_{M,c(n,M,N)}(B): \quad g_A(\eta) = g(A^{-1}\eta),$$

установим (15) и в этом случае. Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Пусть* $f, g \in Q_{M,N}(B)$ *и* $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n-1}$. *Тогда*

$$\|D^\alpha(f-g)\|_{L^\infty(B)} \leqslant c(n,M,N,\alpha) r_B^{1-|\alpha|-n}\|f-g\|_{L^1(B)}.$$

Доказательство. Как в доказательстве леммы 2, считаем, что $\mathfrak{c}_B = 0$, $r_B = 1$, $f(0) = 0$ и $E(F) = 1$ для отвечающего квазимногочлену f многочлена F.

В силу оценок (12) и (13) для достаточно малого $\tau = \tau(n,M,N) \in (0,1]$

$$\inf_{(\xi,t)\in B\times[-\tau,\tau]} |D_n F(\xi, f(\xi)+t)| \geqslant 1/(2N). \tag{17}$$

Если $\|f-g\|_{L^\infty(B)} \geqslant \tau$, то $\|f-g\|_{L^1(B)} \geqslant c(n,M,N)$ по липшицевости f и g (лемма 2). В этом случае лемма 4 следует из леммы 2 при $\alpha \neq 0$ и оценки

$$\|f-g\|_{L^\infty(B)} \leqslant (\operatorname{mes} B)^{-1}\|f-g\|_{L^1(B)} + c(n,M,N)$$

при $\alpha = 0$. Поэтому далее считаем, что $\|f-g\|_{L^\infty(B)} < \tau$.

Для $h(\xi) = F(\xi, g(\xi))$ в силу леммы 3 и оценки (13)

$$\begin{aligned}\sup_{\xi\in B}|D_\xi^\alpha F(\xi, f(\xi)) - D_\xi^\alpha F(\xi, g(\xi))| &= \|D^\alpha h\|_{L^\infty(B)}\\ &\leqslant c_\alpha\|h\|_{L^1(B)} \leqslant c_\alpha^\star\|f-g\|_{L^1(B)}\end{aligned} \tag{18}$$

с постоянными $c_\alpha = c(n,M,N,\alpha)$ и $c_\alpha^\star = c(n,M,N,\alpha)$. Ввиду (17) имеем

$$\|f-g\|_{L^\infty(B)} \leqslant 2N\|h\|_{L^\infty(B)} \leqslant 2Nc_0^\star\|f-g\|_{L^1(B)},$$

что доказывает лемму 4 при $\alpha = 0$.

Пусть $\alpha \neq 0$, причем лемма 4 уже проверена для всех меньших значений длины мультииндекса α. Распишем разность в (18), дважды применяя (11) и группируя вместе соответствующие слагаемые. В силу (13)

$$\begin{aligned}\sup_{\xi\in B}|D^{(\alpha,0)}F(\xi, f(\xi)) - D^{(\alpha,0)}F(\xi, g(\xi))| &\leqslant c^*(n,M,N,\alpha)\|f-g\|_{L^\infty(B)}\\ &\leqslant c^* 2Nc_0^\star\|f-g\|_{L^1(B)}.\end{aligned}$$

При $\max_i |\beta^i| < |\alpha|$ по (13), лемме 2 и предположению индукции

$$\sup_{\xi\in B} |D^\gamma F(\xi, f(\xi)) D^{\beta^1} f(\xi) \cdots D^{\beta^q} f(\xi) - D^\gamma F(\xi, g(\xi)) D^{\beta^1} g(\xi) \cdots D^{\beta^q} g(\xi)|$$
$$\leqslant c(n, M, N, \{\beta^i\}, \gamma) \|f - g\|_{L^1(B)}.$$

Сопоставляя полученные оценки, имеем

$$\underbrace{\sup |D_n F(\xi, f(\xi)) D^\alpha f(\xi) - D_n F(\xi, g(\xi)) D^\alpha g(\xi)|}_{A} \leqslant c(n, M, N, \alpha) \|f - g\|_{L^1(B)}.$$

Из тех же соображений

$$\|D^\alpha (f - g)\|_{L^\infty(B)} \leqslant N \sup_{\xi\in B} |D_n F(\xi, f(\xi)) \{D^\alpha f(\xi) - D^\alpha g(\xi)\}|$$
$$\leqslant NA + c(n, M, N, \alpha) \|f - g\|_{L^1(B)}.$$

Это доказывает лемму 4 для данного α, а по индукции — и для всех α. $\square$

Нам понадобится также следующее утверждение (лемма 1 в [34]).

Лемма 5. *Пусть в липшицевом цилиндре*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x'|_\infty < 4 \ \&\ \omega(x') < x_n < \omega(x') + 8\},$$

где $|\omega(\xi) - \omega(\eta)| \leqslant \theta|\xi - \eta|$ $(\theta \geqslant 0)$ *и* $\omega(0) = 0$, *заданы положительные гармонические функции* u *и* v *такие, что* $u(\xi, \omega(\xi)) = v(\xi, \omega(\xi)) = 0$ *в смысле непрерывно принимаемых граничных значений. Тогда*

$$\text{(19)} \qquad \textit{(оценка Карлесона)} \qquad \sup_{A_0} u \leqslant c(n, \theta) u(e_n),$$

$$\text{(20)} \qquad \textit{(граничный принцип Гарнака)} \qquad \sup_{A_0} (u/v) \leqslant c(n, \theta) u(e_n)/v(e_n),$$

где $A_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x'|_\infty < 1 \ \&\ \omega(x') < x_n < \omega(x') + 2\}$.

Произведем анонсированное сопоставление osc-чисел и osq-чисел и определений (9) и (10), включая локальный вариант.

Теорема 3. *Пусть даны целое число* $m \geqslant 2$, $1 < p < \infty$, *липшицева функция* $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ *и куб* $K \in \mathcal{D}$. *Обозначим*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : x' \in 12K \ \&\ \omega(x') < x_n < \omega(x') + 12 l_K\},$$
$$\mathcal{E} = \{I \in \mathcal{D} : l_I \leqslant l_K \ \&\ I \subset 3K\}.$$

Для гармонической функции $U : A \to (0, \infty)$ *со следом* $U(\xi, \omega(\xi)) = 0$ *пусть*

$$U_I = U(\mathfrak{c}_I, \omega(\mathfrak{c}_I) + l_I), \quad I \in \mathcal{E}.$$

Тогда из условия

$$(\exists M \in \mathbb{N})\ (\exists N \geqslant 1)\ (\exists C > 0)\ (\forall \beta_I \in \mathbb{R})$$
$$\text{(21)} \qquad \sum_{I\in\mathcal{E}} l_I^{n-mp-p} \operatorname{osq}_1^{M,N} \omega(2I)^p U_I^p |\beta_I|^p \leqslant C \sum_{I\in\mathcal{E}} l_I^{n-mp} U_I^p |\beta_I - \beta_{I^*}|^p$$

(где $\beta_{I^*} = \beta_{I'}$ *при* $l_I \leqslant l_K/2$ *или* $\beta_{I^*} = 0$ *при* $l_I = l_K$*) следует включение*

$$\varphi\omega \in \mathcal{W}^{m,p}_{\mathrm{osc}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

для любого $\varphi \in C_0^\infty(2K)$, *т.е.* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ *с носителем* $\operatorname{supp}\varphi \Subset 2K$.

Имеет место равенство

$$\mathcal{W}^{m,p}_{\mathrm{osc}}(\mathbb{R}^{n-1}) = \bigcup_{M\in\mathbb{N}\,\&\,N\geqslant 1} \mathcal{W}^{m,p}_{\mathrm{osq},M,N}(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{22}$$

Доказательство. Граничный принцип Гарнака (20) и замена переменной позволяют сравнить функции U и U_ω на множестве

$$A_0 = \{x\in\mathbb{R}^n\colon x'\in 3K\ \&\ \omega(x') < x_n < \omega(x') + 3l_K\},$$

поэтому из (21) вытекает свойство

$$\begin{gathered}(\exists M\in\mathbb{N})\ (\exists N>0)\ (\exists C>0)\ (\forall \beta_I\in\mathbb{R})\\ \sum_{I\in\mathcal{E}} l_I^{n-mp-p}\operatorname{osq}_1^{M,N}\omega(2I)^p\alpha_I^p|\beta_I|^p \leqslant C\sum_{I\in\mathcal{E}} l_I^{n-mp}\alpha_I^p|\beta_I-\beta_{I^*}|^p.\end{gathered} \tag{23}$$

Существуют квазимногочлены $f_I\in Q_{M,N}(2I)$ такие, что

$$\operatorname{osq}_1^{M,N}\omega(2I) = (\operatorname{mes}2I)^{-1}\|\omega - f_I\|_{L^1(2I)}.$$

Зафиксируем $I\in\mathcal{E}$. Пусть $f\in\mathbb{P}_m^{n-1}$ — тейлоровский многочлен функции φf_I в точке $\mathfrak{c}_I$. По неравенству треугольника и формулам Тейлора и Лейбница

$$\begin{aligned}\operatorname{osc}_1^m\varphi\omega(2I) &\leqslant (\operatorname{mes}2I)^{-1}\bigl\{\|\varphi\omega-\varphi f_I\|_{L^1(2I)} + \|\varphi f_I - f\|_{L^1(2I)}\bigr\}\\ &\leqslant \sup|\varphi|\operatorname{osq}_1^{M,N}\omega(2I) + c(n,m)l_I^{m+1}\max_{|\alpha|=m+1}\|D^\alpha(\varphi f_I)\|_{L^\infty(2I)}\\ &\leqslant \sup|\varphi|\operatorname{osq}_1^{M,N}\omega(2I) + c(n,m,\varphi)l_I^{m+1}\max_{|\alpha|\leqslant m+1}\|D^\alpha f_I\|_{L^\infty(2I)}.\end{aligned}$$

Пусть $I\subset J_1\in\mathcal{E}$ и $l_{J_1}=l_K$. Имеем

$$\begin{gathered}\|D^\alpha f_I\|_{L^\infty(2I)} \leqslant \|D^\alpha f_{J_1}\|_{L^\infty(2I)} + \sum_{J\in\mathcal{E}\colon I\subset J\subsetneq J_1}\|D^\alpha(f_J - f_{J'})\|_{L^\infty(2I)},\\ \alpha\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \|D^\alpha f_{J_1}\|_{L^\infty(2J_1)} \leqslant c(n,M,N,\alpha)l_{J_1}^{1-|\alpha|} \quad (\text{лемма 2}),\\ \|f_{J_1}\|_{L^\infty(2J_1)} \leqslant c(n,N,\|\omega\|_{L^\infty(4K)}).\end{gathered}$$

Возьмем отвечающий квазимногочлену $f_{J'}$ многочлен $F\in\mathbb{P}^n_M$. Из $|\nabla f_{J'}|\leqslant N$ следует, что $|c^\uparrow_J - c^\uparrow_{J'}|\leqslant c(n,N)l_J$ для $\xi^\uparrow = (\xi, f_{J'}(\xi))$. Отсюда

$$\begin{aligned}E(F)_{\mathfrak{c}^\uparrow_J,r_{2J}} &\leqslant c_1(n,M,N)E(F)_{\mathfrak{c}^\uparrow_{J'},r_{2J'}} \leqslant c_1Nr_{2J'}\inf_{\xi\in 2J'}|D_nF(\xi^\uparrow)|\\ &\leqslant N_2r_{2J}\inf_{\xi\in 2J}|D_nF(\xi^\uparrow)|, \qquad N_2 = 2c_1N > N.\end{aligned}$$

Поэтому $f_J, f_{J'}\in Q_{M,N_2}(2J)$. По лемме 4 и неравенству треугольника

$$\begin{aligned}\|D^\alpha(f_J - f_{J'})\|_{L^\infty(2J)} &\leqslant c_2(n,M,N,\alpha)r_{2J}^{1-|\alpha|-n}\|f_J - f_{J'}\|_{L^1(2J)}\\ &\leqslant c_2r_{2J}^{1-|\alpha|-n}\bigl\{\|\omega - f_J\|_{L^1(2J)} + \|\omega - f_{J'}\|_{L^1(2J')}\bigr\}\\ &\leqslant c(n,M,N,\alpha)\bigl\{l_J^{-m-1}\operatorname{osq}_1^{M,N}\omega(2J) + l_{J'}^{-m-1}\operatorname{osq}_1^{M,N}\omega(2J')\bigr\}.\end{aligned}$$

В итоге для некоторой постоянной $c_3(n,m,l_K,M,N,\varphi,\|\omega\|_{L^\infty(4K)})$

$$\operatorname{osc}_1^m\varphi\omega(2I) \leqslant c_3l_I^{m+1}\biggl\{1 + \sum_{J\in\mathcal{E}\colon I\subset J} l_J^{-m-1}\operatorname{osq}_1^{M,N}\omega(2J)\biggr\}. \tag{24}$$

Положим $\varepsilon = 1/2$. По оценке (24) и неравенству Гёльдера

$$\operatorname{osc}_1^m \varphi\omega(2I)^p \leqslant c_3^p c_4(p) l_I^{mp+p}\Big\{1 + \sum_{J\in\mathcal{E}\colon I\subset J} l_I^{-\varepsilon} l_J^{\varepsilon-mp-p} \operatorname{osq}_1^{M,N} \omega(2J)^p\Big\}.$$

Отсюда для любых чисел $\beta_I \in \mathbb{R}$ $(I\in\mathcal{E})$

$$\begin{aligned}
&\sum_{I\in\mathcal{E}} l_I^{n-mp-p} \operatorname{osc}_1^m \varphi\omega(2I)^p \alpha_I^p |\beta_I|^p \leqslant 2^{p-1} c_3^p c_4 \{A_1 + A_2 + A_3\},\\
&A_1 = \sum_{I\in\mathcal{E}} l_I^n \alpha_I^p |\beta_I|^p,\\
&A_2 = \sum_{I,J\in\mathcal{E}\colon I\subset J} l_I^{n-\varepsilon} l_J^{\varepsilon-mp-p} \operatorname{osq}_1^{M,N} \omega(2J)^p \alpha_I^p |\beta_J|^p,\\
&A_3 = \sum_{I,J\in\mathcal{E}\colon I\subset J} l_I^{n-\varepsilon} l_J^{\varepsilon-mp-p} \operatorname{osq}_1^{M,N} \omega(2J)^p \alpha_I^p |\beta_I - \beta_J|^p.
\end{aligned}$$

По неравенствам Гёльдера и Гарнака и оценке Карлесона (19) имеем

$$\begin{gathered}
|\beta_I|^p \leqslant \Big\{\sum_{J\supset I} |\beta_J - \beta_{J^*}|\Big\}^p \leqslant c_5(p) l_I^{-\varepsilon} \sum_{J\supset I} l_J^{\varepsilon} |\beta_J - \beta_{J^*}|^p,\\
I\subset J \quad\Rightarrow\quad \alpha_I \leqslant c_6(n,\theta)\alpha_J,\\
\sum_{I\in\mathcal{E}\colon I\subset J} l_I^{n-\varepsilon} = c_7 l_J^{n-\varepsilon} \quad \text{для} \quad c_7 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1},\\
A_1 \leqslant c_5 c_6^p c_7 \sum_{J\in\mathcal{E}} l_J^n \alpha_J^p |\beta_J - \beta_{J^*}|^p \leqslant c_5 c_6^p c_7 \sum_{J\in\mathcal{E}} l_J^{n-mp} \alpha_J^p |\beta_J - \beta_{J^*}|^p.
\end{gathered}$$

С учетом (23) получаем

$$A_2 \leqslant c_6^p c_7 \sum_{J\in\mathcal{E}} l_J^{n-mp-p} \operatorname{osq}_1^{M,N} \omega(2J)^p \alpha_J^p |\beta_J|^p \leqslant c_6^p c_7 C \sum_{I\in\mathcal{E}} l_I^{n-mp} \alpha_I^p |\beta_I - \beta_{I^*}|^p.$$

Из (23) тривиально следует, что $\operatorname{osq}_1^{M,N} \omega(2J)^p \leqslant C l_J^p$, поэтому

$$\begin{aligned}
A_3 &\leqslant c_5 C \sum_{I,I_1,J\in\mathcal{E}\colon I\subset I_1\subsetneq J} l_I^{n-\varepsilon} l_J^{\varepsilon-mp} \alpha_I^p l_{I_1}^{-\varepsilon} l_J^{\varepsilon} |\beta_{I_1} - \beta_{I_1^*}|^p\\
&\leqslant c_5 c_6^p c_7 C \sum_{I_1,J\in\mathcal{E}\colon I_1\subsetneq J} l_{I_1}^{n-2\varepsilon} l_J^{2\varepsilon-mp} \alpha_{I_1}^p |\beta_{I_1} - \beta_{I_1^*}|^p\\
&\leqslant c_5 c_6^p c_7 C \sum_{I_1\in\mathcal{E}} l_{I_1}^{n-mp} \alpha_{I_1}^p |\beta_{I_1} - \beta_{I_1^*}|^p \quad (\text{ввиду } 2\varepsilon - mp < -1),
\end{aligned}$$

$$(\exists b>0)\ (\forall \beta_I) \quad \sum_{I\in\mathcal{E}} l_I^{n-mp-p} \operatorname{osc}_1^m \varphi\omega(2I)^p \alpha_I^p |\beta_I|^p \leqslant b \sum_{I\in\mathcal{E}} l_I^{n-mp} \alpha_I^p |\beta_I - \beta_{I^*}|^p.$$

Введем конечное множество $\mathcal{F} = \{I\in\mathcal{D}\colon l_I \geqslant l_K \ \&\ 2I\cap 2K \neq \varnothing\}$. Очевидно, что $\varphi\omega = 0$ на $2I$ при $I \in \mathcal{D}\setminus(\mathcal{E}\cup\mathcal{F})$. Значит, для любых $(\beta_I)_{I\in\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{I\in\mathcal{D}} l_I^{n-mp-p} \operatorname{osc}_1^m \varphi\omega(2I)^p \alpha_I^p |\beta_I|^p\\
&\leqslant b \sum_{I\in\mathcal{E}} l_I^{n-mp} \alpha_I^p |\beta_I - \beta_{I^*}|^p + c_8(n, \|\nabla(\varphi\omega)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}, p) \sum_{I\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{E}} l_I^{n-mp} \alpha_I^p |\beta_I|^p
\end{aligned}$$

$$\leqslant b \sum_{I\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}} l_I^{n-mp}\alpha_I^p|\beta_I-\beta_{I'}|^p+(b\vee c_8)\sum_{I\in\mathcal{F}} l_I^{n-mp}\alpha_I^p|\beta_I|^p$$
$$\leqslant D\sum_{I\in\mathcal{E}\cup\mathcal{F}} l_I^{n-mp}\alpha_I^p|\beta_I-\beta_{I'}|^p,$$

где $D>0$ не зависит от β_I. Доказали, что $\varphi\omega\in\mathcal{W}^{m,p}_{\mathrm{osc}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Вложение правой части равенства (22) в левую проверяется аналогично предыдущему. В частности, оценка (24) верна для $I\in\mathcal{D}$ при замене φ на тождественную единицу и замене множества $\mathcal{E}$ на $\mathcal{D}$, а в последующих выкладках надо заменить φ на 1, $\mathcal{E}$ на $\mathcal{D}$, β_{I^*} на $\beta_{I'}$ и (23) на (10).

Нам осталось проверить обратное вложение. Пусть $|\omega(\xi)-\omega(\eta)|\leqslant\theta|\xi-\eta|$. Сравнение с постоянной $\omega(\mathfrak{c}_I)\in\mathbb{P}^{n-1}_m$ показывает, что

$$\operatorname{osc}^m_1\omega(2I)\leqslant c(n,\theta)l_I.$$

Если inf в определении $\operatorname{osc}^m_1\omega(2I)$ достигается на многочлене f, то

$$\begin{aligned}\sup_{2I}|\nabla f| &\leqslant c_9(n,m)l_I^{-1}(\operatorname{mes}2I)^{-1}\|f-\omega(\mathfrak{c}_I)\|_{L^1(2I)}\\ &\leqslant c_9 l_I^{-1}\big\{\operatorname{osc}^m_1\omega(2I)+(\operatorname{mes}2I)^{-1}\|\omega-\omega(\mathfrak{c}_I)\|_{L^1(2I)}\big\}\\ &\leqslant c_{10}(n,\theta,m).\end{aligned}$$

Положим $F(x)=x_n-f(x')$. Тогда $F\in\mathbb{P}^n_m\setminus\{0\}$, $F(\xi,f(\xi))=0$ и

$$\begin{aligned}E(F)_{\mathfrak{c}_I^\uparrow,r_{2I}} &\leqslant E(x_n-f(\mathfrak{c}_I))_{\mathfrak{c}_I^\uparrow,r_{2I}}+E(f(x')-f(\mathfrak{c}_I))_{\mathfrak{c}_I^\uparrow,r_{2I}}\\ &\leqslant c_{11}(n,\theta,m)r_{2I}\equiv c_{11}r_{2I}D_nF.\end{aligned}$$

Отсюда $f\in Q_{m,c_{10}\vee c_{11}}(2I)$, так что $\operatorname{osq}^{m,c_{10}\vee c_{11}}_1\omega(2I)\leqslant\operatorname{osc}^m_1\omega(2I)$ и

$$\omega\in\mathcal{W}^{m,p}_{\mathrm{osc}}(\mathbb{R}^{n-1})\quad\Rightarrow\quad\omega\in\mathcal{W}^{m,p}_{\mathrm{osq},m,c_{10}\vee c_{11}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Равенство (22) и теорема 3 доказаны. □

4. Необходимость условия $\Omega\in\mathcal{W}^{m,p}$ для $W^{m,p}$-корректности

Докажем главный результат статьи.

Теорема 4. *Пусть ограниченная липшицева область $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$, целое число $m\geqslant 2$ и $1<p<\infty$ таковы, что задача Дирихле для уравнения Пуассона $W^{m,p}$-корректна, т.е. для любого $f\in W^{m-2,p}(\Omega)$ существует единственная функция $Sf\in W^{m,p}(\Omega)$ с лапласианом $\Delta(Sf)=f$ и следом $\gamma_0(Sf)=0$. Тогда*

$$\Omega\in\mathcal{W}^{m,p}.$$

Доказательство. Возьмем любое $a\in\partial\Omega$ и найдем соответствующую тройку (β,D,ω) из определения липшицевой области. Ввиду очевидной инвариантности $W^{m,p}$-корректности относительно движений пространства $\mathbb{R}^n$ считаем без умаления общности, что $D=\mathrm{id}$. Пусть $|\omega(\xi)-\omega(\eta)|\leqslant\theta|\xi-\eta|$ и

$$\Theta=6+6\theta\sqrt{n}.$$

По условию оператор Лапласа является непрерывной биекцией

$$\Delta: W^{m,p}_{\gamma_0}(\Omega)=\{u\in W^{m,p}(\Omega)\colon \gamma_0u=0\}\to W^{m-2,p}(\Omega).$$

По теореме Банаха об обратном операторе существует $C>0$ такое, что

$$(\forall f\in W^{m-2,p}(\Omega))\quad \|Sf\|_{W^{m,p}(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{W^{m-2,p}(\Omega)}.$$

Для $K \in \mathcal{D}$ обозначим

$$\begin{gathered} A = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x' \in 12K \ \&\ \omega(x') < x_n < \omega(x') + 12 l_K\}, \\ \mathcal{E} = \{I \in \mathcal{D} \colon l_I \leqslant l_K \ \&\ I \subset 3K\}, \\ \rho(x) = x_n - \omega(x'), \\ X_I = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x' \in 3I \ \&\ \omega(x') < x_n < \omega(\mathfrak{c}_I) + \Theta l_I + l_I\}, \\ Y_I = I \times (\omega(\mathfrak{c}_I) + \Theta l_I - l_I/2, \omega(\mathfrak{c}_I) + \Theta l_I + l_I/2), \\ Z_I = I \times (\omega(\mathfrak{c}_I) + (3/2)\Theta l_I - l_I/2, \omega(\mathfrak{c}_I) + (3/2)\Theta l_I + l_I/2), \end{gathered}$$

где $I \in \mathcal{E}$. Если $x \in 2Y_I$, то

$$|\rho(x) - \Theta l_I| \leqslant |x_n - \omega(\mathfrak{c}_I) - \Theta l_I| + |\omega(\mathfrak{c}_I) - \omega(x')| < l_I + \theta\sqrt{n} l_I = \Theta l_I/6.$$

При $x \in 2Z_I$ аналогично $|\rho(x) - (3/2)\Theta l_I| < \Theta l_I/6$, поэтому

$$(\forall I, J \in \mathcal{E}) \quad 2Y_I \cap 2Z_J = \varnothing. \tag{25}$$

Очевидно, что $\operatorname{diam}\{\mathfrak{c}_{Y_I}\} \cup Z_J \leqslant c_1(n,\theta) l_J$ для $I \subset J$, причем $c_1 \geqslant \sqrt{n}$.

По лемме 4 в [34] существует положительная функция $U \in C(\overline{\Omega})$ со следом $\gamma_0 U = 0$, гармоническая в некоторой окрестности границы $\partial\Omega$. Пусть $a' \in \overline{K}$, причем куб K столь мал, что U гармоническая на множестве A, $A \Subset B(a,\beta)$, $(\forall I)$ $X_I \cup 2Z_I \subset \Omega$ и (по оценке Карлесона (19) и неравенству Гарнака)

$$\begin{aligned} U_I = U(\mathfrak{c}_I, \omega(\mathfrak{c}_I) + l_I) &\leqslant c_2(n,\theta) U(\mathfrak{c}_{Y_I}), \\ U_I &\leqslant c_3(n,\theta) \inf_{Z_I} U, \\ \sup_{B(\mathfrak{c}_{Z_I}, 2c_1 l_I) \cap \Omega} U &\leqslant c_4(n,\theta) U_I. \end{aligned}$$

Отметим, что $(\mathfrak{c}_I, \omega(\mathfrak{c}_I) + l_I) \in \Omega$ и $U(\xi, \omega(\xi)) = 0$ на $12K$ ввиду $A \Subset B(a,\beta)$.

Рассмотрим неотрицательную функцию $\Phi \in C_0^\infty((-1,1)^n)$, тождественно равную единице на $(-1/2,1/2)^n$, и для $I \in \mathcal{E}$ положим

$$\Phi_I(x) = \Phi(l_I^{-1}(x - \mathfrak{c}_{Z_I})).$$

Имеем $\Phi_I \geqslant 0$, $\Phi_I \in C_0^\infty(2Z_I)$ и $\Phi_I \equiv 1$ на Z_I. Возьмем семейство $(\beta_I)_{I \in \mathcal{E}} \subset \mathbb{R}$ такое, что $\beta_I \neq \beta_{I^*}$ для I из непустого конечного подмножества в $\mathcal{E}$. Тогда

$$f = \sum_{I \in \mathcal{E}} \frac{U_I |\beta_I - \beta_{I^*}|}{l_I^2} \Phi_I \in C_0^\infty(\Omega).$$

Для потенциала Грина $\mathbf{G} f(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\, dy$ ввиду леммы 2 в [34]

$$\mathbf{G} f + S f \in C(\overline{\Omega}) + W^{m,p}(\Omega) \quad \& \quad \Delta(\mathbf{G} f + S f) = 0 \quad \& \quad \gamma_0(\mathbf{G} f + S f) = 0.$$

По теореме 1 функция $u = \mathbf{G} f$ совпадает с $-Sf$.

Из $f \geqslant 0$ и $f \neq 0$ вытекает, что $u > 0$. В силу $\Delta u = -f$ и (25) функция u гармонична на кубах $2Y_I$. Кубы Z_J попарно не пересекаются, откуда

$$u(\mathfrak{c}_{Y_I}) = \mathbf{G} f(\mathfrak{c}_{Y_I}) \geqslant \sum_{J \in \mathcal{E} \colon I \subset J} \Big[\inf_{Z_J} G(\mathfrak{c}_{Y_I}, \cdot)\Big] l_J^{n-2} U_J |\beta_J - \beta_{J^*}|.$$

Формула Богдана [34, лемма 5] показывает, что

$$(\exists \alpha_G > 1)\ (\forall y, z \in \Omega) \quad G(y,z) \geqslant \frac{|y-z|^{2-n} U(y) U(z)}{\alpha_G \sup_{x \in \Omega \colon |x - (y+z)/2| \leqslant |y-z|} U^2(x)}.$$

При $y = \mathfrak{c}_{Y_I}$, $I \subset J$, $z \in Z_J$ и $|x-(y+z)/2| \leqslant |y-z|$ получаем

$$|x - \mathfrak{c}_{Z_J}| \leqslant \left|x - \frac{y+z}{2}\right| + \left|\frac{y+z}{2} - z\right| + |z - \mathfrak{c}_{Z_J}| < \frac{3}{2}c_1 l_J + \sqrt{n}\frac{l_J}{2} \leqslant 2c_1 l_J,$$

$$G(y,z) \geqslant \frac{c_1^{2-n} l_J^{2-n} c_2^{-1} U_I c_3^{-1} U_J}{\alpha_G c_4^2 U_J^2} = \frac{l_J^{2-n} U_I}{c_5(n,\theta,\alpha_G) U_J},$$

$$u(\mathfrak{c}_{Y_I}) \geqslant c_5^{-1} \sum_{J \supset I} U_I |\beta_J - \beta_{J^*}| \geqslant c_5^{-1} U_I |\beta_I|.$$

Найдем постоянную $N \geqslant 1$ по теореме 2 для $M = M^\star = m-1$. Имеем

$$\sum_{I \in \mathcal{E}} l_I^{n-mp-p} \operatorname{osq}_1^{M,N} \omega(2I)^p U_I^p |\beta_I|^p \leqslant c_5^p \{A_1 + c(n,\theta,p) A_2\},$$

$$A_1 = \sum_{I \in \mathcal{E}\colon \omega \in R_{M,N}(3I)} l_I^{n-mp-p} \operatorname{osq}_1^{M,N} \omega(2I)^p u^p(\mathfrak{c}_{Y_I}),$$

$$A_2 = \sum_{I \in \mathcal{E}\colon \omega \notin R_{M,N}(3I)} l_I^{n-mp} u^p(\mathfrak{c}_{Y_I}).$$

По теореме 2 и замене переменной

$$A_1 \leqslant N^p \sum_{I \in \mathcal{E}} l_I^{n-np} \left(\int_{X_I} |\nabla^m u| \, dx\right)^p.$$

Обозначим $\varepsilon = 1/2$. По неравенству Гёльдера и теореме Фубини

$$\begin{aligned}
\left(\int_{X_I} |\nabla^m u| \, dx\right)^p &\leqslant \int_{X_I} \rho^{\varepsilon(p-1)} |\nabla^m u|^p \, dx \left(\int_{X_I} \rho^{-\varepsilon} \, dx\right)^{p-1} \\
&\leqslant c_6(n,\theta,p) l_I^{(n-\varepsilon)(p-1)} \int_{X_I} \rho^{\varepsilon(p-1)} |\nabla^m u|^p \, dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &\leqslant c_6 N^p \int_\Omega \rho^{\varepsilon(p-1)} |\nabla^m u|^p \, dx \sum_{I \in \mathcal{E}\colon x \in X_I} l_I^{-\varepsilon(p-1)} \\
&\leqslant c(n,\theta,p,N) \int_\Omega |\nabla^m u|^p \, dx \\
&\leqslant c(n,\theta,m,p,N) \|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

По леммам 6 и 7 ниже

$$A_2 \leqslant c(n,\theta,m,p,C,N) \|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Любая точка в $\mathbb{R}^n$ принадлежит не более чем $c(n)$ кубам $2Z_I$, поэтому

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} &\leqslant C^p \|f\|^p_{W^{m-2,p}(\Omega)} \\
&\leqslant c(n,p,C) \sum_{I \in \mathcal{E}} \frac{U_I^p |\beta_I - \beta_{I^*}|^p}{l_I^{2p}} \|\Phi_I\|^p_{W^{m-2,p}(\Omega)} \\
&\leqslant c(n,m,p,C,\Phi) \sum_{I \in \mathcal{E}} l_I^{n-mp} U_I^p |\beta_I - \beta_{I^*}|^p.
\end{aligned}$$

Предыдущий абзац показывает, что для данного семейства (β_I) выполнено неравенство из (21). Для нулевого семейства это неравенство тривиально, а для произвольных β_I доказывается с помощью предельного перехода. Отсюда $\varphi\omega \in \mathcal{W}^{m,p}_{\mathrm{osc}}(\mathbb{R}^{n-1})$ при $\varphi \in C_0^\infty(2K)$ по теореме 3. Возьмем φ со свойством

$\varphi \equiv 1$ на $(3/2)K$. Тогда $\varphi\omega = \omega$ около точки a', так что $\Omega \in \mathcal{W}^{m,p}$ в силу произвольности точки $a \in \partial\Omega$. Теорема 4 доказана. □

В следующей лемме H — полуевклидово пространство. Это линейное пространство, снабженное симметричной билинейной формой (x, y) со свойством $(x, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$. Соответствующая полунорма суть $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Лемма 6. *Для числа $0 < \alpha \leqslant 1/20$, элемента $x \in H$ и ортонормированного набора $(x_i)_{i=0}^{k-1} \subset H$ $(1 \leqslant k \leqslant q \in \mathbb{N})$ обозначим*

$$\alpha_i = \alpha^{3^{q-i}},$$

$$\|x\|_\infty = \max_{0 \leqslant i \leqslant k-1} \alpha_k^{2(k-i)} |(x, x_i)|,$$

$$P_j x = x - \sum_{i=0}^{j-1} (x, x_i) x_i \quad (0 \leqslant j \leqslant k).$$

Предположим, что линейный оператор $A : H \to H$, число $0 < b \leqslant 1/(23\alpha)$ и множества $G_0, \dots, G_k \subset H$ удовлетворяют условиям

$$(\forall i) \quad x_i \in G_i \quad \& \quad \|P_i A x_i\| \leqslant \alpha_i, \tag{26}$$

$$(\forall j)\ (\forall x \in G_j) \quad \|x\| \neq 0 \quad \& \quad \|Ax\| \leqslant b\|x\| \quad \& \quad \|x\|^{-1} x \in G_j, \tag{27}$$

причем набор $(x_i)_{i=0}^{k-1}$ нельзя расширить до ортонормированного набора $(x_i)_{i=0}^{k}$ со свойством (26). *Возьмем $x \in H$ такое, что если $P_k x \notin G_k$, то*

$$\|P_k x\| \leqslant \|x\|_\infty \quad \& \quad \|A P_k x\| \leqslant \|x\|_\infty.$$

Тогда (28) $\Rightarrow$ (29) $\Rightarrow$ (30) *для следующих неравенств:*

$$\|P_k A x\| \leqslant 3\|Ax\|_\infty, \tag{28}$$

$$\|P_k x\| \leqslant 2\|x\|_\infty, \tag{29}$$

$$\|Ax\|_\infty \leqslant \alpha \|x\|_\infty / 3. \tag{30}$$

Доказательство. Допустим, что $P_k x \in G_k$. Ввиду $\alpha_k \leqslant \alpha_q = \alpha \leqslant 1/20$ имеем

$$Ax = \sum_{i=0}^{k-1} (x, x_i) A x_i + A P_k x, \tag{31}$$

$$|(Ax_i, x_j)| = |(P_i A x_i, x_j)| \leqslant \|P_i A x_i\| \leqslant \alpha_i \quad \text{при} \quad i \leqslant j \leqslant k-1,$$

$$|(Ax_i, x_j)| \leqslant \|Ax_i\| \leqslant b,$$

$$|(AP_k x, x_j)| \leqslant \|AP_k x\| \leqslant b\|P_k x\|,$$

$$|(Ax, x_j)| \leqslant \sum_{i=0}^{j} \|x\|_\infty \alpha_k^{2(i-k)} \alpha_i + \sum_{i=j+1}^{k-1} \|x\|_\infty \alpha_k^{2(i-k)} b + b\|P_k x\|,$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{j} \alpha_k^{2(i-k)} \alpha_i &= \alpha_k^{2(j-k)} \sum_{i=0}^{j} \alpha_k^{2(i-j)} \alpha_i \leqslant \frac{20}{19} \alpha_k^{2(j-k)} \alpha_j \\ &\leqslant \frac{1}{19} \alpha_k^{2(j-k)+2}, \end{aligned} \tag{32}$$

$$\sum_{i=j+1}^{k-1} \alpha_k^{2(i-k)} \leqslant \alpha_k^{2(j-k)} \sum_{i=j+1}^{\infty} \alpha_k^{2(i-j)} \leqslant \frac{20}{19} \alpha_k^{2(j-k)+2},$$

$$\begin{aligned}\|Ax\|_\infty &\leqslant \frac{1+20b}{19}\alpha_k^2\{\|x\|_\infty+\|P_kx\|\}\\ &\leqslant \frac{\alpha+20\alpha b}{19}\alpha_k\{\|x\|_\infty+\|P_kx\|\} \leqslant \frac{\alpha_k\{\|x\|_\infty+\|P_kx\|\}}{10}.\end{aligned}$$

При $P_kx\notin G_k$ получаем этот результат с помощью оценки $\|AP_kx\|\leqslant\|x\|_\infty$:

$$\|Ax\|_\infty \leqslant \frac{20+20b}{19}\alpha_k^2\|x\|_\infty \leqslant \frac{\alpha_k\|x\|_\infty}{10} \leqslant \frac{\alpha_k\{\|x\|_\infty+\|P_kx\|\}}{10}.$$

Отсюда сразу выводим, что (29) $\Rightarrow$ (30).

Невозможность расширить $(x_i)_{i=0}^{k-1}$ до набора $(x_i)_{i=0}^{k}$ влечет, что

$$(\forall y\in G_k\cap P_kH)\quad \|P_kAy\|\geqslant\alpha_k\|y\|.$$

Действительно, если $y\in G_k\cap P_kH$ и $\|P_kAy\|<\alpha_k\|y\|$, то выбор $x_k=\|y\|^{-1}y$ порождает противоречие.

Импликацию (28) $\Rightarrow$ (29) докажем от противного. Пусть $\|x\|_\infty<\|P_kx\|/2$. Тогда $P_kx\in G_k\cap P_kH$. Из соотношений (31), $P_k=P_kP_i$, (26) и (32) выводим

$$\begin{aligned}\alpha_k\|P_kx\| \leqslant \|P_kAP_kx\| &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1}\|x\|_\infty\alpha_k^{2(i-k)}\|P_kP_iAx_i\|+\|P_kAx\|\\ &\leqslant \|x\|_\infty\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_k^{2(i-k)}\alpha_i+\|P_kAx\|\\ &\leqslant (20/19)\alpha_k\|x\|_\infty+\|P_kAx\|\\ &\leqslant (10/19)\alpha_k\|P_kx\|+\|P_kAx\|,\\ \|Ax\|_\infty &< \frac{\alpha_k\{\|P_kx\|/2+\|P_kx\|\}}{10}\\ &= \frac{3\alpha_k\|P_kx\|}{20} \leqslant \frac{19\|P_kAx\|}{60} \leqslant \frac{\|P_kAx\|}{3}.\end{aligned}$$

Пришли к отрицанию неравенства (28). □

Лемма 7. *В условиях и обозначениях теоремы 4*

$$A_2\leqslant c(n,\theta,m,p,C,N)\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Буквы A, β, c_i и G далее применяются в отличном от теоремы 4 смысле.

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned}\beta_0(n,N)&=3^{n-1}/(2N),\\ \mathcal{E}_{\mathrm{irr}}&=\{I\in\mathcal{E}\colon \omega\notin R_{M,N}(3I)\}\end{aligned}$$

(от слова irrational или irregular). Для любого $I\in\mathcal{E}_{\mathrm{irr}}$ обозначим

$$\begin{aligned}F^+(x)&=\sum_{\gamma\colon\gamma_n\geqslant2}f_\gamma\{x-\mathfrak{c}_I^\uparrow\}^\gamma \quad\text{для}\quad F(x)=\sum_\gamma f_\gamma\{x-\mathfrak{c}_I^\uparrow\}^\gamma,\\ \|F\|^I&=E(F)_{\mathfrak{c}_I^\uparrow,l_I}=\Bigl(\sum_\gamma f_\gamma^2 l_I^{2|\gamma|}\Bigr)^{1/2},\\ \|F\|_I^2&=E(F^+)^2_{\mathfrak{c}_I^\uparrow,l_I}=\sum_{\gamma\colon\gamma_n\geqslant2}f_\gamma^2l_I^{2|\gamma|},\\ (F,G)_I&=(\|F+G\|_I^2-\|F-G\|_I^2)/4,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_{I,\beta} &= \left\{F \in \mathbb{P}^n_M \setminus \{0\} \colon l_I^{1-n} \int_{3I} |F(\xi^\uparrow)|\, d\xi \leqslant \beta \|F\|^I \right\} \quad (\beta > 0),\\
\mathbb{P}^n_{-1} &= \{0\},\\
\mathbb{P}^+ &= (\mathbb{P}^n_M)^+ = \{F \in \mathbb{P}^n_M \colon F^+ = F\} = (x_n - \omega(\mathfrak{c}_I))^2 \mathbb{P}^n_{M-2},\\
q &= \dim \mathbb{P}^+ = \dim \mathbb{P}^n_{M-2} = \tbinom{n+m-3}{n},\\
\Delta^+_I &= D_{nn}^{-1}\Delta : \mathbb{P}^n_M \to \mathbb{P}^+ \subset \mathbb{P}^n_M,
\end{aligned}
$$

где $\xi^\uparrow = (\xi, \omega(\xi))$ и $F, G \in \mathbb{P}^n_M$, а D_{nn}^{-1} — обращение биекции $D_{nn} : \mathbb{P}^+ \to \mathbb{P}^n_{M-2}$. Форма $(F,G)_I$ превращает $\mathbb{P}^n_M$ в полуевклидово пространство H_I.

Для любого $F \in \mathbb{P}_{I,\beta_0}$ из $F \neq 0$ и $\omega \notin R_{M,N}(3I)$ следует, что

$$
\begin{aligned}
(3l_I)^2 E(D_{nn}F)_{\mathfrak{c}_I^\uparrow, 3l_I} &> E(F)_{\mathfrak{c}_I^\uparrow, 3l_I}/N - (3l_I)^{1-n} \int_{3I} |F(\xi^\uparrow)|\, d\xi\\
&\geqslant \|F\|^I/N - 3^{1-n}\beta_0 \|F\|^I\\
&= \|F\|^I/(2N).
\end{aligned}
$$

В частности, $D_{nn}F \neq 0$, что невозможно при $m = 2$. В этом случае $\mathbb{P}_{I,\beta_0} = \varnothing$. Без особых затруднений устанавливаются следующие неравенства:

$$
\begin{aligned}
&(\forall F \in \mathbb{P}^n_M) \quad E(D_{nn}F)_{\mathfrak{c}_I^\uparrow, 3l_I} \leqslant c(m) l_I^{-2} \|F\|_I,\\
&(\forall F \in \mathbb{P}_{I,\beta_0}) \quad \|F\|^I < 2N(3l_I)^2 E(D_{nn}F)_{\mathfrak{c}_I^\uparrow, 3l_I} \leqslant c_0(m,N)\|F\|_I, \qquad (33)\\
&(\forall F \in \mathbb{P}^n_{M-2}) \quad \|D_{nn}^{-1}F\|_I \leqslant (1/2) l_I^2 \|F\|^I \leqslant l_I^2 \|F\|^I,\\
&(\forall F \in \mathbb{P}^n_M) \quad \|\Delta F\|^I \leqslant c_1(n,m) l_I^{-2} \|F\|^I,\\
&(\forall F \in \mathbb{P}^n_M) \quad \|\Delta^+_I F\|_I \leqslant l_I^2 \|\Delta F\|^I \leqslant c_1 \|F\|^I,\\
&(\forall F \in \mathbb{P}_{I,\beta_0}) \quad \|\Delta^+_I F\|_I \leqslant c_0 c_1 \|F\|_I. \qquad (34)
\end{aligned}
$$

Возьмем $v \in W^{m,p}_{\gamma_0}(\Omega)$. Уточненное интегральное представление Соболева функции v относительно вписанного в Y_I шара [6, гл. 3, следствие 12] доставляет многочлен $F_I[v] \in \mathbb{P}^n_M$ такой, что

$$
|D^\gamma v(x) - D^\gamma F_I[v](x)| \leqslant c(n,\theta,m) \int_{X_I} \frac{|\nabla^m v(y)|}{|x-y|^{n-m+|\gamma|}}\, dy \tag{35}
$$

для любого мультииндекса с $|\gamma| \leqslant M$ и почти всех $x \in X_I$. Положим

$$
\mathcal{E}_\beta[v] = \left\{ I \in \mathcal{E}_{\mathrm{irr}} \colon l_I^{m-n} \int_{X_I} |\nabla^m v|\, dx < \beta \|F_I[v]\|^I \right\}
$$

для $\beta > 0$. При $I \in \mathcal{E}_\beta[v]$ по аналогии с оценками (7) и (8) выводим

$$
\begin{aligned}
&l_I^{-n} \int_{X_I} |v - F_I[v]|\, dx \leqslant c_*(n,\theta,m) l_I^{m-n} \int_{X_I} |\nabla^m v|\, dx < c_* \beta \|F_I[v]\|^I, \qquad (36)\\
&l_I^{1-n} \int_{3I} |F_I[v](\xi^\uparrow)|\, d\xi \leqslant c_2(n,\theta,m) l_I^{m-n} \int_{X_I} |\nabla^m v|\, dx < c_2 \beta \|F_I[v]\|^I,\\
&F_I[v] \in \mathbb{P}_{I, c_2\beta}.
\end{aligned}
$$

Для $I \in \mathcal{E}_{\mathrm{irr}}$ обозначим $F_I = F_I[u]$. Пусть выполнено условие

$$
l_I^{m-n} \int_{X_I} |\nabla^m u|\, dx < \beta_1 u(\mathfrak{c}_{Y_I}) \quad (\beta_1 > 0).
$$

Функция u на кубе Y_I сравнима с $u(\mathfrak{c}_{Y_I})$ по неравенству Гарнака, а норма $\|F_I\|^I$ сравнима с $l_I^{-n}\int_{Y_I}|F_I|\,dx$. Отсюда и из первого неравенства (36) следует, что если $\beta_1(n,\theta,m)$ достаточно мало, то выполнена оценка

$$u(\mathfrak{c}_{Y_I}) \leqslant c_3(n,\theta,m)\|F_I\|^I.$$

Положим

$$\mathcal{E}_\beta = \biggl\{ I \in \mathcal{E}_{\mathrm{irr}} \colon l_I^{m-n}\int_{X_I}|\nabla^m u|\,dx < \beta u(\mathfrak{c}_{Y_I})/c_3 \biggr\}.$$

По доказательству теоремы 4

$$\begin{aligned} \sum_{I\in\mathcal{E}_{\mathrm{irr}}\setminus\mathcal{E}_\beta} l_I^{n-mp}u^p(\mathfrak{c}_{Y_I}) &\leqslant c_3^p\beta^{-p}\sum_{I\in\mathcal{E}} l_I^{n-np}\biggl(\int_{X_I}|\nabla^m u|\,dx\biggr)^p \\ &\leqslant c(n,\theta,m,p,\beta)\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{37}$$

Для $\beta \leqslant c_3\beta_1$ имеем $\mathcal{E}_\beta \subset \mathcal{E}_\beta[u]$, откуда

$$\sum_{I\in\mathcal{E}_\beta} l_I^{n-mp}u^p(\mathfrak{c}_{Y_I}) \leqslant c_3^p \sum_{I\in\mathcal{E}_\beta[u]} l_I^{n-mp}\{\|F_I\|^I\}^p. \tag{38}$$

При $m=2$ положим $\beta = (\beta_0/c_2)\wedge(c_3\beta_1)$. Если $I\in\mathcal{E}_\beta$, то

$$F_I \in \mathbb{P}_{I,c_2\beta} \subset \mathbb{P}_{I,\beta_0} = \varnothing,$$

поэтому $\mathcal{E}_\beta = \varnothing$ и оценка (37) доказывает лемму 7 для $m=2$.

Пусть $m \geqslant 3$. Тогда применимо неравенство (35) с $|\gamma| = 2$. Для $I\in\mathcal{E}_\beta[v]$ по аналогии с (36) имеем

$$l_I^{2-n}\int_{X_I}|\Delta v - \Delta F_I[v]|\,dx \leqslant c(n,\theta,m)\beta\|F_I[v]\|^I.$$

Если $\beta \leqslant \beta_0/c_2$ и $I\in\mathcal{E}_\beta[u]$, то $F_I\in\mathbb{P}_{I,\beta_0}$ и (ввиду гармоничности u на Y_I)

$$\begin{aligned} \|\Delta_I^+ F_I\|_I \leqslant l_I^2\|\Delta F_I\|^I &\leqslant c(n,\theta,m)l_I^{2-n}\int_{Y_I}|\Delta F_I|\,dx \\ &\leqslant c_4(n,\theta,m)\beta\|F_I\|^I \\ &\leqslant c_0c_4\beta\|F_I\|_I. \end{aligned} \tag{39}$$

Обозначим $V_I = F_I[v]$, $w = SD_{nn}v$ и $W_I = F_I[w]$. По (35) и теореме Фубини

$$\begin{aligned} \|V_I - \Delta_I^+ W_I\|_I &= \|D_{nn}^{-1}(D_{nn}V_I - \Delta W_I)\|_I \\ &\leqslant l_I^2\|D_{nn}V_I - \Delta W_I\|^I \\ &\leqslant c(n,\theta,m)l_I^{2-n}\int_{Y_I}|D_{nn}V_I - D_{nn}v + \Delta w - \Delta W_I|\,dx \\ &\leqslant c_5(n,\theta,m)l_I^{m-n}\int_{X_I}\{|\nabla^m v| + |\nabla^m w|\}\,dx. \end{aligned}$$

Очевидно, что $c_0 \geqslant 1$ и $c_1 \geqslant 2$. Обозначим

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{C}\wedge\frac{1}{23c_0c_1} \quad \biggl(<\frac{1}{20}\biggr), \\ \alpha_i &= \alpha^{3^{q-i}}, \\ b &= c_0c_1, \\ b_i &= \beta_0(4c_0c_1/\alpha_1^2)^{i-q} \quad (0\leqslant i\leqslant q), \end{aligned}$$

$$\beta=\frac{\alpha_0}{c_0c_4}\wedge\frac{\alpha_1^2}{4c_0c_5}\wedge\frac{5\alpha_1^2b_0}{6\alpha^2c_0c_1c_2}\wedge\frac{b_0}{c_2}\wedge(c_3\beta_1)\quad\Big(<\frac{\beta_0}{c_2}\Big).$$

Для любого $I\in\mathcal{E}_\beta[u]$ в лемме 6 положим $H=H_I$,

$$x_0=\|F_I\|_I^{-1}F_I\quad\&\quad A=\Delta_I^+\quad\&\quad G_j=\mathbb{P}_{I,b_j}.$$

Ввиду $F_I\in\mathbb{P}_{I,c_2\beta}\subset G_0$ и неравенств (39) набор $(x_i)_{i=0}^0$ удовлетворяет свойству (26). Этот набор можно по индукции расширить до максимального ортонормированного набора $(x_i)_{i=0}^{k-1}$ со свойством (26). Очевидно, что $k\leqslant q=\dim\mathbb{P}^+$. Свойство (27) выполнено на основании $G_0\subset\cdots\subset G_q=\mathbb{P}_{I,\beta_0}$, (33) и (34).

Рассмотрим многочлен $x\in G_0$. С учетом (33) имеем

$$\begin{aligned}l_I^{1-n}\int_{3I}|P_kx(\xi^\uparrow)|\,d\xi&\leqslant l_I^{1-n}\int_{3I}|x(\xi^\uparrow)|\,d\xi+\sum_{i=0}^{k-1}|(x,x_i)_I|l_I^{1-n}\int_{3I}|x_i(\xi^\uparrow)|\,d\xi\\&\leqslant b_0\|x\|^I+\|x\|_I\sum_{i=0}^{k-1}b_i\|x_i\|^I\\&\leqslant b_0c_0\|x\|_I+\|x\|_I\sum_{i=0}^{k-1}b_ic_0\leqslant 2b_{k-1}c_0\|x\|_I.\end{aligned}$$

Если $2b_{k-1}c_0\|x\|_I<b_k\|P_kx\|^I$, то $P_kx\in G_k$. В противном случае

$$\begin{aligned}\|P_kx\|_I\leqslant\|P_kx\|^I&\leqslant\frac{2b_{k-1}c_0}{b_k}\|x\|_I=\frac{\alpha_1^2}{2c_1}\|x\|_I\leqslant\frac{\|x\|_I}{2},\\ \|x\|_I&=\sqrt{\sum_{i=0}^{k-1}(x,x_i)_I^2+\|P_kx\|_I^2}\leqslant\frac{2}{\sqrt3}\sqrt{\sum_{i=0}^{k-1}(x,x_i)_I^2}\\&\leqslant\frac{2}{\sqrt3}\sqrt{\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_k^{4(i-k)}}\|x\|_\infty\leqslant2\alpha_k^{-2k}\|x\|_\infty\leqslant2\alpha_1^{-2}\|x\|_\infty,\\ \|P_kx\|_I\leqslant\|P_kx\|^I&\leqslant\frac{\alpha_1^2}{2c_1}\frac{2}{\alpha_1^2}\|x\|_\infty=c_1^{-1}\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_\infty,\\ \|AP_kx\|_I&=\|\Delta_I^+P_kx\|_I\leqslant c_1\|P_kx\|^I\leqslant\|x\|_\infty.\end{aligned}$$

Значит, к многочленам $x\in G_0$ применимо заключение леммы 6.

Полунорма $\|x\|_\infty$ и проекция P_kx леммы 6 будут обозначаться через $\|x\|_{\infty,I}$ и P_Ix соответственно. Для конечного множества $\mathcal{F}\subset\mathcal{E}_\beta[u]$ положим

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[v]&=\Big\{I\in\mathcal{F}\colon l_I^{m-n}\int_{X_I}|\nabla^mv|\,dx<\frac{\beta c_0\|V_I\|_{\infty,I}}{\alpha_1^2}\ \&\ \|P_IV_I\|_I\leqslant2\|V_I\|_{\infty,I}\Big\},\\ \mathcal{F}_S[v]&=\Big\{I\in\mathcal{F}[v]\colon l_I^{m-n}\int_{X_I}|\nabla^mw|\,dx<\frac{\beta c_0\|V_I\|_{\infty,I}}{\alpha_1^2}\Big\},\\ T_{\mathcal{F}}&=\sup_{v\in W^{m,p}_{\gamma_0}(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\sum_{I\in\mathcal{F}[v]}l_I^{n-mp}\|V_I\|^p_{\infty,I}}{\|v\|^p_{W^{m,p}(\Omega)}},\end{aligned}$$

где $V_I=F_I[v]$ и $w=SD_{nn}v$. Для любого $I\in\mathcal{E}_\beta[u]$

$$l_I^{m-n}\int_{X_I}|\nabla^mu|\,dx<\beta\|F_I\|^I\leqslant\beta c_0\|F_I\|_I$$

$$\leqslant \beta c_0 \alpha_1^{-2} \alpha_k^{2k} \|F_I\|_I = \beta c_0 \alpha_1^{-2} \|F_I\|_{\infty,I}$$

и $P_I F_I = 0$, откуда $\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}$ и

$$\sum_{I \in \mathcal{E}_\beta[u]} l_I^{n-mp} \{\|F_I\|^I\}^p \leqslant (c_0/\alpha_1^2)^p \Big[\sup_{\mathcal{F}} T_{\mathcal{F}}\Big] \|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)}. \tag{40}$$

Заметим, что $T_{\mathcal{F}} < \infty$ в силу (36).

Пусть опять $W_I = F_I[w]$. Для $I \in \mathcal{F}_S[v]$ имеем

$$\begin{aligned}
\|V_I - \Delta_I^+ W_I\|_I &\leqslant c_5 \frac{2\beta c_0 \|V_I\|_{\infty,I}}{\alpha_1^2} \leqslant (1/2)\|V_I\|_{\infty,I}, \\
\|V_I - \Delta_I^+ W_I\|_{\infty,I} &\leqslant \alpha^2 \|V_I - \Delta_I^+ W_I\|_I \leqslant (1/6)\|V_I\|_{\infty,I}, \\
\|\Delta_I^+ W_I\|_{\infty,I} &\geqslant \|V_I\|_{\infty,I} - \|V_I - \Delta_I^+ W_I\|_{\infty,I} \geqslant (5/6)\|V_I\|_{\infty,I}, \\
\|P_I \Delta_I^+ W_I\|_I &\leqslant \|P_I V_I\|_I + \|V_I - \Delta_I^+ W_I\|_I \\
&\leqslant 2\|V_I\|_{\infty,I} + (1/2)\|V_I\|_{\infty,I} = (5/2)\|V_I\|_{\infty,I} \\
&\leqslant 3\|\Delta_I^+ W_I\|_{\infty,I}.
\end{aligned}$$

Получили неравенство (28) для многочлена $x = W_I$. При этом

$$\begin{aligned}
\|V_I\|_{\infty,I} &\leqslant (6/5)\|\Delta_I^+ W_I\|_{\infty,I} \leqslant (6\alpha^2/5)\|\Delta_I^+ W_I\|_I \\
&\leqslant (6\alpha^2 c_1/5)\|W_I\|^I, \\
\frac{\beta c_0 \|V_I\|_{\infty,I}}{\alpha_1^2} &\leqslant \frac{6\alpha^2 \beta c_0 c_1}{5\alpha_1^2}\|W_I\|^I \leqslant \frac{b_0}{c_2}\|W_I\|^I, \\
I &\in \mathcal{E}_{b_0/c_2}[w] \quad \& \quad x = W_I \in \mathbb{P}_{I,b_0} = G_0.
\end{aligned}$$

Лемма 6 доставляет неравенства (29) и (30). В силу (30)

$$\|V_I\|_{\infty,I} \leqslant (6/5)\|\Delta_I^+ W_I\|_{\infty,I} \leqslant (\alpha/2)\|W_I\|_{\infty,I} < \|W_I\|_{\infty,I}.$$

С учетом (29) убеждаемся, что $\mathcal{F}_S[v] \subset \mathcal{F}[w]$.

Теперь можем оценить $T_{\mathcal{F}}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{I \in \mathcal{F}[v] \setminus \mathcal{F}_S[v]} l_I^{n-mp} \|V_I\|^p_{\infty,I} &\leqslant \left(\frac{\alpha_1^2}{\beta c_0}\right)^p \sum_{I \in \mathcal{E}} l_I^{n-np} \left(\int_{X_I} |\nabla^m w|\, dx\right)^p \\
&\leqslant c_6(n,\theta,m,p,N,C)\|w\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} \\
&\leqslant c_6 C^p \|D_{nn} v\|^p_{W^{m-2,p}(\Omega)} \\
&\leqslant c_6 C^p \|v\|^p_{W^{m,p}(\Omega)}, \\
\sum_{I \in \mathcal{F}_S[v]} l_I^{n-mp} \|V_I\|^p_{\infty,I} &\leqslant (\alpha/2)^p \sum_{I \in \mathcal{F}[w]} l_I^{n-mp} \|W_I\|^p_{\infty,I} \\
&\leqslant (\alpha/2)^p T_{\mathcal{F}} \|w\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} \\
&\leqslant (\alpha C/2)^p T_{\mathcal{F}} \|v\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} \leqslant (1/2) T_{\mathcal{F}} \|v\|^p_{W^{m,p}(\Omega)}, \\
T_{\mathcal{F}} &\leqslant 2c_6 C^p.
\end{aligned}$$

В сочетании с неравенствами (37), (38) и (40) это доказывает лемму 7. □

5. Критерий $W^{m,p}$-распрямляемости с нулевым следом

Во введении отмечено, что работы автора [28, 29, 30, 31, 32] содержат эквивалентность ряда условий, связанных с распрямлением липшицевых областей. Рассуждения группируются вокруг дискретного весового неравенства (ДВН) и в основном относятся к пространствам Лизоркина–Трибеля $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)$ и $F^s_{p,q}(\Omega)$, где $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ — верхнее полупространство, а

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > \omega(x')\}$$

— надграфик липшицевой функции $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$. Необходимость ДВН для инвариантности пространства $F^s_{p,q}$ относительно композиции с некоторым билипшицевым C^∞-диффеоморфизмом $g : \mathbb{R}^n_+ \to \Omega$ со свойством

$$(\forall \xi) \quad \lim_{x \to (\xi,0)} g(x) = (\xi, \omega(\xi)) \tag{41}$$

получена в [31] через необходимость ДВН для совпадения [29, 30] пространства следов для пространства $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n_+)$ с пространством следов для $F^s_{p,q}(\Omega)$.

В данном параграфе изучена инвариантность подпространства

$$W^{m,p}_{\gamma_0}(\Omega) = \{f \in W^{m,p}(\Omega) : \gamma_0 f = 0\}$$

относительно композиции с некоторым отображением g. Здесь пространство Соболева $W^{m,p}(\Omega)$ ($m \in \mathbb{N}$ и $1 < p < \infty$) и оператор следа

$$\gamma_0 : W^{m,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{вложение}} W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

определяются так же, как в случае ограниченной липшицевой области. Оказывается, что указанная инвариантность (распрямляемость) равносильна тому же ДВН, что раньше. Поскольку подход с пространствами следов теперь не работает, необходимость ДВН будет получена с помощью osq-чисел и теоремы 3. Новый подход представляется более естественным даже для случая «полных» пространств $W^{m,p}(\Omega)$. В частности, он не требует ограничения (41).

Пусть $|\omega(\xi) - \omega(\eta)| \leqslant \theta|\xi - \eta|$. Для $I \in \mathcal{D}$ обозначим

$$\begin{cases} \Theta = 6 + 6\theta\sqrt{n}, \\ X_I = X_I[\omega] = \{x \in \mathbb{R}^n : x' \in 3I \ \&\ \omega(x') < x_n < \omega(\mathfrak{c}_I) + \Theta l_I + l_I\}, \\ Y_I = I \times (\omega(\mathfrak{c}_I) + \Theta l_I - l_I/2, \omega(\mathfrak{c}_I) + \Theta l_I + l_I/2). \end{cases}$$

Лемма 8. *Для любых $M = m - 1 \in \mathbb{N}$ и $\mu > 0$ существует постоянная*

$$N = N(n, \theta, m, \mu) \geqslant 1$$

со следующим свойством: если $f \in W^{m,1}(X_I)$, $\gamma_0 f = 0$ на части $\{\omega(x') = x_n\}$ границы ∂X_I и

$$f(x)/\rho(x) \geqslant \mu l_I^{-n-1} \int_{Y_I} |f| \, dy$$

для почти всех $x \in X_I$ со свойством $\rho(x) = x_n - \omega(x') \leqslant \mu l_I$, то

$$\operatorname{osq}_1^{M,N} \omega(2I) \int_{Y_I} |f| \, dy \leqslant N l_I^{m+1} \int_{X_I} |\nabla^m f| \, dx.$$

Доказательство. Аффинные замены координат дают, что лемму достаточно доказать для фиксированного $I \in \mathcal{D}$ с ребром $l_I = 1$ и функций с $\omega(\mathfrak{c}_I) = 0$ и $\int_{Y_I} |f| \, dy = 1$.

Предположим, что лемма неверна. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ существуют θ-липшицева функция ω_N и функция $f_N \in W^{m,1}(X_I[\omega_N])$ со свойствами

$$\omega_N(\mathfrak{c}_I) = 0,$$
$$\gamma_0 f_N = 0 \quad \text{на} \quad \{\omega_N(x') = x_n\},$$
$$\frac{f_N(x)}{\rho_N(x)} \geqslant \mu \int_{Y_I} |f_N|\,dy = \mu \text{ для п.в. } x \in X_I[\omega_N] \text{ с } \rho_N(x) = x_n - \omega_N(x') \leqslant \mu,$$
$$\operatorname{osq}_1^{M,N} \omega_N(2I) > N \int_{X_I[\omega_N]} |\nabla^m f_N|\,dx. \tag{42}$$

Пусть $F_N \in \mathbb{P}^n_M$ — многочлен из интегрального представления Соболева функции f_N относительно вписанного в Y_I шара. Из $\int_{Y_I} |f_N|\,dy = 1$ следует, что последовательность (F_N) ограничена в $\mathbb{P}^n_M$. Как в доказательстве теоремы 2, существуют последовательность $N_1 < N_2 < \cdots$, θ-липшицева функция ω и многочлен $F \in \mathbb{P}^n_M$ такие, что при $k \to \infty$

$$\|\omega - \omega_{N_k}\|_{L^\infty(3I)} \to 0,$$
$$\int_{Y_I} |F - F_{N_k}|\,dy \to 0,$$
$$\|f_{N_k} - F\|_{L^1(K)} \to 0 \text{ для любого } K \Subset X_I,$$
$$\int_{3I} |F_{N_k}(\xi, \omega_{N_k}(\xi))|\,d\xi \to 0.$$

Отсюда $F(\xi, \omega(\xi)) = 0$ на $3I$. Выделяя из (f_{N_k}) подпоследовательность, которая почти всюду в X_I сходится к F, получаем $F(x) \geqslant \mu\rho(x)$ для $x \in X_I$ с $\rho(x) \leqslant \mu$. Поэтому $\inf_{\xi\in 2I} D_n F(\xi, \omega(\xi)) > 0$. Это свойство приводится к противоречию с оценкой (42) так же, как в конце доказательства теоремы 2.

Полученное противоречие доказывает лемму 8 от противного. □

Теорема 5. *Пусть даны липшицева функция* $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, *целое* $m \geqslant 2$ *и* $1 < p < \infty$. *Тогда равносильны следующие четыре условия.*

(i) *Существует* $C > 0$ *такое, что*

$$(\forall \beta_I \in \mathbb{R}) \quad \sum_{I\in\mathcal{D}} l_I^{n-mp} \operatorname{osc}_1^{m-1} \omega(2I)^p |\beta_I|^p \leqslant C \sum_{I\in\mathcal{D}} l_I^{n-mp+p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p.$$

(ii) *Для некоторого билипшицева гомеоморфизма* $g = \mathfrak{g}^{-1} : \mathbb{R}^n_+ \to \Omega$

$$(\forall f \in W^{m,p}(\Omega)) \quad f \circ g \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+),$$
$$(\forall f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)) \quad f \circ \mathfrak{g} \in W^{m,p}(\Omega).$$

(iii) *Для некоторого билипшицева гомеоморфизма* $g = \mathfrak{g}^{-1} : \mathbb{R}^n_+ \to \Omega$

$$(\forall f \in W^{m,p}_{\gamma_0}(\Omega)) \quad f \circ g \in W^{m,p}_{\gamma_0}(\mathbb{R}^n_+),$$
$$(\forall f \in W^{m,p}_{\gamma_0}(\mathbb{R}^n_+)) \quad f \circ \mathfrak{g} \in W^{m,p}_{\gamma_0}(\Omega).$$

(iv) *Для некоторого билипшицева гомеоморфизма* $\mathfrak{g} : \Omega \to \mathbb{R}^n_+$

$$(\forall f \in W^{m,p}_{\gamma_0}(\mathbb{R}^n_+)) \quad f \circ \mathfrak{g} \in W^{m,p}_{\gamma_0}(\Omega).$$

Критерий (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $W^{m,p}$-распрямляемости известен [31] для билипшицевых C^∞-диффеоморфизмов со свойством (41). Эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (iii) можно назвать критерием $W^{m,p}$-распрямляемости с нулевым следом.

Билипшицевы гомеоморфизмы сохраняют [43, теорема 2.2.2] пространство Соболева $W^{1,p}$, поэтому композиции $f \circ g$ и $f \circ \mathfrak{g}$ в условиях (ii)–(iv) имеют смысл как функции класса $W^{1,p}$, а аналоги условий (ii)–(iv) для пространств $W^{1,p}$ тривиально выполняются.

Доказательство. Пусть верно условие (i). По теореме 2.7 в [31] имеет место условие (ii) с заменой $W^{m,p}$ на $F^m_{p,q}$ ($q \in (0,\infty]$ любое). Пространство $F^m_{p,q}(\Omega)$ определяется как сужение на Ω пространства Лизоркина–Трибеля $F^m_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, которое при $q=2$ совпадает с пространством Соболева $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ по теореме 2.3.3 в [40]. Теорема 3 в [6, гл. 6] показывает, что сужение $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ на Ω идентично пространству $W^{m,p}(\Omega)$, что доказывает условие (ii).

Пусть верно условие (ii) и $f \in W^{m,p}_{\gamma_0}(\Omega)$. Равенство $\gamma_0 f = 0$ означает, что

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0 \quad \& \quad \lim_{k\to\infty} \|\gamma_0 f_k\|_{L^p(\partial\Omega)} = 0$$

для некоторой последовательности $(f_k) \subset C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Очевидно, что

$$(f_k \circ g) \subset C(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \quad \& \quad \lim_{k\to\infty} \|f \circ g - f_k \circ g\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} = 0.$$

Гомеоморфизм g индуцирует билипшицев гомеоморфизм $\partial\mathbb{R}^n_+ \to \partial\Omega$ и изоморфизм $L^p(\partial\mathbb{R}^n_+) \to L^p(\partial\Omega)$. Отсюда

$$\lim_{k\to\infty} \|\gamma_0(f_k \circ g)\|_{L^p(\partial\mathbb{R}^n_+)} = 0 \quad \& \quad f \circ g \in W^{m,p}_{\gamma_0}(\mathbb{R}^n_+).$$

Случай композиции $f \circ \mathfrak{g}$ аналогичен. Условие (iii) доказано.

Очевидно, что (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Пусть имеет место (iv). По определению билипшицевости

$$(\exists \vartheta \geqslant 1)\ (\forall x, y \in \Omega) \quad |x-y|/\vartheta \leqslant |\mathfrak{g}(x) - \mathfrak{g}(y)| \leqslant \vartheta |x-y|.$$

Если $f_k \to f$ в $W^{m,p}_{\gamma_0}(\mathbb{R}^n_+)$ и $f_k \circ \mathfrak{g} \to F$ в $W^{m,p}_{\gamma_0}(\Omega)$ при $k \to \infty$, то $f_k \circ \mathfrak{g} \to f \circ \mathfrak{g}$ в $W^{1,p}(\Omega)$ и поэтому $f \circ \mathfrak{g} = F$. В силу теоремы о замкнутом графике

$$(\exists C > 0)\ (\forall f \in W^{m,p}_{\gamma_0}(\mathbb{R}^n_+)) \quad \|f \circ \mathfrak{g}\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leqslant C \|f\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Для любого $I \in \mathcal{D}$

$$\operatorname{diam} \mathfrak{g}(X_I) \leqslant \vartheta \operatorname{diam} X_I \leqslant c_1(n,\theta,\vartheta) l_I,$$
$$\inf_{y \in Y_I} \mathfrak{g}(y)_n = \inf_{y \in Y_I} \operatorname{dist}(\mathfrak{g}(y), \partial\mathbb{R}^n_+) \geqslant \inf_{y \in Y_I} \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)/\vartheta \geqslant c_2(n,\theta,\vartheta) l_I.$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{c_1\sqrt{\theta^2+1}\,\vartheta} \wedge \frac{c_2}{2\vartheta},\\
c_3 &= \frac{c_2}{2c_1} \quad \left(\leqslant \frac{1}{2\vartheta^2}\right),\\
c_4 &= \frac{2c_1\sqrt{1-c_3^2}}{1-\sqrt{1-c_3^2}},\\
c_5 &= \frac{2c_1}{1-\sqrt{1-c_3^2}},\\
x_I &= (\mathfrak{c}_I, \omega(\mathfrak{c}_I)),\\
y_I &= \lim_{t\downarrow 0} \mathfrak{g}(x_I + t e_n),\\
z_I &= y_I - c_4 l_I e_n.
\end{aligned}$$

Имеем $2c_1 + c_4 = c_5$. Элементарная геометрия показывает, что

$$
\begin{gathered}
(\forall x \in \mathbb{R}^n_+)\ (\forall y \in B(z_I, c_5 l_I) \cap \mathbb{R}^n_+) \\
y_n - x_n \geqslant c_3|x-y| \quad \Rightarrow \quad |x - z_I| \leqslant |y - z_I|.
\end{gathered} \tag{43}
$$

Возьмем невозрастающую функцию $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ со свойствами $\varphi\big|_{(-\infty, c_1+c_4]} \equiv 1$ и $\varphi\big|_{[c_5,\infty)} \equiv 0$. При $x \in \mathbb{R}^n_+$ положим

$$\Phi_I(x) = \varphi(|x - z_I|/l_I)x_n.$$

Рассмотрим семейство $(\beta_I)_{I\in\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}$ такое, что $\beta_I \neq \beta_{I'}$ для I из конечного подмножества в $\mathcal{D}$. Функция

$$f = \sum_{I\in\mathcal{D}} |\beta_I - \beta_{I'}|\Phi_I$$

принадлежит к $W^{m,p}_{\gamma_0}(\mathbb{R}^n_+)$, поэтому $f \circ \mathfrak{g} \in W^{m,p}_{\gamma_0}(\Omega)$. Пусть

$$x \in X_I \quad \& \quad \rho(x) = x_n - \omega(x') \leqslant \mu l_I \quad \& \quad y \in Y_I.$$

Ввиду $\mu \leqslant c_2/(2\vartheta)$ имеем

$$\mathfrak{g}(y)_n - \mathfrak{g}(x)_n \geqslant c_2 l_I - \vartheta \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geqslant c_2 l_I/2 = c_1 c_3 l_I \geqslant c_3|\mathfrak{g}(x) - \mathfrak{g}(y)|.$$

Если $\Phi_J(\mathfrak{g}(y)) \neq 0$, то $\mathfrak{g}(y) \in B(z_J, c_5 l_J)$. Отсюда по (43)

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{g}(x) - z_J| &\leqslant |\mathfrak{g}(y) - z_J|, \\
\rho(x) &\leqslant \sqrt{\theta^2+1}\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \leqslant \sqrt{\theta^2+1}\,\vartheta\mathfrak{g}(x)_n, \\
\mathfrak{g}(y)_n &\leqslant c_1 l_I, \\
\frac{\Phi_J(\mathfrak{g}(x))}{\rho(x)} &= \frac{\varphi(|\mathfrak{g}(x) - z_J|/l_J)\mathfrak{g}(x)_n}{\rho(x)} \\
&\geqslant \frac{\varphi(|\mathfrak{g}(y) - z_J|/l_J)\mathfrak{g}(y)_n}{\sqrt{\theta^2+1}\,\vartheta\mathfrak{g}(y)_n} \geqslant \mu l_I^{-1}\Phi_J(\mathfrak{g}(y)).
\end{aligned}
$$

Полученная оценка верна и при $\Phi_J(\mathfrak{g}(y)) = 0$, поэтому

$$
\begin{gathered}
f(\mathfrak{g}(x))/\rho(x) \geqslant \mu l_I^{-1} f(\mathfrak{g}(y)), \\
(f\circ\mathfrak{g})(x)/\rho(x) \geqslant \mu l_I^{-n-1}\int_{Y_I} f\circ\mathfrak{g}\,dy.
\end{gathered}
$$

Лемма 8 доставляет $N(n,\theta,m,\vartheta) \geqslant 1$ такое, что

$$\operatorname{osq}_1^{M,N}\omega(2I)\int_{Y_I} f\circ\mathfrak{g}\,dy \leqslant N l_I^{m+1}\int_{X_I}|\nabla^m(f\circ\mathfrak{g})|\,dx.$$

Пусть $y \in Y_I$ и $I \subset J$. Тогда $y \in X_I \subset X_J$,

$$
\begin{gathered}
|\mathfrak{g}(y) - z_J| \leqslant |\mathfrak{g}(y) - y_J| + |y_J - z_J| \leqslant (c_1 + c_4)l_J, \\
\Phi_J(\mathfrak{g}(y)) = \mathfrak{g}(y)_n \geqslant c_2 l_I, \\
f(\mathfrak{g}(y)) \geqslant c_2 l_I \sum_{J\in\mathcal{D}\colon I\subset J}|\beta_J - \beta_{J'}| \geqslant c_2 l_I|\beta_I|, \\
\int_{Y_I} f\circ\mathfrak{g}\,dy \geqslant c_2 l_I^{n+1}|\beta_I|, \\
\sum_{I\in\mathcal{D}} l_I^{n-mp}\operatorname{osq}_1^{M,N}\omega(2I)^p|\beta_I|^p \leqslant (N/c_2)^p\sum_{I\in\mathcal{D}} l_I^{n-np}\left(\int_{X_I}|\nabla^m(f\circ\mathfrak{g})|\,dx\right)^p
\end{gathered}
$$

$$\leqslant c_6(n,\theta,m,p,\vartheta)\|f\circ\mathfrak{g}\|^p_{W^{m,p}(\Omega)}$$
$$\leqslant c_6C^p\|f\|^p_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Предпоследняя оценка проверена в доказательстве теоремы 4 с помощью неравенства Гёльдера и теоремы Фубини. Для $|\gamma|\leqslant m$ и $x\in\mathbb{R}^n_+$ аналогично

$$|D^\gamma\Phi_I(x)|\leqslant c_7(n,m,\varphi)l_I^{-|\gamma|+1}\leqslant c_7l_I^{-m+1},$$
$$|D^\gamma f(x)|\leqslant c_7\sum_{I\colon x\in\operatorname{supp}\Phi_I}l_I^{-m+1+\varepsilon/p}|\beta_I-\beta_{I'}|\cdot l_I^{-\varepsilon/p}\quad(\varepsilon=1/2),$$
$$|D^\gamma f(x)|^p\leqslant c_8(n,\theta,m,p,\vartheta,\varphi)x_n^{-\varepsilon}\sum_{I\colon x\in\operatorname{supp}\Phi_I}l_I^{-mp+p+\varepsilon}|\beta_I-\beta_{I'}|^p,$$
$$\|f\|^p_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)}\leqslant\binom{n+m}{n}c_8\sum_{I\in\mathcal{D}}l_I^{-mp+p+\varepsilon}|\beta_I-\beta_{I'}|^p\int_{\operatorname{supp}\Phi_I}x_n^{-\varepsilon}\,dx$$
$$\leqslant c_9(n,\theta,m,p,\vartheta,\varphi)\sum_{I\in\mathcal{D}}l_I^{n-mp+p}|\beta_I-\beta_{I'}|^p,$$

поскольку

$$\left(\sum_{I\colon x\in\operatorname{supp}\Phi_I}l_I^{-\varepsilon/(p-1)}\right)^{p-1}\leqslant c(n,\theta,p,\vartheta)x_n^{-\varepsilon}.$$

Предыдущий абзац показывает, что

$$\sum_{I\in\mathcal{D}}l_I^{n-mp}\operatorname{osq}_1^{M,N}\omega(2I)^p|\beta_I|^p\leqslant c_6c_9C^p\sum_{I\in\mathcal{D}}l_I^{n-mp+p}|\beta_I-\beta_{I'}|^p.$$

Для произвольных семейств (β_I) это неравенство устанавливается предельным переходом. Отсюда условие (i) выводится так же, как в теореме 3. Конкретнее, мы получаем оценки

$$\operatorname{osc}_1^{m-1}\omega(2I)\leqslant c(n,m,N)l_I^m\Biggl\{1+\sum_{J\in\mathcal{D}\colon I\subset J}l_J^{-m}\operatorname{osq}_1^{M,N}\omega(2J)\Biggr\},$$
$$\operatorname{osc}_1^{m-1}\omega(2I)^p\leqslant c(n,m,p,N)l_I^{mp}\Biggl\{1+\sum_{J\in\mathcal{D}\colon I\subset J}l_I^{-\varepsilon}l_J^{\varepsilon-mp}\operatorname{osq}_1^{M,N}\omega(2J)^p\Biggr\},$$
$$\sum_{I\in\mathcal{D}}l_I^{n-mp}\operatorname{osc}_1^{m-1}\omega(2I)^p|\beta_I|^p\leqslant c(n,m,p,N)\{A_1+A_2+A_3\},$$

где

$$A_1=\sum_{I\in\mathcal{D}}l_I^n|\beta_I|^p,$$
$$A_2=\sum_{I,J\in\mathcal{D}\colon I\subset J}l_I^{n-\varepsilon}l_J^{\varepsilon-mp}\operatorname{osq}_1^{M,N}\omega(2J)^p|\beta_J|^p,$$
$$A_3=\sum_{I,J\in\mathcal{D}\colon I\subset J}l_I^{n-\varepsilon}l_J^{\varepsilon-mp}\operatorname{osq}_1^{M,N}\omega(2J)^p|\beta_I-\beta_J|^p,$$

и мажорируем величины A_i через $\sum_{I\in\mathcal{D}}l_I^{n-mp+p}|\beta_I-\beta_{I'}|^p$.

Импликация (iv) $\Rightarrow$ (i) и теорема 5 доказаны. $\square$

References

[1] M. Baran, W. Pleśniak, *Bernstein and van der Corput-Schaake type inequalities on semi-algebraic curves*, Stud. Math., **125**:1 (1997), 83–96. Zbl 0895.41011

[2] B. Bojanov, N. Naidenov, *Exact Markov-type inequalities for oscillating perfect splines*, Constructive Approximation, **18**:1 (2002), 37–59. Zbl 0996.41004

[3] L. Bos, P. Milman, *Tangential Markov inequalities on singular varieties*, Indiana Univ. Math. J., **55**:1 (2006), 65–73. Zbl 1103.41012

[4] A. Brudnyi, *Bernstein type inequalities for quasipolynomials*, J. Approximation Theory, **112**:1 (2001), 28–43. Zbl 0998.41004

[5] V.I. Burenkov, *Sobolev's integral representation and Taylor's formula*, Proc. Steklov Inst. Math., **131** (1974), 33–38. Zbl 0313.46032

[6] V.I. Burenkov, *Sobolev spaces on domains*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1998. Zbl 0553.41015

[7] G. David, S. Semmes, *Singular integrals and rectifiable sets in R^n. Au-delà des graphes lipschitziens*, Astérisque, **193**, Société Mathématique de France, Montrouge, 1991. Zbl 0743.49018

[8] S.L. Ehdel'shtejn, *Sharp (with respect to the order of the highest exponent) estimate of the derivative of a power quasipolynomial in $L_2[0,1]$*, Math. Notes, **35**:4 (1984), 289–295. Zbl 0553.41015

[9] T. Erdélyi, J. Szabados, *On a generalization of the Bernstein-Markov inequality*, Algebra Anal., **14**:4 (2002), 36–53. Zbl 1039.41008

[10] T. Erdélyi, *George Lorentz and inequalities in approximation*, Algebra Anal., **21**:3 (2009), 1–57. Zbl 1203.41001

[11] T. Erdélyi, *Markov-type inequalities for products of Müntz polynomials revisited*, in N.K. Govil (ed.) et al., *Progress in approximation theory and applicable complex analysis. In memory of Q.I. Rahman*, Springer, Cham, 2017, 19–39. Zbl 1369.41015

[12] E. Fabes, O. Mendez, M. Mitrea, *Boundary layers on Sobolev-Besov spaces and Poisson's equation for the Laplacian in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **159**:2 (1998), 323–368. Zbl 0930.35045

[13] Ch. Fefferman, R. Narasimhan, *Bernstein's inequality on algebraic curves*, Ann. Inst. Fourier, **43**:5 (1993), 1319–1348. Zbl 0842.26013

[14] L. Gendre, *Inégalités de Markov tangentielles locales sur les courbes algébriques singulières de $\mathbb{R}^n$*, Ann. Pol. Math., **86**:1 (2005), 59–77. Zbl 1112.41009

[15] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order. 2nd ed.*, Springer, Berlin etc., 1983. Zbl 0562.35001

[16] L.A. Harris, *A proof of Markov's theorem for polynomials on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **368**:1 (2010), 374–381. Zbl 1194.41043

[17] D. Jerison, C.E. Kenig, *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **130**:1 (1995), 161–219. Zbl 0832.35034

[18] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, Reading, 1965. Zbl 0193.34701

[19] V.G. Maz'ya, T.O. Shaposhnikova, *Multipliers in spaces of differentiable functions*, Tr. Semin. S.L. Soboleva, **1** (1979), 37–90. Zbl 0467.42012

[20] V.G. Maz'ya, T.O. Shaposhnikova, *On the regularity of the boundary in the L_p-theory of elliptic boundary value problems. I*, Tr. Semin. S.L. Soboleva, **2** (1980), 39–56. Zbl 0472.35044

[21] V.G. Maz'ya, T.O. Shaposhnikova, *On boundary regularity in L_p-theory of elliptic boundary value problems. II*, Tr. Semin. S.L. Soboleva, **1** (1981), 57–102. Zbl 0532.35025

[22] V.G. Maz'ya, T.O. Shaposhnikova, *Theory of multipliers in spaces of differentiable functions*, Pitman, Boston etc., 1985. Zbl 0645.46031

[23] V.G. Maz'ya, T.O. Shaposhnikova, *Theory of Sobolev multipliers. With applications to differential and integral operators*, Springer, Berlin, 2009. Zbl 1157.46001

[24] H.N. Mhaskar, *A Markov-Bernstein inequality for Gaussian networks*, in D.H. Mache (ed.) et al., *Trends and applications in constructive approximation. Papers of the 4th IBoMAT meeting*, Birkhäuser, Basel, 2005, 165–180. Zbl 1077.41011

[25] J. Nečas, *On the domains of type $\mathfrak{N}$*, Czech. Math. J., **12**:2 (1962), 274–287. Zbl 0106.27001

[26] J. Nečas, *Direct methods in the theory of elliptic equations*, Springer, Berlin, 2012. Zbl 1246.35005

[27] S.M. Nikol'skii, *Bernstein inequality for algebraic polynomials on manifolds described by trigonometric polynomials*, Acta Sci. Math., **60**:3–4 (1995), 581–588. Zbl 0873.41008

[28] A.I. Parfenov, *A discrete norm on a Lipschitz surface and the Sobolev straightening of a boundary*, Sib. Adv. Math., **18**:4 (2008), 258–274. Zbl 1249.46027

[29] A.I. Parfenov, *A criterion for straightening of a Lipschitz surface in the Lizorkin-Triebel sense. I*, Sib. Adv. Math., **20**:2 (2010), 83–127. Zbl 1249.46028

[30] A.I. Parfenov, *A criterion for the straightening of a Lipschitz surface in the Lizorkin-Triebel sense. II*, Sib. Adv. Math., **20**:3 (2010), 201–216. Zbl 1249.46029

[31] A.I. Parfenov, *A criterion for straightening a Lipschitz surface in the Lizorkin-Triebel sense. III*, Sib. Adv. Math., **21**:2 (2011), 100–129. Zbl 1249.46030

[32] A.I. Parfenov, *A characterization of multipliers in the Hedberg-Netrusov spaces*, Sib. Adv. Math., **22**:1 (2012), 13–40. Zbl 1249.46031

[33] A.I. Parfenov, *A weighted a priori estimate in straightenable domains of local Lyapunov–Dini type*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **9** (2012), 65–150. Zbl 1330.35090

[34] A.I. Parfenov, *Criterion for the Sobolev well-posedness of the Dirichlet problem for the Poisson equation in Lipschitz domains. I*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **17** (2020), 2142–2189. Zbl 1459.35102

[35] W. Pleśniak, *Inégalité de Markov en plusieurs variables*, Int. J. Math. Math. Sci., **2006**:14 (2006), Article ID 24549. Zbl 1153.41302

[36] N. Roytwarf, Y. Yomdin, *Bernstein classes*, Ann. Inst. Fourier, **47**:3 (1997), 825–858. Zbl 0974.30524

[37] I.B. Simonenko, *Certain estimates for power quasipolynomials*, Mat. Sb., **100(142)**:1(5) (1976), 89–101. Zbl 0341.41010

[38] V.I. Skalyga, *V.A. Markov's theorems in normed spaces*, Izv. Math., **72**:2 (2008), 383–412. Zbl 1155.41004

[39] L. Tartar, *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, Springer, Berlin, 2007. Zbl 1126.46001

[40] H. Triebel, *Interpolation theory. Function spaces. Differential operators*, Deutscher Verlag des Wissenschaften, Berlin, 1978. Zbl 0387.46033

[41] H. Triebel, *Theory of function spaces II*, Birkhäuser Verlag, Basel etc., 1992. Zbl 0763.46025

[42] K. Włodarczyk, *Bernstein's theorem for polynomial maps of complex topological vector spaces*, Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A, **99** (1985), 329–331. Zbl 0581.46040

[43] W.P. Ziemer, *Weakly differentiable functions. Sobolev spaces and functions of bounded variation*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1989. Zbl 0692.46022

Anton Igorevich Parfenov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: parfenov@math.nsc.ru