S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 20, №1, стр. 245–250 (2023) УДК 510.6
DOI 10.33048/semi.2023.20.019 MSC 03B45

ПРЕДТАБЛИЧНОСТЬ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ СВОЙСТВО КРЕЙГА НАД МИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКОЙ

Л.Л.МАКСИМОВА, В.Ф.ЮН

Abstract. In this paper [1] the tabularity problem was solved and all pre-tabular extensions of the minimal logic were described. In total, there turned out to be seven pre-tabular logics over the minimal logic.

In this article, we will prove that four of them have the Craig's interpolation property CIP and two do not have. The question of CIP in the seventh logic is still open.

Keywords: minimal logic, tabularity, pre-tabular logic, interpolation problem.

1. Введение

Статья посвящена проблеме интерполяции над минимальной логикой J Йохансона [2]. Более точно — мы рассматриваем интерполяционное свойство Крейга [3] в предтабличных логиках.

Проблема интерполяции подробно изучена для класса суперинтуиционистских логик, которые составляют подкласс класса J-логик. В [4] описаны все суперинтуиционистские логики с интерполяционным свойством Крейга CIP и доказана разрешимость этого свойства над интуиционистской логикой Int. При этом оказалось, что существуют точно восемь суперинтуиционистских логик со свойством CIP, включая тривиальную логику For. При переходе к более широкому классу J-логик картина существенно усложняется. Отметим кроме

Maksimova, L.L., Yun, V.F., Pretabularity and Craig's interpolation problem over the minimal logic.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0011.

Поступила 1 января 2022 г., опубликована 13 марта 2023 г.

того, что для каждой индивидуальной логической системы проблема интерполяции является серьезной задачей: каждая логика, для которой доказывается или опровергается CIP, требует тщательного исследования.

В [1] доказано, что проблема табличности разрешима над J, т.е. существует алгоритм, который для любой конечно аксиоматизируемой логики, содержащей J, устанавливает, является ли эта логика табличной. Напомним, что логика называется табличной, если она характеризуется некоторой конечной моделью.

Для решения проблемы табличности над минимальной логикой потребовалось описание предтабличных логик над J. Логика является предтабличной, если она не является табличной, но все ее собственные расширения табличны.

В [1] описаны все предтабличные логики над минимальной логикой, их оказалось семь. Там же найдены их аксиоматизация и семантическая характеризация.

В этой статье мы докажем, что четыре из семи предтабличных логик обладают интерполяционным свойством Крейга CIP, и две не имеют CIP. Вопрос об интерполяционном свойстве Крейга CIP в седьмой логике остается пока открытым.

2. Предварительные сведения

Язык логики J содержит в качестве исходных связок &, $\vee$, $\to$, $\bot$, $\top$; отрицание определяется как сокращение: $\neg A = A \to \bot$; $(A \leftrightarrow B) = (A \to B)\&(B \to A)$. Формула называется *позитивной*, если она не содержит вхождений константы $\bot$. Логика J может быть задана исчислением, которое имеет те же самые схемы аксиом, что и позитивное интуиционистское исчисление Int^+, и единственное правило вывода modus ponens: $A, A \to B \ / \ B$.

Под J-*логикой* мы понимаем любое множество формул, содержащее все аксиомы исчисления J и замкнутое относительно modus ponens и правила подстановки. Если A – произвольная формула, через $L + A$ обозначаем наименьшую логику, содержащую $L \cup \{A\}$. Обозначаем

$$\mathrm{Int} = \mathrm{J} + (\bot \to p),\ \mathrm{Cl} = \mathrm{Int} + (p \vee \neg p),\ \mathrm{Neg} = \mathrm{J} + \bot,\ \mathrm{Gl} = \mathrm{J} + (p \vee \neg p),$$
$$\mathrm{LC} = \mathrm{Int} + ((p \to q) \vee (q \to p)),\ \mathrm{NC} = \mathrm{Neg} + ((p \to q) \vee (q \to p)),$$
$$\mathrm{NE} = \mathrm{Neg} + (p \vee (p \to q)).$$

Логика называется *нетривиальной*, если она не совпадает с множеством всех формул For. *Суперинтуиционистской логикой* (с.и.л.) называется J-логика, содержащая интуиционистскую логику Int, а *негативной* – J-логика, содержащая логику Neg.

Пишем $\Gamma \vdash_L A$, если формула A выводима из $L \cup \Gamma$ посредством правила modus ponens: $B, B \to C / \ C$.

В [5] введена классификация J-логик с помощью слоев, продолжающая классификацию суперинтуиционистских логик, предложенную Хосои [6]. Обозначим

$$\pi_0 = p_0,\ \pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \pi_n).$$

Говорим, что L есть логика $(n+1)$-*го слоя*, $n \geq 0$, если $L \vdash \pi_{n+1}$ и $L \nvdash \pi_n$; For — это единственная логика нулевого слоя. L — логика *конечного слоя*, если $L \vdash \pi_n$ для некоторого n, и логика *бесконечного слоя* в противном случае.

Заметим, что все слои непусты и попарно не пересекаются.

В [5] доказано, что любая конечнослойная J-логика финитно аппроксимируема, т.е. характеризуется некоторым классом конечных моделей. Характеризация J-логик бесконечного слоя также найдена в [5].

Если $\mathbf{p}$ - список переменных, то через $A(\mathbf{p})$ обозначаем формулу, все переменные которой входят в $\mathbf{p}$, а через $\mathcal{F}(\mathbf{p})$ - множество всех таких формул.

Говорим, что логика L обладает *интерполяционным свойством Крейга CIP* [3, 7], если она удовлетворяет условию (где списки $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ попарно не пересекаются):

CIP. Если $\vdash_L A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to B(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, то существует такая формула $C(\mathbf{p})$, что $\vdash_L A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to C(\mathbf{p})$ и $\vdash_L C(\mathbf{p}) \to B(\mathbf{p}, \mathbf{r})$.

Формула $C(\mathbf{p})$ называется *интерполянтом.*

Напомним, что логика называется *табличной*, если она характеризуется некоторой конечной моделью. Логика называется *предтабличной*, если она не является табличной, но все ее собственные расширения табличны. Известно, что логика над J является табличной, если и только если она не содержится ни в одной из предтабличных логик.

Следующая теорема дает аксиоматизацию предтабличных J-логик:

Теорема 2.1. [1] *Существуют точно семь предтабличных логик над* J*, а именно:*

- *три предтабличные логики над* Int*:*
  $\mathrm{PJ1} = \mathrm{LC} = \mathrm{Int} + ((p \to q) \lor (q \to p))$,
  $\mathrm{PJ2} = \mathrm{LP}_2 = \mathrm{Int} + \pi_2$,
  $\mathrm{PJ3} = \mathrm{LQ}_3 = \mathrm{Int} + \pi_3 + (\neg p \lor \neg\neg p)$,
- *две предтабличные логики над* Neg*:*
  $\mathrm{PJ4} = \mathrm{NC} = \mathrm{Neg} + ((p \to q) \lor (q \to p))$,
  $\mathrm{PJ5} = \mathrm{NP}_2 = \mathrm{Neg} + \pi_2$,
- $\mathrm{PJ6} = \mathrm{J} + \pi_2 + (\bot \to \pi_1) + (p \lor \neg p)$,
- $\mathrm{PJ7} = \mathrm{J} + \pi_2 + (\bot \to \pi_1) + \neg\neg(\bot \to p) + (\neg p \lor \neg\neg p)$.

3. Алгебраическая семантика

Алгебраическая семантика минимальной логики строится с помощью так называемых J-*алгебр*, то есть алгебр $\mathbf{A} =< A; \&, \lor, \to, \bot, \top >$, удовлетворяющих условиям:

$< A; \&, \lor, \to, \bot, \top >$ есть решетка относительно $\&, \lor$ с наибольшим элементом $\top$,

$z \leq x \to y \iff z \& x \leq y$,

$\bot$ — произвольный элемент в A.

J-алгебра называется *негативной алгеброй*, если $\bot$ — наибольший элемент множества A.

Если B — формула, $\mathbf{A}$ — алгебра, то говорим, что *в* $\mathbf{A}$ *общезначима формула* B, и пишем $\mathbf{A} \models B$, если тождество $B = \top$ выполняется в $\mathbf{A}$.

Известно [9], что класс всех J-алгебр образует многообразие (то есть может быть задан системой тождеств [10]), и существует взаимно однозначное соответствие между логиками, содержащими логику J, и многообразиями J-алгебр. Для любой J-логики L через $V(L)$ обозначается многообразие J-алгебр, в которых общезначимы все формулы из L. Говорим, что логика L порождается алгеброй $\mathbf{A}$, и обозначаем эту логику через $L\mathbf{A}$, если L есть множество формул, общезначимых в $\mathbf{A}$.

Каждой логике $L \in E(\mathrm{J})$ соответствует многообразие J-алгебр

$$V(L) = \{\mathbf{A} | \mathbf{A} \models L\}.$$

Любая логика характеризуется многообразием $V(L)$. Широко известна

Теорема 3.1 (Теорема о полноте)**.** [9], [11] *Пусть L – J-логика. Тогда $L+A \vdash B$ если и только если для любой алгебры $\mathbf{A} \in V(L)$ из $\mathbf{A} \models A$ следует $\mathbf{A} \models B$.*

Напомним [12], что J-алгебра $\mathbf{A}$ является подпрямо неразложимой тогда и только тогда, когда она имеет опремум, т.е. наибольший элемент в множестве $\mathbf{A} - \{\top\}$. Алгебра $\mathbf{A}$ финитно неразложима, если удовлетворяет условию:

$$x \vee y = \top \Rightarrow (x = \top \text{ или } y = \top).$$

По известной теореме Биркгофа (см., напр. [10]) любое многообразие порождается классом своих подпрямо неразложимых алгебр.

Для произвольной негативной алгебры $\mathbf{A}$ (в соответствии с [13]) через $\mathbf{A}^{\Lambda}$ будем обозначать новую J-алгебру, полученную добавлением к $\mathbf{A}$ нового наибольшего элемента $\top = \top_{\mathbf{A}^{\Lambda}}$. Таким образом $\bot_{\mathbf{A}^{\Lambda}} = \bot_{\mathbf{A}} = \top_{\mathbf{A}}$ становится опремумом алгебры $\mathbf{A}^{\Lambda}$, и сама алгебра $\mathbf{A}^{\Lambda}$ является подпрямо неразложимой. Очевидно, что для любого $x \in \mathbf{A}^{\Lambda}$: $x \in \mathbf{A} \iff x \leq \bot$.

Для произвольной негативной логики L_1 обозначим через $L_1 \uparrow \mathrm{Cl}$ логику, характеризующуюся всеми алгебрами вида $\mathbf{A}^{\Lambda}$, где $\mathbf{A} \models L_1$. Через $L_1 \Uparrow \mathrm{Cl}$ будем обозначать логику, которая характеризуется классом алгебр вида $\mathbf{A}^{\Lambda}$, где $\mathbf{A}$ — финитно неразложимая алгебра из $V(L_1)$ [13].

Известно, что

Предложение 3.2. [14, 15] *Для любой негативной логики L_1:*

$$L_1 \uparrow \mathrm{Cl} = \mathrm{Gl} + \{\bot \to A |\ A \in L_1\},$$

$$L_1 \Uparrow \mathrm{Cl} = (L_1 \uparrow \mathrm{Cl}) + ((\bot \to A \vee B) \to (\bot \to A) \vee (\bot \to B)),$$

Если $L_1 = \mathrm{Neg} + Ax$, то $L_1 \uparrow \mathrm{Cl} = \mathrm{Gl} + \{\bot \to A |\ A \in Ax\}$.

4. Предтабличность и интерполяционное свойство Крейга

Рассмотрим позитивный фрагмент предтабличной с.и.л. LP_2 – логику $\mathrm{LP}_2^+ = \mathrm{Int}^+ + \pi_2 = \mathrm{J}^+ + \pi_2$. В [12] доказано, что не смотря на то, что логика LP_2 обладает CIP, позитивная логика LP_2^+ не имеет CIP (теорема 4.4).

Рассмотрим теперь негативные логики, т.е. J-логики, содержащие формулу $\bot$. Любая негативная логика в некотором смысле эквивалентна своему позитивному фрагменту. Для любой формулы A обозначим через $A^{\#}$ результат замены константы $\bot$ формулой $(p \to p)$. Так как $\mathrm{Neg} \vdash \bot \leftrightarrow (\mathrm{p} \to \mathrm{p})$, справедлива

Лемма 4.1. *Для любой системы аксиом Ax и формулы A:*

$$\mathrm{Neg} + Ax \vdash A \iff \mathrm{Int}^+ + Ax^{\#} \vdash A^{\#}.$$

Если Ax – множество позитивных формул и A – позитивная формула, то

$$\mathrm{Neg} + Ax \vdash A \iff \mathrm{Int}^+ + Ax \vdash A.$$

Кроме того, имеет место следующая теорема:

Теорема 4.2. [12] *Если Ax — множество позитивных формул, то эквивалентны следующие условия:*
(1) $\mathrm{J} + Ax$ *имеет CIP;*
(2) $\mathrm{J} + \bot + Ax$ *имеет CIP;*
(1) $\mathrm{J}^{+} + Ax$ *имеет CIP.*

Из этой теоремы с учетом леммы 4.1 и отсутствия CIP у логики LP_2^{+} непосредственно вытекает

Предложение 4.3. *Предтабличная логика* $\mathrm{PJ5} = \mathrm{NP}_2 = \mathrm{Neg}{+}\pi_2$ *не обладает интерполяционным свойством Крейга.*

Напомним, что $\mathrm{PJ6} = \mathrm{J} + \pi_2 + (\bot \to \pi_1) + (p \vee \neg p)$. Докажем следующее предложение

Предложение 4.4. $\mathrm{PJ6} = \mathrm{NE} \uparrow \mathrm{Cl}$.

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{PJ6} = \mathrm{Gl} + (\bot \to \pi_1) + \pi_2$ и $\mathrm{NE} = \mathrm{Neg} + \pi_1$.

По предложению 3.2 имеем $\mathrm{NE} \uparrow \mathrm{Cl} = \mathrm{Gl}{+}(\bot \to \pi_1)$. След-но, $\mathrm{NE} \uparrow \mathrm{Cl} \subseteq \mathrm{PJ6}$.

Докажем, что $\mathrm{PJ6} \subseteq \mathrm{NE} \uparrow \mathrm{Cl}$. Для этого по теореме 3.1 достаточно доказать, что если алгебра $\mathbf{A}$ удовлетворяет логике $\mathrm{NE} \uparrow \mathrm{Cl}$, то она удовлетворяет π_2.

Если алгебра $\mathbf{A}$ удовлетворяет логике $\mathrm{NE} \uparrow \mathrm{Cl}$ и $\mathbf{A}$ подпрямо неразложима, то она имеет вид $\mathbf{B}^{\Lambda}$, где $\mathbf{B} \models \mathrm{NE}$ (см., например [13], [14]). Так как $\mathrm{NE} = \mathrm{Neg} + \pi_1$, то $\mathbf{B} \models \pi_1$. Из определения алгебры $\mathbf{B}^{\Lambda}$ и формул π_1, π_2 таким образом следует, что $\mathbf{B}^{\Lambda} \models \pi_2$ и утверждение доказано.

□

В [13] описаны все расширения логики Gl, обладающие интерполяционным свойством Крейга:

Теорема 4.5. *Логика L над* Gl *имеет CIP тогда и только тогда, когда она находится в следующем списке логик:*

For, NE, NC, Neg, Cl, NE∩Cl, NC∩Cl, Neg∩Cl, $(\mathrm{NE} \Uparrow \mathrm{Cl})$, $\mathrm{NC} \cap (\mathrm{NE} \Uparrow \mathrm{Cl})$, $\mathrm{Neg} \cap (\mathrm{NE} \Uparrow \mathrm{Cl})$, $(\mathrm{NE} \uparrow \mathrm{Cl})$, $\mathrm{NC} \cap (\mathrm{NE} \Uparrow \mathrm{Cl})$, $\mathrm{Neg} \cap (\mathrm{NE} \uparrow \mathrm{Cl})$, $(\mathrm{NC} \Uparrow \mathrm{Cl})$, $\mathrm{Neg} \cap (\mathrm{NC} \Uparrow \mathrm{Cl})$, $(\mathrm{NC} \uparrow \mathrm{Cl})$, $\mathrm{Neg} \cap (\mathrm{NC} \Uparrow \mathrm{Cl})$, $(\mathrm{NC} \uparrow \mathrm{Cl})$, $\mathrm{Neg} \cap (\mathrm{NC} \uparrow \mathrm{Cl})$, $(\mathrm{Neg} \Uparrow \mathrm{Cl})$, $\mathrm{Gl} = (\mathrm{Neg} \uparrow \mathrm{Cl})$.

Как было отмечено, существует в точности семь предтабличных расширений минимальной логики PJ1 − −PJ7 [1].

Вопрос о CIP в логике PJ7 остается пока открытым. Для остальных предтабличных логик верна следующая

Теорема 4.6. *Логики* PJ1, PJ2, PJ4, PJ6 *имеют интерполяционное свойство Крейга CIP; логики* PJ3, PJ5 *не имеют CIP.*

Доказательство. В [4] описаны все суперинтуиционистские логики с интерполяционным свойством Крейга CIP. Логика PJ1 находится среди с.и.л. с CIP. То же верно и для логики PJ2, так как $\mathrm{PJ2} = \mathrm{LP}_2$ может быть аксиоматизирована следующим образом:

$\mathrm{LP}_2 = \mathrm{Int} + (p \vee (p \to q \vee \neg q))$.

Логика PJ3 не находится среди всех с.и.л. с CIP, поэтому не обладает интерполяционным свойством Крейга [4].

В [12] описаны все негативные логики с CIP. Логика $\mathrm{PJ4} = \mathrm{NC}$ находится среди них, поэтому обладает интерполяционным свойством Крейга.

Отсутствие CIP в логике PJ5 следует из доказанного выше предложения 4.3.

По предложению 4.4 $\mathrm{PJ6} = \mathrm{NE} \uparrow \mathrm{Cl}$, то есть логика PJ6 совпадает с одной из логик со свойством CIP, перечисленных в теореме 4.5. Следовательно PJ6 имеет CIP. $\square$

References

[1] L.L. Maksimova, V.F.Yun, *The tabularity problem over the minimal logic*, Sib. Math. J., **57**:6 (2016), 1034–1043. Zbl 1420.03024

[2] I. Johansson, *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*, Compositio Math., **4** (1936), 119–136. JFM 62.1045.08

[3] W. Craig, *Three uses of Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory*, J. Symb. Log., **22** (1957), 269–285. Zbl 0079.24502

[4] L.L. Maksimova, *Craig's theorem in superintuitionistic logics and amalgamable varieties of pseudoboolean algebras*, Algebra Logika, **16**:6 (1977), 643–681. Zbl 0403.03047

[5] L.L. Maksimova, V.F. Yun, *Layers over minimal logic*, Algebra Logic, **55**:4 (2016), 295–305. Zbl 1396.03067

[6] T. Hosoi, *On intermediate logics I*, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. Ia, **14** (1967), 293–312. Zbl 0188.31602

[7] L.L. Maksimova, *Craig's interpolation theorem and amalgamable varieties*, Sov. Math., Dokl., **18** (1978), 1550–1553. Zbl 0393.03013

[8] D.M. Gabbay, L. Maksimova, *Interpolation and definability. Modal and intuitionistic logics*, Clarendon Press, Oxford, 2005. Zbl 1091.03001

[9] W. Rautenberg, *Klassische und nichtklassische Aussagenlogik*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1979. Zbl 0424.03007

[10] A.I. Mal'cev, *Algebraic systems*, Akademie-Verlag Berlin, 1973. Zbl 0266.08001

[11] S. Odintsov, *Constructive negations and paraconsistency*, Trends in Logic–Studia Logica Library, **26**, Springer, Dordrecht, 2008. Zbl 1161.03014

[12] L.L. Maksimova, *Implicit definability and positive logics*, Algebra Logic, **42**:1 (2003), 37–53. Zbl 1034.03008

[13] L. Maksimova, *Interpolation and definability over the logic Gl*, Stud. Log., **99**:1-3 (2011), 249–267. Zbl 1254.03069

[14] L.L. Maksimova, *Interpolation and definability in extensions of the minimal logic*, Algebra Logic, **44**:6 (2005), 407–421. Zbl 1106.03023

[15] S. Odintsov, *Logic of classic refutability and class of extensions of minimal logic*, Log. Log. Philos., **9** (2001), 91–107. Zbl 1034.03027

Larisa L'vovna Maksimova
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: lmaksi@math.nsc.ru

Veta Fedorovna Yun
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: yun@math.nsc.ru