S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 20, №1, стр. 251–261 (2023) УДК 517.95
DOI 10.33048/semi.2023.20.020 MSC 35B40, 34M05, 35J05

О РАВНОМЕРНЫХ АСИМПТОТИКАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МЕРОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК

М. В. Коровина, О. А. Матевосян

Abstract. We consider the problem of obtaining asymptotics for solutions of differential operators in a neighborhood of an irregular singular point; more precisely, the construction of uniform asymptotics for solutions of linear differential equations with second-order meromorphic coefficients in a neighborhood of a singular point. Examples are also given that confirm the relevance of the results obtained in the theory of equations of mathematical physics.

Keywords: Second-order differential operator; meromorphic coefficients; singular points.

1. Введение

Одним из фундаментальных разделов теории дифференциальных уравнений математической физики является задача построения асимптотик решений уравнений второго порядка в окрестностях регулярных и иррегулярных особых точек. Проблема построения асимптотик решений общих краевых задач для эллиптических и параболических уравнений в областях, граница которых содеожит конечное число конических точек, рассмотрены в работах Кондратьева [4, 5], где решения рассматриваются в специальных пространствах функций, имеющих производные, суммируемые с некоторыи весом. Эти пространства хорошо улавливают основную особенность решений таких задач, состоящую в том, что решение является гладким всюду, кроме конических точек, а при

Korovina, M. V., Matevossian, H. A., On uniform asymptotics of solutions of second-order differential equations with meromorphic coefficients in a neighborhood of singular points.

Received April, 15, 2022, published March, 9, 2023.

приближении к конической точке производные имеют степенные особенности. Кроме того, показано также, что для любого линейного дифференциального уравнения с регулярной особой точкой асимптотики решения являются *конормальными*. Полученные в указанных работах результаты позволяют строить асимптотики решений дифференциальных уравнений в частных производных в окрестности регулярной особенности, а также получать асимптотики решения уравнения Лапласа, определенного на многообразии с конической особенностью.

Одной из первых работ, положивших начало систематическому изучению проблем о построении асимптотик решений в окрестности бесконечности, которая вообще говоря является иррегулярной особой точкой, была работа Томэ [20], где для частного случая показано, что асимптотики решения расматриваемой задачи представимы в виде формальных степенных рядов.

В общей постановке задача построения асимптотик решений в окрестности иррегулярной особой точки для дифференциальных уравнений была сформулирована Пуанкаре в [14], [15], а также был рассмотрен частный случай этой проблемы, когда иррегулярной особой точкой является бесконечность. В этих работах было доказано, что полученные формальные расходящиеся ряды являются асимптотическими рядами.

Метод суммирования подобных асимптотических рядов, основанный на преобразовании Лапласа–Бореля и понятии ресургентной функции, был впервые введен Ж. Экалем [1]. Этот метод в дальнейшем применялся в работах Б.-В. Шульце, Б.Ю. Стернина и В.Е. Шаталова для исследования вырождающихся уравнений, получающихся при рассмотрении эллиптических уравнений на многообразиях с изолированными особенностями типа клюва, а также для построений асимптотик уравнений с малым параметром. В некоторых случаях им в весовых пространствах Соболева удалось для уравнений с параметром и уравнений с вырождением типа клюва построить асимптотики решений [17], [18], [19].

Дифференциальные уравнения второго порядка с особыми точками используются в различных областях механики. Например, оператор Лапласа, записанный в сферических координатах, имеет особую точку в нуле [7]. Кроме того, уравнение второго порядка этого типа используется для решения плоской задачи нахождения напряженно-деформированного состояния тела прямоугольного поперечного сечения с цилиндрической полостью при движении идеальной несжимаемой жидкости [16]. В этом случае возникают уравнения с нерегулярной особой точкой. Другой пример уравнения второго порядка с особой точкой - DPE (уравнение профиля плотности) изучались в [2, 3].

Отметим также работы [11]–[13], в которых получены конормальные асимптотики решений эллиптических операторов. Полученные асимптотические представления в весовых пространствах Соболева использовались при исследовании основных краевых задач для эллиптических уравнений и систем.

В этой статье рассматривается задача о получении асимптотик решений дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности иррегулярной особой точки. А именно, сначала мы строим асимптотики решений для произвольных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с мероморфными коэффициентами. Далее, рассматриваются различные примеры дифференциальных уравнений математической физики.

Заметим, что [8] равномерные асимптотики построены для широкого класса дифференциальных уравнений, однако существуют уравнения шестого и выше порядка, для которых асимптотики решений в окрестности бесконечности до сих пор не построены.

Заметим также, что задача построения равномерной асимптотики решения задачи для волнового оператора ранее рассматривалась в [9], [10]. В данной статье та же задача приводится в качестве примера для иллюстрации применения основного результата статьи — теоремы 1.

2. Определения и вспомогательные утверждения

Обозначим через $S_{R,\varepsilon}$ сектор $S_{R,\varepsilon} = \{r| -\varepsilon < \arg r < \varepsilon, |r| < R\}$.

Определение 1. *Будем говорить, что аналитическая на $S_{R,\varepsilon}$ функция f имеет не более чем k -экспоненциальный рост, если существуют неотрицательные постоянные C и α такие, что в секторе $S_{R,\varepsilon}$ выполнено неравенство*

$$|f| < Ce^{\alpha \frac{1}{|r|^k}}.$$

Обозначим через $E_k(S_{R,\varepsilon})$ пространство голоморфных функций в области $S_{R,\varepsilon}$ и k-экспоненциальный рост в нуле; $E(\tilde{\Omega}_{R,\varepsilon})$ – пространство функций экспоненциального роста в области $\tilde{\Omega}_{R,\varepsilon}$, и $E(C)$ – пространство целых функций.

Если ε может быть выбран любым из $0 < \varepsilon \leq 2\pi$, то будем обозначать это пространство через $E_k(S_R)$; $E_k(S_R, L_2(S^1))$ –пространство функций экспоненциального роста при $r \to 0$ со значениями из $L_2(S^1)$.

Определение 2. *k-преобразованием Лапласа–Бореля функции $f(r) \in E_k(S_{R,\varepsilon})$ называется отображение $B_k : E_k(S_{R,\varepsilon}) \to E(\tilde{\Omega}_{R,\varepsilon})/E(C)$, такое что*

$$B_k f = \int_0^{r_0} e^{-p/r^k} f(r) \frac{dr}{r^{k+1}}.$$

Обратное k-преобразование Лапласа–Бореля определяется формулой

$$B_k^{-1} \tilde{f} = \frac{k}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} e^{p/r^k} \tilde{f}(p)\, dp.$$

Контур $\tilde{\gamma}$ изображен на рис. 1 в [10].

Заметим, что для k-преобразования Лапласа–Бореля верны формулы

$$B_k \circ \left(-\frac{1}{k} r^{k+1} \frac{\partial}{\partial r}\right) f(r) = pB_k f, \quad \frac{\partial}{\partial p} \circ B_k f = -B_k \left(\frac{1}{r^k} f(r)\right).$$

Определение 3. *Функция $\tilde{f}$ называется бесконечно-продолжимой, если для любого числа R существует такое дискретное множество точек Z_R в C, что функция $\tilde{f}$ аналитически продолжается из первоначальной области определения вдоль любого пути длины меньше R, не проходящего через Z_R.*

Определение 4. *Элемент f пространства $E_k(S_{R,\varepsilon})$ называется k-ресургентной функцией, если его k-преобразование Лапласа–Бореля $\tilde{f} = B_k f$ является бесконечно-продолжимым.*

3. Основные результаты

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^2 u + a_1(r)\left(\frac{d}{dr}\right) u + a_0(r)u = 0, \tag{1}$$

где функции $a_1(r), a_0(r)$ разлагаются в ряды Лорана

$$a_1(r) = r^{-m}\sum_{j=0}^{\infty} b_j r^j, \quad a_0(r) = r^{-k}\sum_{j=0}^{\infty} c_j r^j;$$

выберем числа m, $k \in Z$ так, чтобы выполнялось условие $b_0 \neq 0$, $c_0 \neq 0$; точка $r = 0$, вообще говоря, является особой точкой уравнения (1).

Построим асимптотики решения уравнения (1) в окрестности нуля. Перепишем уравнение (1) в виде

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^2 u + r^{-m}\sum_{j=0}^{\infty} b_j r^j\left(\frac{d}{dr}\right) u + r^{-k}\sum_{j=0}^{\infty} c_j r^j u = 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Все асимптотики решения уравнения* (2) *в пространствах функций экспоненциального роста представимы в виде:*

1. *Пусть $k > 2m$. Если $k > 2$, то*

(i) при $k = 2n+1$, $n = 1, 2...$, асимптотика решения уравнения (2) *имеет вид*

$$\begin{aligned} &u(r) \approx \exp\left(\tfrac{p_1}{r^{n-\frac{1}{2}}} + \sum_{i=1}^{2n-2}\tfrac{\alpha_i^1}{r^{n-\frac{i}{2}-\frac{1}{2}}}\right) r^{\sigma_1}\sum_{i=0}^{\infty} b_i^1 r^{\frac{i}{2}} + \\ &+\exp\left(\tfrac{p_2}{r^{n-\frac{1}{2}}} + \sum_{i=1}^{2n-2}\tfrac{\alpha_i^2}{r^{n-\frac{i}{2}-1}}\right) r^{\sigma_2}\sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 r^{\frac{i}{2}}, \\ &u(r) \in E_{n-\frac{1}{2}}(S_R); \end{aligned}$$

(ii) при $k = 2n$, $n = 2, 3, ..$

$$\begin{aligned} &u(r) \approx \exp\left(\tfrac{p_1}{r^{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-2}\tfrac{\alpha_i^1}{r^{n-1-i}}\right) r^{\sigma_1}\sum_{i=0}^{\infty} b_i^1 r^i + \\ &+\exp\left(\tfrac{p_2}{r^{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-2}\tfrac{\alpha_i^2}{r^{n-i-1}}\right) r^{\sigma_2}\sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 r^i, \\ &u\left(r\right) \in E_{n-1}\left(S_R\right), \end{aligned}$$

где p_1, p_2 являются корнями многочлена

$$H_0(p) = p^2 + \left(\frac{1}{\frac{k}{2}-1}\right)^2 c_0;$$

(iii) при $k = 2$ или $k = 1, m = 0, -1...,$ асимптотики решения являются конормальными.

(iv) при $k \leq 0$, решение голоморфно.

2. *Пусть $k < 2m$.*

(i) Если $m > 1$, то асимптотика решения имеет вид

$$\begin{aligned} &u \approx \exp\left(\sum_{i=2}^{m-1}\tfrac{\alpha_i^1}{r^{m-i}}\right)\sum_{i=0}^{\infty} b_i^1 r^i + r^{\sigma}\exp\left(-\tfrac{p_2}{r^{m-1}} + \sum_{i=2}^{m-1}\tfrac{\alpha_i^2}{r^{m-i}}\right)\sum_{i=0}^{\infty} A_i^2 r^i, \\ &u(r) \in E_{m-1}\left(S_R\right); \end{aligned}$$

здесь $p_2 = b_0/(m-1)$.

(ii) Если $m = 1$, то асимптотика является конормальной.
(iii) Если $m < 1$, то решение голоморфно.
***3.** Пусть $k = 2m$.*
(i) Если $m = 1$, то асимптотики решения конормальны.
(ii) Если $m > 1$, и если корни p_1, p_2 многочлена

$$H_0(p) = p^2 - \frac{b_0}{m-1}p + c_0\left(\frac{1}{m-1}\right)^2$$

не совпадают, то асимптотика имеет вид

$$u(r) \approx r^{\sigma_1}\exp\left(-\tfrac{p_1}{r^{m-1}} + \sum_{i=2}^{m-1}\tfrac{\alpha_i^1}{r^{m-i}}\right)\sum_{i=0}^{\infty} b_i^1 r^i +$$
$$+ r^{\sigma_2}\exp\left(-\tfrac{p_2}{r^{m-1}} + \sum_{i=‘2}^{m-1}\tfrac{\alpha_i^2}{r^{m-i}}\right)\sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 r^i.$$

(iii) Если $p_1 = p_2 = \alpha$, то залача сводится к предыдущим случаям.

Здесь через $\sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i$, $j = 1, 2$ обозначены соответствующие асимптотические ряды, α_i^j, $\sigma_j, j = 1, 2., i = 1, ..., n-2.$ некоторые постоянные.

Замечание 1. *Решения уравнения* (1) *(или* (2)*) являются ресургентными функциями* [6].

4. Примеры

В этом разделе мы проиллюстрируем применение Теоремы 1 как к дифференциальным ураненииям второго порядка, так и к основным операторам математической физики.

Пусть $\Omega \subset R^n-$ область с гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим через $Q = \Omega\times(t \geq 0)$-цилиндр, в котором лежат точки $(x, t) \in R^{n+1}$.

4.1. **Построение асимптотик решений уравнений 2-го порядка с мероморфными коэффициентами в окрестности бесконечности.** Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 u + a^0(t)\left(\frac{d}{dt}\right)u + c^0(t)u = 0; \tag{3}$$

здесь функции $a^0(t), c^0(t)$ имеют полюса на бесконечности, то есть во внешности круга $|t| > R$ функции $a^0(t), c^0(t)$ можно разложить в ряды Лорана

$$a^0(t) = t^m\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_j}{t^j}, \quad c^0(t) = t^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{c_j}{t^j}.$$

Выберем $m \in Z,\ k \in Z$ так, что $a_0 \neq 0$, $c_0 \neq 0$. Построим асимптотики решения уравнения (3) при $t \to \infty$. Сделаем замену $t = 1/r$, и после элементарных преобразований, получим

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{d}{dr}\right)^2 v(r) + 2r^{-1}\left(\tfrac{d}{dr}\right) + \\ &+ r^{-m-2}\sum_{j=0}^{\infty} a_j r^j\left(\tfrac{d}{dt}\right)v(r) + r^{-k-4}\sum_{j=0}^{\infty} c_j r^j v(r) = 0,\end{aligned} \tag{4}$$

то есть, асимптотики решения уравнения (4) строются по Теореме 1.

4.2. **Волновое уравнение.** Рассмотрим волновое уравнение

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 u(x,t) - a^0(t)\Delta u(x,t) = 0 \tag{5}$$

с граничным условием Робена

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)|_{\partial\Omega} = 0; \tag{6}$$

здесь $\alpha(x) \geq 0, \beta(x) \geq 0$, $\alpha(x) \not\equiv 0, \alpha(x)+\beta(x) > 0, x \in \partial\Omega$, функция $a^0(t) \geq 0$ голоморфна в окрестности бесконечности или имеет полюс на бесконечности, то есть существует такая внешность круга $|t| > R$, что функция $a^0(t)$ разлагаются в ней в ряд Лорана

$$a^0(t) = t^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{t^j}, \tag{7}$$

где $k \in Z$, причем k всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось условие $a_0 \neq 0$. Если $k \leq 0$, то ряд (7) в окрестности бесконечности является рядом Тейлора.

Построим асимптотики решения задачи (5), (6) при $t \to \infty$ в пространстве функций экспоненциального роста. Используя метод разделения переменных, будем искать решение в виде $u(x,t) = Y(x)v(t)$, получим систему уравнений

$$\Delta Y(x) + \lambda Y(x) = 0, \tag{8}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 v(t) + a^0(t)\lambda v(t) = 0 \tag{9}$$

и граничное условие

$$\left(\alpha Y + \beta \tfrac{\partial Y}{\partial n}\right)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{10}$$

Обозначим через λ_n собственные значения оператора, соответствующего задаче (8), (10), а через $Y_n(x)$ ее собственные функции.

Так как $\alpha(x) \geq 0, \alpha(x) \not\equiv 0$, то $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (8), (10).

Лемма 1. *Все асимптотики решений уравнения* (9) *в пространствах функций экспоненциального роста при $t \to \infty$ имеют следующий вид:*

1. *Пусть $k_1 = k + 4 > 2$. Тогда при $k = 2n_1 + 1$, $n_1 = -1, 0, ...,$ асимптотика решения уравнения* (9) *в пространстве функций экспоненциального роста имеет вид*

$$\begin{aligned} v(t) &\approx \exp\left(p_1 t^{n_1+\frac{3}{2}} + \sum_{i=1}^{2n-2} \alpha_i^1 t^{n_1-\frac{i}{2}+\frac{3}{2}}\right) t^{-\sigma_1} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^1 t^{-\frac{i}{2}} + \\ &+ \exp\left(p_2 t^{n_1+\frac{3}{2}} + \sum_{i=1}^{2n-2} \alpha_i^2 t^{n_1-\frac{i}{2}+\frac{3}{2}}\right) t^{-\sigma_2} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 t^{-\frac{i}{2}}, \\ v(t) &\in E_{n_1+\frac{3}{2}}(S_R). \end{aligned}$$

***2.** При $k = 2n_1$, $n_1 = 0, 1, ...$, асимптотика решения уравнения (9) в пространстве функций экспоненциального роста имеет вид*

$$v(t) \approx \exp\left(p_1 t^{n_1+1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^1 t^{n_1+1-i}\right) t^{-\sigma_1} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^1 t^{-i} +$$
$$+ \exp\left(p_2 t^{n_1+1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 t^{n_1+1-i}\right) t^{-\sigma_2} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 t^{-i},$$
$$v(t) \in E_{n_1+1}(S_R),$$

где p_1, p_2 являются корнями многочлена

$$H_0(p) = p^2 + \left(\frac{1}{\frac{k_1}{2} - 1}\right)^2 \lambda a_0.$$

При условии $k_1 = k + 4 \leq 2$ асимптотика решения будет конормальной.

Теперь мы можем построить общее решение для задачи (5), (6). Обозначим через $v_j(t)$ решение уравнения (9) при $\lambda = \lambda_j$.

Утверждение 1. *Все асимптотки решений задачи (5), (6) в пространстве экспоненциально растущих функций в окрестности бесконечности по t представимы в виде линейной комбинации функций*

$$u_j(x,t) \approx v_j(t) Y_{\lambda_j}(x),$$

где $u_j(x,t) \in E_{k_j}(S_R, L_2(\Omega))$, $j = 0, 1, ...$

4.3. Асимптотики решения уравнения Гельмгольца.

4.3.1. *Асимптотики решения уравнения Гельмгольца на бесконечности.* Оператор Лапласа запишем в полярных координатах

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) u + \lambda u = 0. \tag{11}$$

Очевидно, что это уравнение имеет две особые точки $\rho = 0$ и $\rho = \infty$. Но, в точке $\rho = 0$, уравнение (11) имеет регулярную особенность. Отсюда следует, что асиптотики решения этого уравнение в окрестности $\rho = 0$ являются *конормальными.*

Следовательно, мы будем строить асимптотики решений уравнения (11) в окрестности бесконечности, то есть при $\rho \to \infty$.

Разделим переменные

$$u(\rho, \varphi) = V(\rho) G(\varphi).$$

Получим уравнение для функции $G(\varphi)$

$$-G''(\varphi) = \mu G(\varphi),\ G(\varphi) = G(\varphi + 2\pi). \tag{12}$$

Решение уравнения (12) имеет вид:

$$G_k(\varphi) = C_1 \cos k\varphi + C_2 \sin k\varphi, \quad k \in Z,\ \sqrt{\mu} = k. \tag{13}$$

Отсюда следует, что $\mu = k^2$ собственное значение задачи (12), которому соответствует собственная функция (13). Уравнение для функции $V(\rho)$ имеет вид

$$\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right)^2 V(\rho) + \lambda\rho^2 V(\rho) - \mu V(\rho) = 0. \tag{14}$$

Заметим, что точка $\rho = 0$ является регулярной особой точкой уравнения (14), а бесконечность иррегулярной.

Лемма 2. *Пусть* $\lambda \neq 0$. *Все асимптотики решений уравнения* (14) *в пространстве функций экспоненциального роста в окрестности бесконечности имеют вид*

$$V(\rho) \approx \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\exp(\lambda_1 \rho) \sum_{i=0}^{\infty} A_i^1 \rho^{-i} + \exp(\lambda_2 \rho) \sum_{i=0}^{\infty} A_i^2 \rho^{-i} \right); \tag{15}$$

здесь через $\lambda_i, i = 1, 2$ *обозначены корни многочлена* $p^2 + \lambda$, *а через* $\sum_{i=0}^{\infty} A_i^j x^i$ *соответствующие асимптотические ряды.*

Пусть $\lambda = 0$, *тогда асимптотики решений уравнения является конормальной.*

Обозначим через $V_k(\rho)$ решение уравнения (14) где $\mu = k^2$.

Утверждение 2. *Решение уравнения* (11) *предтавимо в виде линейных комбинаций функций*

$$u_k(\rho, \varphi) = G_k(\varphi) V_k(\rho).$$

4.3.2. *Асимптотики решения уравнения Гельмгольца в n-мерном пространстве.* Рассмотрим уравнение Гельмгольца в n- мерном пространстве.

$$\left(\frac{1}{\rho^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \Delta_\theta \right) u + \lambda u = 0; \tag{16}$$

здесь Δ_θ - оператор Лаплпса–Бельтрами.

Применим метод разделения переменных к уравнению (16)

$$u(\rho, \theta) = V(\rho) G(\theta),$$

получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\left(\rho \tfrac{d}{d\rho} \right)^2 V(\rho) + (n-2) \rho \tfrac{\partial}{\partial \rho} V(\rho) + \lambda \rho^2 V(\rho) = \mu V(\rho), \\ &\Delta_\theta G(\theta) = \mu G(\theta), \end{aligned}$$

где через μ обозначено собственное значение оператора Лаплпса–Бельтрами. Особыми точками уравнения (16) являются точка $\rho = 0$ и бесконечность. Очевидно, что в окрестности нуля асимптотика решения будет конормальной. Для построения асимптотик решений в окрестности бесконечности , как и выше сделаем замену $\rho = 1/r$, и после элементарных преобразований при $\lambda \neq 0$ получаем асимптотика решения вида

$$V(\rho) \approx \rho^{\frac{3-n}{2}} \left(\exp\left(\frac{\lambda_1}{\rho} \right) \sum_{i=0}^{\infty} A_i^1 \rho^i + \exp\left(\frac{\lambda_2}{\rho} \right) \sum_{i=0}^{\infty} A_i^2 \rho^i \right);$$

здесь через $\lambda_i, i = 1, 2$ обозначены корни многочлена.

Если $\lambda = 0$, то асимптотика является *конормальной.*

4.3.3. *Асимптотики решения уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом при младшем члене.* Рассмотрим уравнение Гельмгольца с переменным коэффициентом при младшем члене:

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)u+\lambda a(\rho)u=0, \tag{17}$$

где

$$a(\rho)=\rho^{-k}\sum_{j=0}^{\infty}a_j\rho^j.$$

Ищем решение в виде

$$u(\rho,\varphi)=V(\rho)G(\varphi).$$

Уравнение для функции $V(\rho)$:

$$\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right)^2V(\rho)+\lambda a(\rho)\rho^2V(\rho)-\mu V(\rho)=0. \tag{18}$$

Введем обозначения $k_1=k+2$, $k_0=\max(4,k_1)$.

1. Если $k\neq 2$ и так как $4>2m$, то из Теоремы 1 следует, что асимптотики решения имеют вид:

i) при $k_0=2n+1$, $n=1,2...$, асимптотика решения функции $V(\rho)$ имеет вид

$$\begin{aligned}&V(\rho)\approx\exp\left(\tfrac{p_1}{\rho^{n-\frac12}}+\sum_{i=1}^{2n-2}\tfrac{\alpha_i^1}{\rho^{n-\frac{i}{2}-\frac12}}\right)\rho^{\sigma_1}\sum_{i=0}^{\infty}b_i^1\rho^{\frac{i}{2}}+\\&+\exp\left(\tfrac{p_2}{\rho^{n-\frac12}}+\sum_{i=1}^{2n-2}\tfrac{\alpha_i^2}{\rho^{n-\frac{i}{2}-1}}\right)\rho^{\sigma_2}\sum_{i=0}^{\infty}b_i^2\rho^{\frac{i}{2}},\\&V(\rho)\in E_{n-\frac12}(S_R);\end{aligned} \tag{19}$$

ii) при $k_0=2n$, $n=2,3,..$,

$$\begin{aligned}&V(\rho)\approx\exp\left(\tfrac{p_1}{\rho^{n-1}}+\sum_{i=1}^{n-2}\tfrac{\alpha_i^1}{\rho^{n-1-i}}\right)\rho^{\sigma_1}\sum_{i=0}^{\infty}b_i^1\rho^{i}+\\&+\exp\left(\tfrac{p_2}{R^{n-1}}+\sum_{i=1}^{n-2}\tfrac{\alpha_i^2}{\rho^{n-i-1}}\right)\rho^{\sigma_2}\sum_{i=0}^{\infty}b_i^2\rho^{i},+\\&V(\rho)\in E_{n-1}(S_R),\end{aligned} \tag{20}$$

где p_1, p_2 являются корнями многочлена

$$H_0(p)=p^2+\left(\frac{1}{\frac{k_0}{2}-1}\right)^2c_0;$$

здесь $c_0=\lambda a_0$ при условии $k_1>4$ и $c_0=\mu$.

2. Пусть $k=2$ при $\lambda a_0\neq\mu$ асимптотика имеет вид (20).

Выберем k_0 так, чтобы $a_1\neq 0$. Тогда из Теоремы 1 следует, что при $k_0=1$ асимптотика строится по формуле (19).

Если $k_0\leq 0$, то асимптотика решения является *конормальной*.

Лемма 3. *Пусть $k\neq 2$. Тогда асимптотика решения уравнения* (17) *определяется по формуле* (19)*, если $k_0=2n+1$, $n=1,2...$, и по формуле* (20)*, если $k_0=2n$, $n=1,2....$*

Пусть $k=2$ и $\lambda a_0=\mu$. Тогда при $k_0=1$ асимптотика строится по формуле (19)*. Во всех остальных случаях асимптотика решения является* ***конормальной***.

Обозначим через $V_k(x)$ решение уравнения (17), где $\mu = k^2$. Тогда для асимптотики решения уравнения (17) справедливо Утверждение 2.

Замечание 2. *Для построения асимптотик решения уравнения Лапласа на многообразиях с изолированными особыми точками применяется Теорема 1.*

References

[1] J. Ecalle, *Cinq applications des fonctions resurgentes*, Prepub. Math. d'Orsay, **62**, 1984.

[2] F. dell'Isola, H. Gouin, P. Seppecher, *Radius and surface tension of microscopic bubbles by second gradient theory*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. II, Fasc., **320**:5 (1995), 211–216. Zbl 0833.76004

[3] F. dell'Isola, H. Gouin, G. Rotoli, *Nucleation of spherical shell-like interfaces by second gradient theory: Numerical simulations*, Eur. J. Mech., **15**:4 (1996), 545–568. Zbl 0887.76008

[4] V.A. Kondrat'ev, *Boundary value problems for parabolic equations in closed domains*, Tr. Mosk. Mat. O-va, **15** (1966), 400–451. Zbl 0161.08402

[5] V.A. Kondrat'ev, *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Tr. Mosk. Mat. O-va, **16** (1967), 209–292. Zbl 0162.16301

[6] M.V. Korovina, *Existence of resurgent solutions for equations with higher-order degeneration*, Differ. Equ., **47**:3 (2011), 346–354. Zbl 1233.35103

[7] M.V. Korovina, *Asymptotics of solutions of partial differential equations with higher degenerations and the Laplace equation on a manifold with a cuspidal singularity*, Differ. Equ., **49**:5 (2013), 588–598. Zbl 1277.35116

[8] M. Korovina. *Asymptotics of solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely distant point*, MDPI Mathematics, **8**:12 (2020), No 2249.

[9] M.V. Korovina, O.A. Matevosyan, I.N. Smirnov, *On the asymptotics of solutions of the wave operator with meromorphic coefficients*, Math. Notes, **109**:2 (2021), 312–316. Zbl 1468.35019

[10] M.V. Korovina, H.A. Matevossian, I.N. Smirnov, (2021) *Uniform asymptotics of solutions of the wave operator with meromorphic coefficients*, Applicable Analysis, DOI: 10.1080/00036811.2021.1949455

[11] H.A. Matevossian, *On the Steklov–type biharmonic problem in unbounded domains*, Russ. J. Math. Phys., **25**:2 (2018), 271–276. Zbl 1401.31016

[12] H.A. Matevossian, *On the polyharmonic Neumann problem in weighted spaces*, Complex Var. Elliptic Equ., **64**:1 (2019), 1–7. Zbl 1409.35074

[13] H.A. Matevossian, *Asymptotics and uniqueness of solutions of the elasticity system with the mixed Dirichlet–Robin boundary conditions*, MDPI Mathematics, **8**:12 (2020), No 2241.

[14] H. Poincaré, *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires*, Acta Math., **8** (1886), 295–344. JFM 18.0273.02

[15] H. Poincaré, *Analysis of the mathematical and natural works of Henri Poincaré*. Selected Works: Mathematics. Theoretical Physics, **3**. Nauka, Moscow, 1974. Zbl 0526.01033

[16] G. Sciarra, F. dell'Isola, K. Hutter, *Dilatational and compacting behavior around a cylindrical cavern leached out in a solid–fluid elastic rock salt*, Int. J. Geomechanics, **5**:3 (2005), 233–243.

[17] B.-W. Schulze, B. Sternin, V. Shatalov, *Asymptotic Solutions to Differential Equations on Manifolds with Cusps*, Preprint MPI, **96-89**, Max-Planck-Institut fur Mathematik, Bonn, 1996.

[18] B.-W. Schulze, B. Sternin, V. Shatalov, *An operator algebra on manifolds with cusp-type singularities*, Ann. Global Anal. Geom., **16**:2 (1998), 101–140. Zbl 0914.58029

[19] B.Yu. Sternin, V. E. Shatalov, *Differential equations in spaces with asymptotics on manifolds with cusp singularities*, Differ. Equ., **38**:12 (2002), 1764–1773. Zbl 1068.58014

[20] L.W. Thomé, *Zür Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Borchardt J., **74** (1872), 193–218. JFM 04.0149.01

M. V. Korovina
Lomonosov Moscow State University,
Russia, 119992, Moscow, Leninskie Gory, 1
Email address: betelgeuser@yandex.ru

Hovik A. Matevossian
1. Federal Research Center „Computer Science and Control“, Russian Academy of Sciences,
Russia, 119333, Moscow, Vavilov str., 40-42, R374;
2. Moscow Aviation Institute (National Research University),
Russia, 125993, Moscow, Volokolamskoe Shosse, 4
Email address: hmatevossian@graduate.org