S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 20, №1 стр. 262–274 (2023) УДК 519.716
DOI 10.33048/semi.2023.20.021 MSC 08A99

О ДВУХ ИНТЕРВАЛАХ В РЕШЕТКЕ ЧАСТИЧНЫХ УЛЬТРАКЛОНОВ РАНГА 2

С.А. БАДМАЕВ, А.Е. ДУГАРОВ, И.В. ФОМИНА, И.К. ШАРАНХАЕВ

Abstract. In article the intervals in the lattice of partial ultraclones of rank 2 are considered. The well-known classes of all monotone M and all self-dual S Boolean functions are partial ultraclones of rank 2. We proved that each of the intervals $\Im(M, M_2)$ and $\Im(S, M_2)$, where M_2 is complete partial ultraclone of rank 2, is finite.

Keywords: multifunction, Boolean function, monotone function, self-dual function, superposition, closed set, clone, partial ultraclone, lattice, interval of lattice.

1. Введение

Как известно, для булевых функций существует ровно 5 максимальных замкнутых классов (клонов) T_0, T_1, M, S и L [1]. В [2] доказано, что в решетке частичных клонов ранга 2 интервалы, содержащие классы T_0, T_1, M, S, являются конечными, а для L такой интервал имеет континуальную часть. В свою очередь в решетке ультраклонов ранга 2 все аналогичные интервалы конечны [3, 4]. В данной работе рассматривается обобщение этой задачи для решетки частичных ультраклонов ранга 2, которая содержит в себе решетки частичных клонов и ультраклонов. Доказано, что интервалы, содержащие M и S, имеют 14 и 17 элементов соответственно. Отметим, что интервалы для T_0 и T_1 исследованы в [3], где доказана их конечность.

Badmaev, S.A., Dugarov, A.E., Fomina, I.V., Sharankhaev, I.K. On two intervals in the lattice of partial ultraclones of rank 2.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22–21–20013, https://rscf.ru/project/22-21-20013/ и Правительства Республики Бурятия.

Поступила 29 августа 2022 г., опубликована 31 марта 2023 г.

2. Основные понятия и определения

Пусть $E = \{0,1\}$ и $F = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$P_{2,n} = \{f | f : E^n \to E\}$, $P_2 = \bigcup\limits_n P_{2,n}$;

$P^*_{2,n} = \{f | f : E^n \to E \cup \{\varnothing\}\}$, $P^*_2 = \bigcup\limits_n P^*_{2,n}$;

$P^-_{2,n} = \{f | f : E^n \to F \setminus \{\varnothing\}\}$, $P^-_2 = \bigcup\limits_n P^-_{2,n}$;

$M_{2,n} = \{f | f : E^n \to F\}$, $M_2 = \bigcup\limits_n M_{2,n}$.

Функции из P_2 называют булевыми функциями, из P^*_2 – частичными функциями на E, из P^-_2 – гиперфункциями на E, а из M_2 – мультифункциями на E. Очевидно, что $P_2 \subset P^*_2 \subset M_2$, $P_2 \subset P^-_2 \subset M_2$.

Для того, чтобы суперпозиция

$$f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)),$$

где $f, f_1, \ldots, f_n \in M_2$, определяла мультифункцию $g(x_1, \ldots, x_m)$ определим значения мультифункции f на наборах из множества F следующим образом: если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E^m$, то

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На наборах, содержащих $\varnothing$, мультифункция принимает значение $\varnothing$.

Далее мультифункцию будем называть просто функцией, если это не вызывает недоразумений.

Для любого натурального n и любого i, где $1 \le i \le n$, обозначим через $e^n_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ функцию, значения которой совпадают со значениями переменной x_i. Функции e^n_i называются проекциями или селекторными функциями.

Замыканием множества функций K называется множество всех функций, полученных из функций множества K с помощью суперпозиции, добавления и удаления фиктивных переменных. Замыкание множества K обозначается через $[K]$. Множество функций K называется замкнутым (замкнутым классом), если $K = [K]$.

Частичным ультраклоном ранга 2 (ультраклоном ранга 2, клоном) называется замкнутое множество мультифункций (гиперфункций, булевых функций), содержащее все проекции. Множество всех мультифункций M_2 называется полным частичным ультраклоном ранга 2. Далее для краткости любой частичный ультраклон ранга 2 будем называть просто частичным ультраклоном. Заметим, что любой клон и ультраклон является частичным ультраклоном.

Частичный ультраклон K называется максимальным, если не существует частичного ультраклона K' такого, что $K \subset K' \subset M_2$.

Интервалом $\Im(Q, R)$ называется частично упорядоченное по включению множество всех частичных ультраклонов, в котором любой элемент K удовлетворяет условиям $Q \subseteq K$ и $K \subseteq R$. Интервалы для наглядности изображаются в виде диаграмм, где частичные ультраклоны обозначены точками, а точка, представляющая Q_1, расположена выше и соединена отрезком с точкой, представляющей R_1, если $R_1 \subset Q_1$ и не существует частичного ультраклона P такого, что $R_1 \subset P \subset Q_1$.

Через M обозначим клон всех булевых монотонных функций, S – клон всех булевых самодвойственных функций.

Пусть R^s – s-местный предикат, заданный на множестве F. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на множестве F, сохраняет предикат R^s, если для любых наборов

$$(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{s1}), \ldots, (\alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{sn}),$$

принадлежащих предикату R^s, набор

$$(f(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}), \ldots, f(\alpha_{s1}, \ldots, \alpha_{sn}))$$

принадлежит R^s.

Для упрощения записи используется кодировка: $\{\varnothing\} \leftrightarrow *$, $\{0\} \leftrightarrow 0$, $\{1\} \leftrightarrow 1$, $\{0,1\} \leftrightarrow -$, тогда $F = \{0, 1, *, -\}$.

Мультифункцию, которая на всех наборах принимает значение $*$, будем обозначать просто $*$.

В [5] доказано, что максимальными ультраклонами ранга 2 являются только следующие 11 множеств:

1) P_2 – множество всех булевых функций;

2) T_0^- – множество функций, которые сохраняют нуль, т. е. на наборе из всех нулей функции принимают значение 0;

3) T_1^- – множество функций, которые сохраняют единицу, т. е. на наборе из всех единиц функции принимают значение 1;

4) S^- – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix};$$

5) L^- – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & - \end{pmatrix};$$

6) M^- – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 1 & - & 1 & - \end{pmatrix};$$

7) A_1 – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & - & 1 & - \\ 1 & 0 & 1 & 1 & - & - \end{pmatrix};$$

8) A_2 – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 0 & - & 0 & - \end{pmatrix};$$

9) A_3 – множество функций, сохраняющих предикат R_3, определяемый матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & 0 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & - & 1 & - & 0 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 0 & - & 1 & 1 & 0 & - & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - \end{pmatrix};$$

10) A_4 – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & - & 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & - & 0 & - & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & - & 0 & 0 & - & - & 0 & - \end{pmatrix};$$

11) A_5 – множество, состоящее из всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной, а также из функций, принимающих два значения, одно из которых есть $-$.

Из [6] известно, что в полном частичном ультраклоне ранга 2 максимальными частичными ультраклонами являются следующие 12 множеств:

1) K_1 – множество, состоящее из всех мультифункций f, принимающих на нулевом наборе либо значение 0, либо значение $*$;

2) K_2 – множество, состоящее из всех мультифункций f, принимающих на единичном наборе либо значение 1, либо значение $*$;

3) K_3 – множество, состоящее из всех мультифункций f, для которых выполняется одно из двух условий:

- $f(\tilde{0}) = *$ или $f(\tilde{1}) = *$;
- $f(\tilde{0}) = 0$ и $f(\tilde{1}) = 1$.

4) K_4 – множество, состоящее из всех мультифункций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из трех условий:

- $f(\tilde{\alpha}) = f(\bar{\tilde{\alpha}}) = -$;
- $f(\tilde{\alpha}) = f(\bar{\tilde{\alpha}}) = *$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\bar{\tilde{\alpha}})}$, где $f(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$.

5) K_5 – множество, состоящее из всех мультифункций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из двух условий:

- $f(\tilde{\alpha}) = *$ или $f(\bar{\tilde{\alpha}}) = *$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\bar{\tilde{\alpha}})}$, где $f(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$.

6) $K_6 = P_2^- \cup \{*\}$;

7) $K_7 = P_2^*$;

8) K_8 – множество всех мультифункций f, одновременно удовлетворяющих трем условиям:

- если $f(\tilde{\alpha}), f(\tilde{\beta}), f(\tilde{\gamma}) \in \{0, 1\}$, то
$$f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ – двоичные наборы такие, что $(\alpha_i \beta_i \gamma_i) \in \{(000), (001), (010), (111)\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- если существует двоичный набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = -$, то для любого двоичного набора $\tilde{\beta}$ верно $f(\tilde{\beta}) \neq 1$;

- пусть двоичные наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $\alpha_i \le \beta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, тогда, если $f(\tilde{\alpha}) = *$, то $f(\tilde{\beta}) = *$.

9) K_9 – множество всех мультифункций f, одновременно удовлетворяющих трем условиям:

- если $f(\tilde{\alpha}), f(\tilde{\beta}), f(\tilde{\gamma}) \in \{0, 1\}$, то

$$f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma}\end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\},$$

  где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ – двоичные наборы такие, что $(\alpha_i \beta_i \gamma_i) \in \{(000), (011), (101), (111)\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- если существует двоичный набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = -$, то для любого двоичного набора $\tilde{\beta}$ верно $f(\tilde{\beta}) \ne 0$;
- пусть двоичные наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $\alpha_i \le \beta_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, тогда, если $f(\tilde{\beta}) = *$, то $f(\tilde{\alpha}) = *$.

10) K_{10} – множество всех мультифункций f, сохраняющих предикат:
$R_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & - & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & - & \gamma \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & - & \delta \end{pmatrix}$, где $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)^t$ – всевозможные столбцы, в которых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{0, 1, -, *\}$ одновременно удовлетворяют двум условиям:

- в любом столбце $(\alpha\beta\gamma\delta)^t$ среди $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ как минимум два принимают значение $*$;
- в любом столбце $(\alpha\beta\gamma\delta)^t$, если среди $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ встречается 0 или 1, то все они неравны $-$.

11) K_{11} – множество всех мультифункций f, сохраняющих предикат

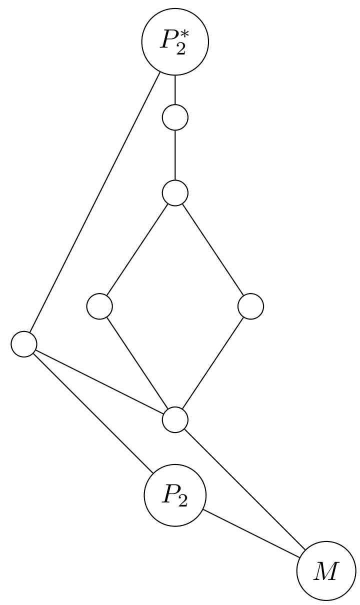
$$R_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & - & - & 0 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & - & 0 & - & * & * & * & 0 & 1 & - & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & - & 0 & 0 & - & * & * & * & * & * & * & 0 & 1 & - & * \end{pmatrix}.$$

12) K_{12} – множество всех мультифункций f, сохраняющих предикат

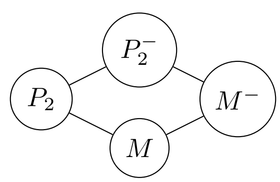
$$R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 0 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & * & * & * & 0 & 1 & - & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 1 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & 0 & 1 & - & * \end{pmatrix}.$$

3. Интервал, содержащий класс монотонных булевых функций M

Теорема 1. [2] *Интервал* $\Im(M, P_2^*)$ *содержит ровно* 9 *частичных клонов и изображен ниже.*



Теорема 2. [4] *Интервал* $\Im(M, P_2^-)$ *содержит ровно* 4 *ультраклона и изображен ниже.*



Лемма 1. *Множество* $M^- \cup \{*\}$ *является частичным ультраклоном ранга 2.*

Доказательство. Очевидно. □

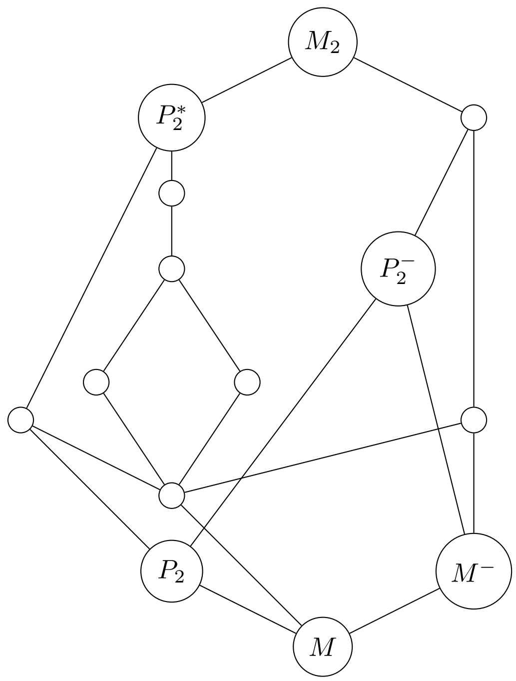
Лемма 2. *Из 12 максимальных частичных ультраклонов ранга 2 только* P_2^* *и* $P_2^- \cup \{*\}$ *содержат целиком* M.

Доказательство. Покажем, что M не является подмножеством ни одного из максимальных частичных ультраклонов ранга 2 кроме P_2^* и $P_2^- \cup \{*\}$. Для каждого такого максимального частичного ультраклона приведем пример функции f, которая принадлежит M, но не принадлежит соответствующему максимальному частичному ультраклону:

1) Для K_1: $f = (1111)$.
2) Для K_2: $f = (0000)$.
3) Для K_3: $f = (0000)$.
4) Для K_4: $f = (0000)$.
5) Для K_5: $f = (0000)$.
6) Для K_8: $f = (0111)$.
7) Для K_9: $f = (0001)$.
8) Для K_{10}: $f = (0001)$.
9) Для K_{11}: $f = (0111)$.
10) Для K_{12}: $f = (0001)$.

□

Теорема 3. *Интервал* $\Im(M, M_2)$ *содержит ровно* 14 *частичных ультраклонов и изображен ниже.*



Доказательство. Следует из теорем 1, 2 и лемм 1, 2.

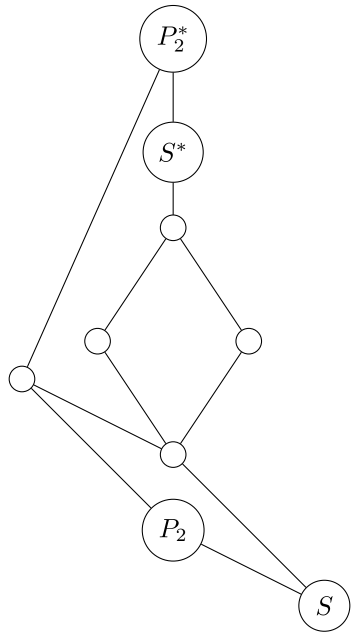
□

4. Интервал, содержащий класс самодвойственных булевых функций S

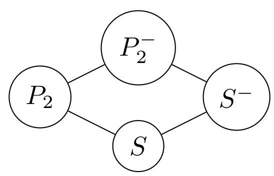
Обозначим через S^* множество частичных функций, сохраняющих предикат

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & * & * & * \\ 1 & 0 & * & * & 0 & 1 & * \end{pmatrix}.$$

Теорема 4. [2] *Интервал* $\Im(S, P_2^*)$ *содержит ровно* 9 *частичных клонов и изображен ниже.*



Теорема 5. [4] *Интервал* $\Im(S, P_2^-)$ *содержит ровно* 4 *ультраклона и изображен ниже.*



Лемма 3. *Множество* $S^- \cup \{*\}$ *является частичным ультраклоном ранга 2.*

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 4. *Из 12 максимальных частичных ультраклонов ранга 2 только* K_4, K_5, P_2^* *и* $P_2^- \cup \{*\}$ *содержат целиком* S.

Доказательство. Покажем, что S не является подмножеством ни одного из максимальных частичных ультраклонов ранга 2 кроме K_4, K_5, P_2^* и $P_2^- \cup \{*\}$. Для каждого такого максимального частичного ультраклона приведем пример функции f, которая принадлежит S, но не принадлежит соответствующему максимальному частичному ультраклону:

1) Для K_1: $f = (10)$.
2) Для K_2: $f = (10)$.
3) Для K_3: $f = (10)$.
4) Для K_8: $f = (10)$.
5) Для K_9: $f = (10)$.
6) Для K_{10}: $f = (00010111)$.
7) Для K_{11}: $f = (10)$.
8) Для K_{12}: $f = (10)$.

□

Лемма 5. *Из 12 максимальных частичных ультраклонов ранга 2 только K_4 и $P_2^- \cup \{*\}$ содержат целиком S^-.*

Доказательство. В силу леммы 4 достаточно доказать, что S^- не является подмножеством K_5 и P_2^*. Это верно, так как $f = (--) \in S^-$, но $f \notin K_5$ и $f \notin P_2^*$.

□

Следствие 1. *Верно, что $K_4 \cap P_2^- = S^-$.*

Лемма 6. *Из 12 максимальных частичных ультраклонов ранга 2 только K_5 и P_2^* содержат целиком S^*.*

Доказательство. В силу леммы 4 достаточно доказать, что S^* не является подмножеством K_4 и $P_2^- \cup \{*\}$. Это верно, так как $f = (1*) \in S^*$, но $f \notin K_4$ и $f \notin P_2^- \cup \{*\}$.

□

Лемма 7. *Для любой $f \in K_4 \setminus (S^- \cup \{*\})$ верно, что*

$$[S^- \cup \{f\}] = K_4.$$

Доказательство. С учетом леммы 5 включение $[S^- \cup \{f\}] \subseteq K_4$ очевидно. Покажем, что любая $g(x_1, \ldots, x_m) \in K_4$ может быть выражена с помощью суперпозиции гиперфункций из S^- и мультифункции $f \in K_4 \setminus (S^- \cup \{*\})$. Достаточно рассмотреть случай, когда $g(x_1, \ldots, x_m) \in K_4 \setminus (S^- \cup \{*\})$.

Обозначим через

- $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_s$ наборы, на которых значение g равно 0;
- $\widetilde{\beta}_1, \ldots, \widetilde{\beta}_l$ наборы, на которых значение g равно 1;
- $\widetilde{\gamma}_1, \ldots, \widetilde{\gamma}_t$ наборы, на которых значение g равно $-$;
- $\widetilde{\delta}_1, \ldots, \widetilde{\delta}_p$ наборы, на которых значение g равно $*$.

Тогда значение мультифункции g

- на наборах $\overline{\overline{\alpha}}_1, \ldots, \overline{\overline{\alpha}}_s$ равно 1;
- на наборах $\overline{\overline{\beta}}_1, \ldots, \overline{\overline{\beta}}_l$ равно 0;
- на наборах $\overline{\overline{\gamma}}_1, \ldots, \overline{\overline{\gamma}}_t$ равно $-$;
- на наборах $\overline{\overline{\delta}}_1, \ldots, \overline{\overline{\delta}}_p$ равно $*$.

Обозначим через $\widetilde{\eta}_1, \ldots, \widetilde{\eta}_r$ наборы, на которых значение функции f равно $*$. Тогда на наборах $\overline{\overline{\eta}}_1, \ldots, \overline{\overline{\eta}}_r$ значение f также равно $*$.

Пусть $i \in \{1, \ldots, s\}, j \in \{1, \ldots, l\}, k \in \{1, \ldots, t\}, v \in \{1, \ldots, p\}, q = \{1, \ldots, r\}$.

Построим функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_m) = f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))$, где $f_1, \ldots, f_n \in S^-$ такие, что $(f_1(\widetilde{\delta}_v), \ldots, f_n(\widetilde{\delta}_v)) = \widetilde{\eta}_q$.

Тогда $(f_1(\overline{\overline{\delta}}_v), \ldots, f_n(\overline{\overline{\delta}}_v)) = (\overline{f}_1(\widetilde{\delta}_v), \ldots, \overline{f}_n(\widetilde{\delta}_v)) = \overline{\overline{\eta}}_q$ и $\varphi(\widetilde{\delta}_v) = f(\widetilde{\eta}_q) = *$, $\varphi(\overline{\overline{\delta}}_v) = f(\overline{\overline{\eta}}_q) = *$. На остальных наборах примем значения функций f_i равными $-$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда на таких наборах λ значение

$$\varphi(\lambda) = f(-, \ldots, -) = -.$$

Таким образом, мы построили мультифункцию φ, которая на наборах $\widetilde{\delta}_v$ и $\overline{\overline{\delta}}_v$ принимает значение $*$, а на остальных наборах значение $-$.

Рассмотрим самодвойственную функцию $\psi(x_1, \ldots, x_m, y)$ такую, что
$\psi(\widetilde{\alpha}_i, 0) = 0$, $\psi(\widetilde{\alpha}_i, 1) = 0$, $\psi(\overline{\overline{\alpha}}_i, 0) = 1$, $\psi(\overline{\overline{\alpha}}_i, 1) = 1$,

$\psi(\widetilde{\beta}_j, 0) = 1$, $\psi(\widetilde{\beta}_j, 1) = 1$, $\psi(\overline{\widetilde{\beta}}_j, 0) = 0$, $\psi(\overline{\widetilde{\beta}}_j, 1) = 0$,
$\psi(\widetilde{\gamma}_k, 0) = 0$, $\psi(\widetilde{\gamma}_k, 1) = 1$, $\psi(\overline{\widetilde{\gamma}}_k, 0) = 0$, $\psi(\overline{\widetilde{\gamma}}_k, 1) = 1$.
Покажем, что $\psi(x_1, \dots, x_m, \varphi(x_1, \dots, x_m)) = g(x_1, \dots, x_m)$. Действительно,

$$\psi(\widetilde{\alpha}_i, \varphi(\widetilde{\alpha}_i)) = \psi(\widetilde{\alpha}_i, -) = \psi(\widetilde{\alpha}_i, 0) \cap \psi(\widetilde{\alpha}_i, 1) = 0 = g(\widetilde{\alpha}_i),$$
$$\psi(\widetilde{\beta}_j, \varphi(\widetilde{\beta}_j)) = \psi(\widetilde{\beta}_j, -) = \psi(\widetilde{\beta}_j, 0) \cap \psi(\widetilde{\beta}_j, 1) = 1 = g(\widetilde{\beta}_j),$$
$$\psi(\widetilde{\gamma}_k, \varphi(\widetilde{\gamma}_k)) = \psi(\widetilde{\gamma}_k, -) = \psi(\widetilde{\gamma}_k, 0) \cup \psi(\widetilde{\gamma}_k, 1) = - = g(\widetilde{\gamma}_k),$$
$$\psi(\widetilde{\delta}_v, \varphi(\widetilde{\delta}_v)) = \psi(\widetilde{\delta}_v, *) = * = g(\widetilde{\delta}_v),$$
$$\psi(\overline{\widetilde{\alpha}}_i, \varphi(\overline{\widetilde{\alpha}}_i) = \psi(\overline{\widetilde{\alpha}}_i, -) = \psi(\overline{\widetilde{\alpha}}_i, 0) \cap \psi(\overline{\widetilde{\alpha}}_i, 1) = 1 = g(\overline{\widetilde{\alpha}}_i),$$
$$\psi(\overline{\widetilde{\beta}}_j, \varphi(\overline{\widetilde{\beta}}_j) = \psi(\overline{\widetilde{\beta}}_j, -) = \psi(\overline{\widetilde{\beta}}_j, 0) \cap \psi(\overline{\widetilde{\beta}}_j, 1) = 0 = g(\overline{\widetilde{\beta}}_j),$$
$$\psi(\overline{\widetilde{\gamma}}_k, \varphi(\overline{\widetilde{\gamma}}_k) = \psi(\overline{\widetilde{\gamma}}_k, -) = \psi(\overline{\widetilde{\gamma}}_k, 0) \cup \psi(\overline{\widetilde{\gamma}}_k, 1) = - = g(\overline{\widetilde{\gamma}}_k),$$
$$\psi(\overline{\widetilde{\delta}}_v, \varphi(\overline{\widetilde{\delta}}_v)) = \psi(\overline{\widetilde{\delta}}_v, *) = * = g(\overline{\widetilde{\delta}}_v).$$

Отсюда следует, что $K_4 \subseteq [S^- \cup \{f\}]$. Следовательно, $K_4 = [S^- \cup \{f\}]$.

□

Следствие 2. *Не существует частичного ультраклона B такого, что*

$$S^- \cup \{*\} \subset B \subset K_4.$$

Обозначим через S' множество, состоящее из всех мультифункций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из двух условий:

- $f(\tilde{\alpha}) = *$ или $f(\bar{\tilde{\alpha}}) = *$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\bar{\tilde{\alpha}})}$, где $f(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$, и при этом не существует двоичного набора $\tilde{\beta}$ такого, что $f(\tilde{\beta}) = -$.

Из этого определения следует, что если функция из множества S' на некотором наборе принимает значение $-$, то среди её значений как минимум половина равны $*$, и $S^* \subset S' \subset K_5$.

Лемма 8. *Множество S' является частичным ультраклоном ранга 2.*

Доказательство. Из определения множества S' следует, что оно замкнуто относительно добавления и удаления фиктивных переменных и содержит все проекции. Доказательство замкнутости относительно суперпозиции проведем методом от противного. Пусть

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), g_2(x_1, \dots, x_n) \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)),$$

где $f, g_1, \dots, g_m$ – произвольные функции из множества S'. Предположим, что $h(x_1, \dots, x_n) \notin S'$.

Пусть существует двоичный набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $h(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\gamma}) = \mu \neq *$, $h(\bar{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\delta}) = \eta \neq *$ и $\begin{pmatrix} \mu \\ \eta \end{pmatrix} \notin \{(01)^t, (10)^t\}$. Имеем $\gamma_i \neq *$ и $\delta_i \neq *$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$, иначе значение функции f хотя бы на одном из наборов $\tilde{\gamma}$ или $\tilde{\delta}$ равно $*$. Также имеем $\gamma_i = \bar{\delta}_i$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$, иначе одна из функций $g_1, \dots, g_m$ не принадлежит S'. Таким образом, $\begin{pmatrix} \gamma_i \\ \delta_i \end{pmatrix} \in \{(01)^t, (10)^t\}$, противоречие с $f \in S'$.

Пусть теперь $h(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\gamma}) = \mu \in \{0, 1\}$, $h(\bar{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\delta}) = \bar{\mu}$ и существует двоичный набор $\tilde{\beta}$ такой, что $h(\tilde{\beta}) = f(\tilde{\sigma}) = -$. Заметим, что $\gamma_i \neq -$, $\delta_i \neq -$

и $\sigma_i \neq -$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$. Действительно, если найдется такой i, что $\gamma_i = -$, то либо $\delta_i = *$, либо $g_i \notin S'$. Аналогично, если $\delta_i = -$. Если же $\sigma_i = -$, то $g_i \notin S'$. Поэтому $\gamma_i = \bar{\delta}_i$ и $\sigma_i \in \{0, 1\}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$, противоречие с $f \in S'$.

□

Лемма 9. *Для любой $f \in S' \setminus S^*$ верно, что*

$$[S^* \cup \{f\}] = S'.$$

Доказательство. Включение $[S^* \cup \{f\}] \subseteq S'$ очевидно. Покажем, что любая $g(x_1, \dots, x_m) \in S'$ может быть выражена с помощью суперпозиции функций из S^* и функции $f \in S' \setminus S^*$. Достаточно рассмотреть случай, когда

$$g(x_1, \dots, x_m) \in S' \setminus S^*.$$

Обозначим через

- $\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_s$ наборы, на которых значение g равно 0;
- $\widetilde{\beta}_1, \dots, \widetilde{\beta}_l$ наборы, на которых значение g равно 1;
- $\widetilde{\gamma}_1, \dots, \widetilde{\gamma}_t$ наборы, на которых значение g равно $-$.

Тогда значение g на всех остальных наборах равно $*$. Заметим, что количество таких наборов больше или равно $s + l + t$.

Из функции f с помощью проекций и отрицаний можно получить функцию $\phi(x) = (-*)$. Далее получим функцию $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, которая принимает значение $-$ на наборах $\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_s$, $\widetilde{\beta}_1, \dots, \widetilde{\beta}_l$, $\widetilde{\gamma}_1, \dots, \widetilde{\gamma}_t$, а на остальных наборах принимает значение $*$, следующим образом:

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = \phi(\omega(x_1, \dots, x_m)),$$

где $\omega(x_1, \dots, x_m)$ является функцией из S^*, которая на наборах $\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_s$, $\widetilde{\beta}_1, \dots, \widetilde{\beta}_l$, $\widetilde{\gamma}_1, \dots, \widetilde{\gamma}_t$ принимает значение 0, а на остальных наборах принимает значение $*$.

Теперь рассмотрим самодвойственную функцию $\psi(x_1, \dots, x_m, y)$ такую, что
$\psi(\widetilde{\alpha}_i, 0) = 0$, $\psi(\widetilde{\alpha}_i, 1) = 0$, $\psi(\overline{\widetilde{\alpha}}_i, 0) = 1$, $\psi(\overline{\widetilde{\alpha}}_i, 1) = 1$,
$\psi(\widetilde{\beta}_j, 0) = 1$, $\psi(\widetilde{\beta}_j, 1) = 1$, $\psi(\overline{\widetilde{\beta}}_j, 0) = 0$, $\psi(\overline{\widetilde{\beta}}_j, 1) = 0$,
$\psi(\widetilde{\gamma}_k, 0) = 0$, $\psi(\widetilde{\gamma}_k, 1) = 1$, $\psi(\overline{\widetilde{\gamma}}_k, 0) = 0$, $\psi(\overline{\widetilde{\gamma}}_k, 1) = 1$.

Покажем, что $\psi(x_1, \dots, x_m, \varphi(x_1, \dots, x_m)) = g(x_1, \dots, x_m)$. Действительно,

$$\psi(\widetilde{\alpha}_i, \varphi(\widetilde{\alpha}_i)) = \psi(\widetilde{\alpha}_i, -) = \psi(\widetilde{\alpha}_i, 0) \cap \psi(\widetilde{\alpha}_i, 1) = 0 = g(\widetilde{\alpha}_i),$$

$$\psi(\widetilde{\beta}_j, \varphi(\widetilde{\beta}_j)) = \psi(\widetilde{\beta}_j, -) = \psi(\widetilde{\beta}_j, 0) \cap \psi(\widetilde{\beta}_j, 1) = 1 = g(\widetilde{\beta}_j),$$

$$\psi(\widetilde{\gamma}_k, \varphi(\widetilde{\gamma}_k)) = \psi(\widetilde{\gamma}_k, -) = \psi(\widetilde{\gamma}_k, 0) \cup \psi(\widetilde{\gamma}_k, 1) = - = g(\widetilde{\gamma}_k).$$

На остальных наборах значение суперпозиции $\psi(x_1, \dots, x_m, \varphi(x_1, \dots, x_m))$ равно $*$, поскольку внутренняя функция φ принимает на них значение $*$.

Отсюда следует, что $S' \subseteq [S^* \cup \{f\}]$. Следовательно, $S' = [S^* \cup \{f\}]$.

□

Лемма 10. *Для любой $f \in K_5 \setminus S'$ верно, что*

$$[S' \cup \{f\}] = K_5.$$

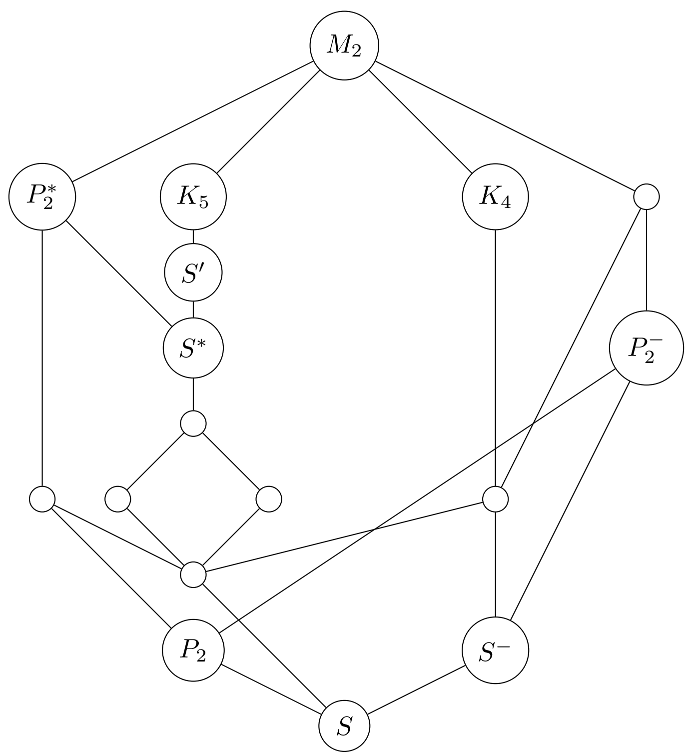
Доказательство. Включение $[S' \cup \{f\}] \subseteq K_5$ очевидно. Покажем, что любая $g(x_1, \ldots, x_m) \in K_5$ может быть выражена с помощью суперпозиции функций из S' и функции $f \in K_5 \setminus S'$. Достаточно рассмотреть случай, когда $g(x_1, \ldots, x_m) \in K_5 \setminus S'$. Из функции f с помощью проекций и отрицаний можно получить бинарную функцию $\varphi(x, y) \in K_5$, у которой вектор значений содержит все четыре значения $0, 1, -, *$. Из функции $\varphi(x, y)$ с помощью отрицания и перестановки переменных получим функцию $\psi(x_1, x_2) = (0 - *1)$.

Обозначим через $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_s$ наборы, на которых значение g равно $-$. Обозначим через g_0 и g_1 функции, которые принимают такие же значения как и g на всех наборах кроме $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_s$. На наборах $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_s$ функция g_0 равна 0, а функция g_1 равна 1. Очевидно, что $g_0, g_1 \in S^*$. Остается заметить, что

$$g(x_1, \ldots, x_m) = \psi(g_0(x_1, \ldots, x_m), g_1(x_1, \ldots, x_m)).$$

□

Теорема 6. *Интервал* $\Im(S, M_2)$ *содержит ровно* 17 *частичных ультраклонов и изображен ниже.*



Доказательство. Следует из теорем 4, 5 и лемм 3–10.

□

References

[1] E.L. Post, *Introduction to a general theory of elementary propositions*, Amer.J. Math., **43**:4 (1921), 163–185.JFM 48.1122.01

[2] V.B. Alekseev, A.A. Voronenko, *On some closed classes in partial two-valued logic*, Discrete Math. Appl., **4**:5 (1994), 401–419. Zbl 0818.06013

[3] V.I. Panteleyev, S.Yu. Khaltanova, *About some intervals in the lattic of clones of partial ultrafunctions*, Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat., **3**:4 (2010), 80–87. Zbl 1284.08011

[4] S.A. Badmaev, A.E. Dugarov, I.V. Fomina, I.K. Sharankhaev, *On some intervals in the lattice of ultraclones of rank 2*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **18**:2 (2021), 1210–1218. Zbl 7440274

[5] V.I. Panteleyev, *Criteria of completeness for redefining Boolean functions*, Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser., **2009**:2 (2009), 60–79. Zbl 1319.03064

[6] S.A. Badmaev, *A completeness criterion for sets of multifunctions in full partial ultraclone of rank 2*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **15** (2018), 450–474. Zbl 1436.08003

Sergei Alexandrovich Badmaev, Alexandr Evgenevich Dugarov, Irina Vladimirovna Fomina, Ivan Konstantinovich Sharankhaev
Dorzhi Banzarov Buryat State University,
24a, Smolina str.,
670000, Ulan-Ude, Russia
Email address: badmaevsa@mail.ru, dugarov_aleksandr@mail.ru, fomina-irina0104@yandex.ru, goran5@mail.ru