S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 20, №1, стр. 455–464 (2023) УДК 519.21
DOI 10.33048/semi.2023.20.026 MSC 60G50

О СВОЙСТВАХ ГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ С УСТОЙЧИВЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ СКАЧКОВ

В.И. ЛОТОВ

Abstract. For a random walk with jumps having strictly stable distributions, we obtain theorems that characterize properties of ladder epochs and ladder heights. We also give exact expressions for the distribution of the sojourn time of the random walk trajectory on the positive semi-axis for a finite number of steps.

Keywords: random walk, ladder epoch, ladder height, strictly stable distribution, sojourn time on the semi-axis.

1. Введение

Пусть $X,\ X_1,\ X_2,\ \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, обозначим

$$S_n = X_1 + \dots + X_n,\ n \ge 1, \qquad S_0 = 0.$$

Последовательность $\{S_n\}$ называется случайным блужданием.

Первая часть работы посвящена изучению свойств лестничных величин.

Введем момент появления первой положительной суммы (лестничный момент) и величину первой положительной суммы (лестничную высоту):

$$\eta_+ = \min\{n \ge 1 : S_n > 0\}, \qquad \chi_+ = S_{\eta_+}.$$

Lotov, V.I. Properties of boundary functionals for a random walk with stable jump distributions.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект № FWNF-2022-0010.

Поступила 18 января 2023 г., опубликована 3 июля 2023 г.

Полагаем $\eta_+ = \infty$, если $S_n \le 0$ при всех $n \ge 1$. В этом случае лестничная высота χ_+ остается неопределенной.

Аналогично можно ввести время появления первой отрицательной суммы и ее величину:

$$\eta_- = \min\{n \ge 1 : S_n < 0\}, \qquad \chi_- = S_{\eta_-}.$$

Отметим, что все перечисленные характеристики играют важную роль при решении разного сорта граничных задач для случайных блужданий. Рассмотрим, к примеру, задачу исследования момента первого достижения уровня

$$\tau_b = \inf\{n \ge 1 : \ S_n \ge b\}, \qquad b > 0,$$

и величины S_{τ_b}. Нетрудно видеть, что движение траектории к уровню b осуществляется независимыми скачками, распределенными одинаково с χ_+, то есть величина S_{τ_b} формируется как сумма случайного числа таких лестничных величин. По той же причине τ_b равняется сумме случайного числа независимых величин, одинаково распределенных с η_+. Следовательно, совместное распределение пары (τ_b, S_{τ_b}) полностью определяется распределением пары (η_+, χ_+). Этот факт демонстрируется, в частности, в [1, Th. 6] в более общей ситуации.

Ясно, что исследование лестничных величин вызывает большой интерес, и этому направлению посвящено значительное количество работ, см., например, [2]–[9] и литературу там. Основная часть работ относится к изучению асимптотических свойств распределений лестничных величин. Одновременно выясняется, что нахождение явных выражений для распределений случайных величин η_+ и χ_+, а также их моментов сопряжено со значительными трудностями. Разумеется, приятным исключением здесь являются ситуации, когда распределение X на правой полуоси является экспоненциальным или геометрическим для целочисленного блуждания. В этих случаях χ_+ также будет иметь экспоненциальное или, соответственно, геометрическое распределение, однако и здесь нахождение распределения η_+ является весьма сложной задачей.

В работе рассматриваются случайные блуждания, для которых функция распределения $F(y) = \mathbf{P}(X < y)$ обладает свойством строгой устойчивости. Последнее обстоятельство позволяет выяснить ряд дополнительных полезных свойств лестничных величин η_+ и χ_+ в этой ситуации, что и составляет содержание первой части данной работы. Получены оценки сверху для моментов случайной величины η_+ (теорема 1), для моментов χ_+ в предположении о симметричности распределения X (теорема 3), а также найдено в точном виде преобразование Лапласа над распределением χ_+, если скачки блуждания имеют симметричное распределение Коши (теорема 2). Приведены также некоторые оценки снизу для моментов лестничных величин.

В заключительной части работы рассмотрен еще один граничный функционал от траектории — время пребывания. Найдено точное выражение для распределения времени пребывания случайного блуждания на положительной полуоси также при условии, что скачки блуждания имеют строго устойчивое распределение (теорема 4).

Напомним, что распределение случайной величины X называется устойчивым, если оно не сосредоточено в нуле и для каждого $n \ge 1$ существуют постоянные числа $c_n > 0$ и γ_n такие, что распределение S_n совпадает с распределением $c_n X + \gamma_n$ ([11, Ch. 6]). Оказывается, что константы c_n обязательно имеют вид $c_n = n^{1/\alpha}$, где $0 < \alpha \le 2$. Все устойчивые функции распределения непрерывны. Распределение называется строго устойчивым, если $\gamma_n = 0$ в приведенном выше определении.

2. Свойства лестничных величин

Теорема 1. *Пусть случайная величина X имеет строго устойчивое распределение, обозначим $q := \mathbf{P}(X > 0)$. Тогда справедливы соотношения*

$$\mathbf{E}z^{\eta_+} = 1 - (1-z)^q, \qquad |z| < 1, \tag{1}$$

$$\mathbf{P}(\eta_+ = n) = (-1)^{n-1}\frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}, \quad n \ge 1,$$

$$\mathbf{E}\eta_+^\lambda = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)}\int\limits_0^\infty \frac{(1-e^{-u})^q}{u^{\lambda+1}}du \le \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\cdot\frac{q}{q-\lambda}, \qquad 0 < \lambda < q. \tag{2}$$

Доказательство. Формула (1) известна, она приведена здесь для полноты картины. По-видимому, эта формула впервые встретилась в [2]. Поясним один из способов ее получения. Для характеристической функции совместного распределения случайных величин χ_+ и η_+ известно следующее представление (см., например, [10, Ch. 12, Cor. 12.2.1]): для вещественных t и $|z| < 1$

$$1 - \mathbf{E}(e^{it\chi_+}z^{\eta_+}; \eta_+ < \infty) = \exp\Big\{ -\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n}\mathbf{E}\big(e^{itS_n};\, S_n > 0\big)\Big\}. \tag{3}$$

Заметим, что в силу строгой устойчивости

$$\mathbf{P}(S_n > 0) = \mathbf{P}(S_n/n^{1/\alpha} > 0) = \mathbf{P}(X > 0) = q,$$

поэтому расходится ряд

$$\sum_{k=n}^\infty \frac{\mathbf{P}(S_n > 0)}{n} = \infty,$$

откуда следует ([10, Ch. 12, Cor. 12.2.5]), что $\mathbf{P}(\eta_+ < \infty) = 1$. Этот же вывод можно сделать, положив $t = 0$ в (3) и устремляя $z \to 1$. Получаем теперь из (3) при $t = 0$

$$1 - \mathbf{E}z^{\eta_+} = \exp\Big\{ -q\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n}\Big\} = \exp\big\{q\ln(1-z)\big\} = (1-z)^q$$

(везде в работе имеется в виду главное значение логарифма).

Отметим, что формула (1) при $q = 1/2$ имеет место для всякой непрерывной функции F, удовлетворяющей условию $F(y) = 1 - F(-y)$ (см. [11, Ch. 12]).

Разлагая полученное выражение для $\mathbf{E}z^{\eta_+}$ в ряд, получаем

$$\mathbf{E}z^{\eta_+} = 1-(1-z)^q = qz - \frac{q(q-1)}{2}z^2 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}z^n + \dots,$$

то есть

$$\mathbf{P}(\eta_+ = n) = (-1)^{n-1}\frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}.$$

Для доказательства неравенства (2) воспользуемся следующим соотношением [12], связывающим момент порядка $\lambda \in (0,1)$ произвольной неотрицательной случайной величины Y с преобразованием Лапласа $g(u) = \mathbf{E}\exp\{-uY\}$:

$$\mathbf{E}Y^\lambda = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \int\limits_0^\infty \frac{1-g(u)}{u^{\lambda+1}}\,du, \qquad 0<\lambda<1. \tag{4}$$

Используя (1) при $z = e^{-u}$, $u \ge 0$, и свойство (4), получаем

$$\mathbf{E}\eta_+^\lambda = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \int\limits_0^\infty \frac{(1-e^{-u})^q}{u^{\lambda+1}}\,du. \tag{5}$$

В окрестности нуля подынтегральная функция ведет себя как $u^{q-\lambda-1}$, поэтому при $\lambda \ge q$ момент $\mathbf{E}\eta_+^\lambda$ не существует. Имеем при $0<\lambda<q$

$$\mathbf{E}\eta_+^\lambda \le \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \min_{A>0} \left(\int\limits_0^A \frac{u^q}{u^{\lambda+1}}\,du + \int\limits_A^\infty \frac{1}{u^{\lambda+1}}\,du \right)$$

$$= \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \min_{A>0} \left(\frac{A^{q-\lambda}}{q-\lambda} + \frac{A^{-\lambda}}{\lambda} \right) = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \left(\frac{1}{q-\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \cdot \frac{q}{q-\lambda}.$$

Теорема доказана. □

Пользуясь представлением (5), нетрудно получать также оценки снизу для $\mathbf{E}\eta_+$. Пусть $0<A<2$, тогда

$$\int\limits_0^\infty \frac{(1-e^{-u})^q}{u^{\lambda+1}}\,du \ge \int\limits_0^A \frac{(1-u/2)^q u^q}{u^{\lambda+1}}\,du + \int\limits_A^\infty \frac{(1-e^{-A})^q}{u^{\lambda+1}}\,du$$

$$\ge (1-A/2)^q \frac{A^{q-\lambda}}{q-\lambda} + (1-e^{-A})^q \frac{A^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\eta_+^\lambda \ge \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \max_{0<A<2} \left((1-A/2)^q \frac{A^{q-\lambda}}{q-\lambda} + (1-e^{-A})^q \frac{A^{-\lambda}}{\lambda} \right), \qquad 0<\lambda<q.$$

Нахождение точки максимума здесь требует сложных вычислений, мы их не приводим. Заметим только, что приведенные оценки сверху и снизу для интеграла (5) обе выражаются через линейные комбинации функций $A^{q-\lambda}/(q-\lambda)$ и $A^{-\lambda}/\lambda$.

Далее найдем явный вид для преобразования Лапласа лестничной высоты χ_+, если случайная величина X распределена по симметричному закону Коши.

Напомним, что X имеет распределение Коши $C_{m,\sigma}$, если его плотность равна

$$c_{m,\sigma}(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sigma}{\sigma^2 + (y-m)^2}, \qquad -\infty < y < \infty. \tag{6}$$

Здесь, очевидно,

$$F(x) = C_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-m}{\sigma} \right),$$

где m, σ — некоторые параметры, $\sigma>0$,

$$q = P(X>0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{m}{\sigma}.$$

Распределение Коши строго устойчиво с показателем $\alpha = 1$. Это непосредственно следует из вида характеристической функции:

$$\varphi(t) := \mathbf{E}e^{itX} = e^{imt-\sigma|t|}.$$

Теорема 2. *Пусть* $F(y) = \mathbf{P}(X < y) = C_{0,\sigma}(y)$, *тогда для любого* $u > 0$

$$\mathbf{E}\, e^{-u\chi_+} = 1 - \frac{1}{\sqrt{u\sigma}}\,\Gamma\biggl(\frac{u\sigma}{2\pi}+1\biggr)\biggl(\frac{u\sigma}{2\pi e}\biggr)^{-u\sigma/2\pi}.$$

Здесь $\Gamma(\lambda)$ — известная гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Правая часть (3) являет собой положительную компоненту факторизации [10, Ch. 12], ее свойства хорошо известны. При $|z| < 1$ эта функция аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} t > 0$, непрерывна и ограничена на замыкании этой области. Положим $t = iu, u \geq 0$, и перепишем (3), воспользовавшись свойством строгой устойчивости и формулой (6):

$$1 - \mathbf{E}\bigl(z^{\eta_+}e^{-u\chi_+}\bigr) = \exp\biggl\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}\int_0^{\infty} e^{-ux}d\,\mathbf{P}(S_k < x)\biggr\}$$

$$= \exp\biggl\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}\int_0^{\infty} e^{-ukx}d\,\mathbf{P}(X < x)\biggr\} = \exp\biggl\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}\int_0^{\infty}\frac{e^{-ukx}}{\pi\sigma(1+(x/\sigma)^2)}\,dx\biggr\}$$

$$= \exp\biggl\{-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}\int_0^{\infty}\frac{e^{-uk\sigma x}}{1+x^2}\,dx\biggr\}.$$

Пусть $0 < z < 1$. Обозначим при фиксированных положительных z, u, σ

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{z^k e^{-u\sigma kx}}{k(1+x^2)}, \qquad x > 0.$$

При каждом n функция $S_n(x)$ неотрицательна и непрерывна по x, она монотонно возрастает с ростом n. Очевидно,

$$S_n(x) \to -\frac{\ln(1-ze^{-u\sigma x})}{1+x^2}, \qquad n \to \infty.$$

Предельная функция непрерывна и интегрируема на $(0,\infty)$. Получаем в силу теоремы о мажорируемой сходимости

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} S_n(x)\,dx = \int_0^{\infty}\lim_{n\to\infty} S_n(x)\,dx = -\int_0^{\infty}\frac{\ln(1-ze^{-u\sigma x})}{1+x^2}\,dx.$$

Имеем в итоге

$$1 - \mathbf{E}e^{-u\chi_+} = 1 - \lim_{z\to 1}\mathbf{E}\left(z^{\eta_+}e^{-u\chi_+}\right)$$

$$= \lim_{z\to 1}\exp\biggl\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\ln(1-ze^{-u\sigma x})}{1+x^2}\,dx\biggr\} = \exp\biggl\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\ln(1-e^{-u\sigma x})}{1+x^2}\,dx\biggr\}.$$

Как следует из формулы 4.319 [13, p. 568],

$$I(a) := \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\ln(1-e^{-2a\pi x})}{1+x^2}\,dx = -\biggl[\frac{1}{2}\ln 2a\pi + a(\ln a - 1) - \ln\Gamma(a+1)\biggr], \quad a > 0.$$

Полагая $a = u\sigma/2\pi$, будем иметь

$$\mathbf{E}e^{-u\chi_+} = 1 - \exp\{I(a)\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{u\sigma}}\exp\left\{\ln\Gamma\left(\frac{u\sigma}{2\pi}+1\right) - \frac{u\sigma}{2\pi}\left(\ln\frac{u\sigma}{2\pi}-1\right)\right\}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{u\sigma}}\,\Gamma\left(\frac{u\sigma}{2\pi}+1\right)\left(\frac{u\sigma}{2\pi e}\right)^{-u\sigma/2\pi}.$$

Теорема доказана. □

Если $F = C_{m,\sigma}$, то, очевидно,

$$1 - \mathbf{E}e^{-u\chi_+} = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1-e^{-u\sigma x})}{1+(x-m/\sigma)^2}\,dx\right\}.$$

Теорема 3. *Пусть X имеет симметричное строго устойчивое распределение с показателем α, то есть характеристическая функция имеет вид*

$$\varphi(t) = \mathbf{E}\exp\{itX\} = \exp\{-c|t|^\alpha\}$$

при некотором $c > 0$. Тогда при $0 < \lambda < \dfrac{\alpha}{2}$

$$\mathbf{E}\chi_+^\lambda = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{1-\exp\{-cu^\alpha\}}}{u^{\lambda+1}}\,du \le \frac{c^{\lambda/\alpha}}{\Gamma(1-\lambda)}\cdot\frac{\alpha}{\alpha-2\lambda}. \tag{7}$$

Доказательство. Воспользуемся факторизационным тождеством ([10, Ch. 12]), которое в случае симметричного и непрерывного распределения скачков блуждания принимает вид:

$$1-\varphi(t) = (1-\varphi_+(t))\cdot(1-\varphi_-(t)),$$

где $\varphi_\pm(t) = \mathbf{E}e^{it\chi_\pm}$. Распределения χ_+ и $-\chi_-$ совпадают в силу условия симметричности, функция $\varphi(t)$ вещественна, поэтому

$$1-\varphi(t) = (1-\varphi_+(t))(1-\varphi_-(t)) = (1-\varphi_+(t))(1-\overline{\varphi_+(t)})$$

$$= (1-\varphi_+(t))\overline{(1-\varphi_+(t))} = |1-\varphi_+(t)|^2.$$

Следовательно,

$$|1-\varphi_+(t)| = \sqrt{1-\varphi(t)} = \sqrt{1-e^{-c|t|^\alpha}}.$$

Для получения оценки сверху (7) вновь используем соотношение (4). Для любого $A > 0$ имеем

$$\mathbf{E}\chi_+^\lambda = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)}\int\limits_0^\infty \frac{1-\varphi_+(iu)}{u^{\lambda+1}}\,du = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{1-\exp\{-cu^\alpha\}}}{u^{\lambda+1}}\,du \tag{8}$$

$$= \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)}\left(\int\limits_0^A \frac{\sqrt{1-\exp\{-cu^\alpha\}}}{u^{\lambda+1}}\,du + \int\limits_A^\infty \frac{\sqrt{1-\exp\{-cu^\alpha\}}}{u^{\lambda+1}}\,du\right).$$

В окрестности нуля подынтегральная функция ведет себя как $\sqrt{c}\,u^{\alpha/2-\lambda-1}$, поэтому при $\lambda \ge \alpha/2$ момент $\mathbf{E}\chi_+^\lambda$ не существует. Воспользовавшись неравенствами

$$\sqrt{1-\exp\{-cu^\alpha\}} \le \sqrt{c}\,u^{\alpha/2}, \qquad \sqrt{1-\exp\{-cu^\alpha\}} \le 1,$$

имеем при $0 < \lambda < \alpha/2$

$$\mathbf{E}\chi_+^\lambda \le \frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \min_{A>0} \left(\sqrt{c} \int_0^A \frac{u^{\alpha/2}}{u^{\lambda+1}}\, du + \int_A^\infty \frac{1}{u^{\lambda+1}}\, du \right).$$

Нетрудно установить, что минимум выражения в скобках достигается при $A = c^{-1/\alpha}$, поэтому приходим к оценке

$$\mathbf{E}\chi_+^\lambda \le \frac{\lambda\, c^{\lambda/\alpha}}{\Gamma(1-\lambda)} \left(\frac{1}{\alpha/2-\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{c^{\lambda/\alpha}}{\Gamma(1-\lambda)} \cdot \frac{\alpha}{\alpha-2\lambda}.$$

□

Явное выражение (8) для $\mathbf{E}\chi_+^\lambda$ позволяет также получать для этого момента различные оценки снизу. Приведем одну из них.

Для $0 < \lambda < \alpha/2$ имеем

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{1-\exp\{-cu^\alpha\}}}{u^{\lambda+1}}\, du \ge \int_0^\infty \frac{1-\exp\{-cu^\alpha\}}{u^{\lambda+1}}\, du \ge \int_0^1 \frac{cu^\alpha - c^2u^{2\alpha}/2}{u^{\lambda+1}}\, du + \int_1^\infty \frac{1-e^{-c}}{u^{\lambda+1}}\, du$$

$$= \frac{c}{\alpha-\lambda} - \frac{c^2}{2(2\alpha-\lambda)} + \frac{1-e^{-c}}{\lambda} =: C(\lambda,\, \alpha).$$

Таким образом, из (8) получаем

$$\mathbf{E}\chi_+^\lambda \ge \frac{\lambda\, C(\lambda,\, \alpha)}{\Gamma(1-\lambda)}, \qquad 0 < \lambda < \alpha/2.$$

3. Время пребывания

Далее перейдем к рассмотрению времени пребывания на положительной полуоси траектории случайного блуждания со скачками, имеющими строго устойчивое распределение. Введем

$$T_n = \sum_{k=1}^n I_{\{S_k>0\}}, \qquad n \ge 1, \qquad T_0 = 0,$$

где $I_A(\omega) = 1$, если $\omega \in A$, и $I_A(\omega) = 0$ в противном случае. Время пребывания T_n есть число точек k, $1 \le k \le n$, таких, что $S_k > 0$.

Хорошо известен закон арксинуса о предельном поведении распределения T_n (см., к примеру, [14, Ch. 4, §20], [11, Ch.12]). В работах многих авторов изучается также асимптотическое поведение времени пребывания случайного блуждания в других множествах, отличных от $(0,\infty)$, см. [15]–[18] и литературу там. Ниже будет найдено значение вероятности $\mathbf{P}(T_n = k)$ в точном виде в тех случаях, когда функция распределения F случайной величины X строго устойчива. Заметим, что точные формулы для $\mathbf{P}(T_n = k)$ давно известны, если распределение случайной величины X непрерывно и симметрично ([11, Ch.12]).

Основной наш результат состоит в следующем.

Теорема 4. *Предположим, что функция распределения F случайной величины X строго устойчива. Обозначим $q = \mathbf{P}(X > 0)$. Тогда при всех $n \geq 1$, $1 \leq k < n$*

$$\mathbf{P}(T_n = k) = \frac{q(q+1)(q+2)\dots(q+k-1)(1-q)(2-q)\dots(n-k-q)}{k!(n-k)!},$$

$$\mathbf{P}(T_n = n) = \frac{q(q+1)(q+2)\dots(q+n-1)}{n!}.$$

$$\mathbf{P}(T_n = 0) = \frac{(1-q)(2-q)\dots(n-q)}{n!}.$$

Доказательство. Нам потребуется следующая факторизация [10]: для $|z| < 1$,

$$1 - z\varphi(t) = R_+(z,t)R_-(z,t),$$

где

$$R_-(z,t) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\mathbf{E}\left(\exp\{itS_n\};\, S_n \leq 0\right)\right\},$$

$$R_+(z,t) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\mathbf{E}\left(\exp\{itS_n\};\, S_n > 0\right)\right\}.$$

Известны следующие результаты (см., например, теорему 1 в [14, Ch. 4, §20]).

$$\mathbf{P}(T_n = k) = \mathbf{P}(T_k = k)\mathbf{P}(T_{n-k} = 0), \quad 0 \leq k \leq n, \tag{9}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}(T_k = 0) = R_-^{-1}(z,0), \quad 0 \leq z \leq 1, \tag{10}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}(T_k = k) = R_+^{-1}(z,0), \quad 0 \leq z \leq 1. \tag{11}$$

Попутно заметим, что известно также выражение тройного преобразования над распределением пары (T_n, S_n) в терминах компонент введенной факторизации ([14], [19]):

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{E}\big(v^{T_n} e^{itS_n}\big) = \frac{R_+(z,t)}{(1-z\varphi(t))R_+(zv,t)} = \frac{1}{R_-(z,t)R_+(zv,t)}.$$

Начнем с нахождения вероятностей $\mathbf{P}(T_k = 0)$. В силу строгой устойчивости

$$\mathbf{P}(S_n \leq 0) = \mathbf{P}(X \leq 0) = 1 - q$$

при любых $n \geq 1$. Имеем в силу (10)

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}(T_k = 0) = R_-^{-1}(z,0) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\mathbf{P}(S_n \leq 0)\right\}$$

$$= \exp\left\{(1-q)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\right\} = \exp\{(q-1)\ln(1-z)\} = (1-z)^{q-1}.$$

Нетрудно вычислить производные

$$\frac{d^k(1-z)^{q-1}}{dz^k} = (1-q)(2-q)\dots(k-q)(1-z)^{q-k-1}, \qquad k \geq 1,$$

поэтому в окрестности нуля

$$(1-z)^{q-1} = 1 + z(1-q) + \frac{z^2}{2}(1-q)(2-q) + \dots .$$

Таким образом, коэффициент при z^k в этом разложении равен

$$\mathbf{P}(T_k = 0) = \frac{(1-q)(2-q)\dots(k-q)}{k!}, \quad k \geq 1,$$

и, соответственно,

$$\mathbf{P}(T_{n-k} = 0) = \frac{(1-q)(2-q)\dots(n-k-q)}{(n-k)!}, \quad 1 \leq k < n, \quad \mathbf{P}(T_0 = 0) = 1. \tag{12}$$

Аналогично находим из (11)

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}(T_k = k) = R_+^{-1}(z,0) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\mathbf{P}(S_n > 0)\right\}$$

$$= \exp\left\{q\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\right\} = \exp\{-q\ln(1-z)\} = (1-z)^{-q}.$$

Здесь

$$\frac{d^k(1-z)^{-q}}{dz^k} = q(q+1)(q+2)\dots(q+k-1)(1-z)^{-q-k}, \qquad k \geq 1,$$

поэтому

$$\mathbf{P}(T_k = k) = \frac{q(q+1)(q+2)\dots(q+k-1)}{k!}, \quad k \geq 1. \tag{13}$$

Из (9), (12) и (13) следует для $1 \leq k < n$

$$\mathbf{P}(T_n = k) = \frac{q(q+1)(q+2)\dots(q+k-1)(1-q)(2-q)\dots(n-k-q)}{k!(n-k)!}.$$

Теорема доказана. □

Автор благодарен А.А. Дубнякову, принимавшему участие в некоторых разделах данной работы.

References

[1] V.I. Lotov, *On some boundary crossing problems for Gaussian random walks*, Ann. Probab., **24**:4 (1996), 2154–2171. Zbl 0876.60057

[2] Ya.G. Sinai, *On the distribution of the first positive sum for the sequence of independent random variables*, Teor. Veroyatn. Primen., **2**:1 (1957), 126–135. Zbl 0081.35105

[3] B.A. Rogozin, *On the distribution of the first jump*, Teor. Veroyatn. Primen., **9**:3 (1964), 498—515. Zbl 0139.35501

[4] B.A. Rogozin, *The distribution of the first ladder moment and height and fluctuation of a random walk*, Theory Probab. Appl., **16**:4 (1971), 575–595. Zbl 0269.60053

[5] R.A. Doney, *Moments of ladder height in random walks*, J. Appl. Probab., **17**:1 (1980), 248–252. Zbl 0424.60072

[6] R.A. Doney, *On the asymptotic behaviour of first passage times for transient random walk*, Probab. Theory Relat. Fields, **18**:2 (1989), 239–246. Zbl 0643.60053

[7] A.V. Nagaev, *On a method of calculating moments of ladder heights*, Theory Probab. Appl., **30**:3 (1986), 569—572. Zbl 0595.60054

[8] S.V. Nagaev, *Exact expressions for the moments of ladder heights*, Sib. Math. J., **51**:4 (2010), 675—695. Zbl 1219.60047

[9] T.V. Lazovskaya1, S.V. Nagaev, *Problems in calculating moments and distribution functions of ladder heights*, J. Math. Sci., New York, **218**:2 (2016), 195–207. Zbl 1353.65011

[10] A.A. Borovkov, *Probability Theory*, Springer, London, 2013. Zbl 1297.60002
[11] W. Feller, *An introduction to Probability Theory and its applications. Vol.2*, John Wiley and Sons, New York etc., 1971. Zbl 0219.60003
[12] S.J. Wolfe, *On moments of probability distributions functions*, Lect. Notes Math., **457** (1975), 306–316. Zbl 0306.60009
[13] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, Amsterdam, 2007. Zbl 1208.65001
[14] F. Spitzer, *Principles of random walk*, Springer-Verlag, New York etc., 1976. Zbl 0359.60003
[15] A.V. Skorokhod, N.P. Slobodenyuk, *Limit theorems for random walks*, Naukova Dumka, Kiev, 1970. Zbl 0272.60051
[16] A.N. Borodin, I.A. Ibragimov, *Limit theorems for functionals of random walks*, Proc. Steklov Inst. Math., **195**, AMS, Providence, 1995. Zbl 0855.60001
[17] A.T. Semenov, *Asymptotic expansion for distribution of linger time of a random walk in a segment*, Sib. Math. J., **15**:4 (1974), 650–658. Zbl 0304.60039
[18] V.I. Lotov, *On the sojourn time of a random walk in a strip*, Sib. Math. J., **51**:4 (2010), 621–638. Zbl 1217.60034
[19] V.I. Lotov, *Factorization identities for the sojourn time of a random walk in a strip*, Sib. Math. J., **51**:1 (2010), 119–127. Zbl 1202.60067

Vladimir Ivanovich Lotov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: lotov@math.nsc.ru