

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 20, №1, стр. 48–61 (2023)
DOI 10.33048/semi.2023.20.005

УДК 514.764.2
MSC 53C30, 53C50

ИНВАРИАНТНЫЕ СОЛИТОНЫ РИЧЧИ НА ТРЕХМЕРНЫХ НЕУНИМОДУЛЯРНЫХ ГРУППАХ ЛИ С ЛЕВОИНВАРИАНТНОЙ ЛОРЕНЦЕВОЙ МЕТРИКОЙ И ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

П.Н. КЛЕПИКОВ, Е.Д. РОДИОНОВ, О.П. ХРОМОВА

ABSTRACT. In this paper we investigate invariant Ricci solitons on three-dimensional nonunimodular metric Lie groups with a semisymmetric connection. We have proved that there exist nontrivial invariant Ricci solitons on some three-dimensional Lie groups with a left-invariant Lorentzian metric and a semisymmetric non Levi-Civita connection. Moreover a complete classification of nontrivial invariant Ricci solitons and the corresponding semisymmetric connections on three-dimensional nonunimodular Lie groups is obtained. In result we have given an answer on L.Cerbo conjecture about nontrivial invariant Ricci solitons.

Keywords: invariant Ricci solitons, Lie groups, left-invariant Lorentzian metrics, semisymmetric connections.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии полусимметрическую связность ∇ формулой

$$(1) \quad \nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X,$$

где V — некоторое фиксированное левоинвариантное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты. Связность ∇ является метрической и впервые описана Э. Картаном в [1]. Класс метрических

КЛЕПИКОВ, П.Н., РОДИОНОВ, Е.Д., ХРОМОВА, О.П., INVARIANT RICCI SOLITONS ON THREE-DIMENSIONAL NONUNIMODULAR LIE GROUPS WITH A LEFT-INVARIANT LORENTZIAN METRIC AND A SEMISYMMETRIC CONNECTION.

© 2022 Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П.

Работа поддержана РФФ (грант 22-21-00111).

Поступила 13 мая 2022 г., опубликована 6 февраля 2023 г.

связностей, определяемых данным образом, содержит связность Леви-Чивиты и играет важную роль в исследованиях по римановой геометрии (см. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]).

Тензор кривизны и тензор Риччи связности ∇ определяются соответственно равенствами

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad r(X, Y) = \text{tr}(Z \rightarrow R(X, Z)Y).$$

Отметим, что, в отличие от случая связности Леви-Чивиты, в данном случае тензор Риччи не обязан быть симметричным. Однако верна следующая теорема

Теорема 1 ([9, 10]). *Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие с полусимметрической связностью. Тензор Риччи является симметричным тогда и только тогда, когда 1-форма π , определяемая равенством $\pi(X) = g(X, V)$ для любого векторного поля X на M , замкнута, т.е. $d\pi = 0$.*

Определение 1. *Метрика g полного (псевдо)риманова многообразия (M, g) называется солитоном Риччи, если она удовлетворяет уравнению*

$$(2) \quad r = \Lambda g + L_P g,$$

где r — тензор Риччи метрики g , $L_P g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля P , константа $\Lambda \in \mathbb{R}$. Если $M = G/H$ — однородное пространство, то однородная (псевдо)риманова метрика, удовлетворяющая (2), называется однородным солитоном Риччи, а если $M = G$ — группа Ли, и поле P левинвариантно — инвариантным солитоном Риччи.

Отметим, что векторное поле V неявно входит в уравнение (2), а в случае $V = 0$ мы получаем классическое определение солитона Риччи. Заметим также, что производная Ли имеет вид: $L_P g(X, Y) = P g(X, Y) + g([X, P], Y) + g(X, [Y, P])$. Если солитон Риччи инвариантен, то $L_P g(X, Y) = g([X, P], Y) + g(X, [Y, P])$ для произвольных левинвариантных векторных полей.

Определение 2. *Метрика g (псевдо)риманова многообразия (M, g) называется тривиальным солитоном Риччи, если $L_P g = \tau g$ при некоторой константе $\tau \in \mathbb{R}$.*

Заметим, что ранее инвариантные солитоны Риччи изучались Л.Цербо, П.Н. Клепиковым и Д.Н. Оскорбиным [11, 12].

Теорема 2 ([11]). *Для любой конечномерной унимодулярной группы Ли с левинвариантной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты все инвариантные солитоны Риччи тривиальны.*

Теорема 3 ([12]). *Для любой неунимодулярной группы Ли G ($\dim G \leq 4$) с левинвариантной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты все инвариантные солитоны Риччи тривиальны.*

Как следствие, возникла гипотеза Л.Цербо о том, что все инвариантные солитоны Риччи на группах Ли с левинвариантной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты тривиальны. В данной работе исследуется лоренцев случай с полусимметрическими связностями.

Пусть далее $M = G$ — группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, \mathfrak{g} — ее алгебра Ли. Фиксируем базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ левоинвариантных векторных полей в \mathfrak{g} и положим

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad g(e_i, e_j) = g_{ij}, \quad c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks},$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли, g_{ij} — компоненты метрического тензора.

Зафиксируем некоторое инвариантное векторное поле V , с помощью которого определим на G полусимметрическую связность ∇ .

Согласно (1) компоненты связности ∇ задаются формулами

$$\Gamma_{ij}^k = (\Gamma^g)_{ij}^k + g_{ij} V^k - g_{sj} V^s \delta_i^k,$$

где $(\Gamma^g)_{ij}^s = \frac{1}{2} g^{ks} (c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij})$ — компоненты связности Леви-Чивита ∇^g , $\|g^{ks}\|$ — матрица обратная к $\|g_{ks}\|$, δ_i^k — символ Кронекера.

Аналогично общему случаю определим тензор кривизны R и тензор Риччи r . В базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ их компоненты соответственно есть

$$R_{ijks} = \left(\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p \right) g_{ps}, \quad r_{ik} = R_{ijks} g^{js}.$$

Пусть P — левоинвариантное векторное поле. Тогда (2) можно переписать в терминах структурных констант алгебры Ли

$$(3) \quad r_{ij} = \Lambda g_{ij} - P^k (c_{ki}^s g_{sj} + c_{kj}^s g_{si}),$$

где r_{ij} — компоненты тензора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$, g_{ij} — компоненты метрического тензора, P^k — координаты левоинвариантного векторного поля, c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли \mathfrak{g} .

В дальнейшем под «метрической группой Ли (G, \mathfrak{g}, V) » будем понимать группу Ли G с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью, которую порождает левоинвариантное векторное поле $V \in \mathfrak{g}$.

Справедливы следующие утверждения

Лемма 1 ([13]). *Если метрическая группа Ли (G, \mathfrak{g}, V) удовлетворяет уравнению солитона Риччи, то в произвольном базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ алгебры Ли \mathfrak{g} выполняется соотношение*

$$(4) \quad V^i g_{ij} c_{kt}^j = 0;$$

или в инвариантной форме

$$g(V, [X, Y]) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Здесь c_{kt}^j — структурные константы алгебры \mathfrak{g} , определяемые разложением $[e_k, e_t] = c_{kt}^j e_j$.

Лемма 2 ([13]). *Инвариантный солитон Риччи тривиален тогда и только, когда выполняется*

$$(5) \quad P^k (c_{ki}^s g_{sj} + c_{kj}^s g_{si}) = \tau g_{ij}.$$

Рассмотрим далее трехмерный случай.

Соответствующая классификация базисов трехмерных метрических групп Ли получена в [14, 15, 16].

Теорема 4. Пусть G — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда в алгебре Ли группы G существует псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:

(1) Случай A :

$$[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = \alpha_1 \sin \alpha_3 e_1 - \alpha_2 \cos \alpha_3 e_2, [e_2, e_3] = \alpha_1 \cos \alpha_3 e_1 + \alpha_2 \sin \alpha_3 e_2,$$

с временноподобным e_3 и $\sin \alpha_3 \neq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$;

(2) Случай B :

$$[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = \alpha_3 e_1 - \alpha_4 e_2, [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

с ненулевыми $\langle e_2, e_2 \rangle = -\langle e_1, e_3 \rangle = 1$ и $\alpha_2 \neq \alpha_3$;

(3) Случай C_1 :

$$[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = \alpha_3 e_1 + \alpha_1 e_2, [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

с временноподобным e_2 и $\alpha_2 \neq \alpha_3$;

(4) Случай C_2 :

$$[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = \alpha_2 e_1 - \alpha_3 e_2, [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

с временноподобным e_2 и $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 + \alpha_3 \neq 0$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 5. Пусть (G, g, ∇) — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левинвариантной лоренцевой метрикой g и полусимметрической связностью ∇ , отличной от связности Леви-Чивиты. Тогда все нетривиальные инвариантные солитоны Риччи групп Ли (G, g, ∇) исчерпываются списком:

Случай A :

$$1. \Lambda = 2(V^3)^2 \neq 0, V = (0, 0, V^3), P = (0, P^2, V^3), \alpha_1 = \delta V^3, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = \delta \frac{\pi}{2},$$

$$\delta = \pm 1.$$

$$2. \Lambda = 2(V^3)^2 \neq 0, V = (0, 0, V^3), P = (P^1, 0, V^3), \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \delta V^3, \alpha_3 = \delta \frac{\pi}{2},$$

$$\delta = \pm 1.$$

$$3. \Lambda = -\frac{2(V^3)^3(\sin^2(\alpha_3)V^3 - 2\sin^2(\alpha_3)P^3 + \cos^2(\alpha_3)V^3 - V^3)}{\sin^2(\alpha_3)(V^3 - 2P^3)^2}, V = (0, 0, V^3),$$

$$P = (0, 0, P^3), \alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{(V^3)^2}{\sin(\alpha_3)(V^3 - 2P^3)}, V^3 P^3 \neq 0.$$

$$4. \Lambda = V^3 P^3, V = (0, 0, V^3), P = \left(0, 0, \frac{1}{2}P^3\right), P^3 = V^3 + \delta\alpha_1 + \delta\sqrt{(V^3)^2 - \alpha_1^2}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{(V^3)^2 - \alpha_1^2}, \alpha_3 = \delta \frac{\pi}{2}, \delta = \pm 1, V^3 \neq -\delta\alpha_1.$$

Случай В:

1. $V = (V^1, 0, 0)$, $P = \left(\frac{(V^1 + \alpha_2)^2 \alpha_2^2 - \Lambda \alpha_1^2}{4\alpha_3^2}, \frac{\Lambda \alpha_1}{2\alpha_2^2}, -\frac{\Lambda}{2\alpha_2} \right)$, $\alpha_3 = 2\alpha_2$, $\alpha_4 = 0$,
 $\Lambda \neq 0$, $V^1 \neq -\alpha_2$.
2. $\Lambda = 0$, $V = (V^1, 0, 0)$, $P = \left(\frac{(V^1 + \alpha_2)(V^1 + \alpha_3 - \alpha_2)\alpha_2\alpha_3}{2\alpha_2\alpha_3^2}, 0, 0 \right)$, $\alpha_4 = 0$,
 $V^1 \notin \{-\alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3\}$.
3. $\Lambda = 0$, $V = (V^1, 0, 0)$, $P = \left(\frac{V^1(\alpha_3 + V^1) - 2P^2\alpha_1}{2\alpha_3}, P^2, 0 \right)$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 0$,
 $V^1 \notin \{0, -\alpha_3\}$.
4. $\Lambda = 0$, $V = \left(-\frac{V^2\alpha_1}{\alpha_3}, V^2, 0 \right)$, $P = \left(\frac{\alpha_1((V^2)^2\alpha_1 - 2P^2\alpha_3^2)}{2\alpha_3^3}, P^2, -\frac{(V^2)^2}{\alpha_3} \right)$,
 $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 0$, $V^2\alpha_1 \neq 0$.

Случай С₁:

1. $\Lambda = -2\alpha_3^2 \neq 0$, $V = (0, 0, -\alpha_3)$, $P = (0, P^2, -\alpha_3)$.
2. $\Lambda = -2\alpha_2^2 \neq 0$, $V = (0, 0, -\alpha_2)$, $P = (P^1, 0, -\alpha_2)$, $\alpha_1 = 0$.

Случай С₂:

1. $\Lambda = -2\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 + 2\alpha_2\delta\sqrt{2\alpha_2^2 - 2\alpha_3^2}$, $V = \left(0, 0, \delta\sqrt{2\alpha_2^2 - 2\alpha_3^2} \right)$,
 $P = \left(0, 0, \frac{1}{2}\delta\sqrt{2\alpha_2^2 - 2\alpha_3^2} - \alpha_2 \right)$, $\alpha_1 = \alpha_3$, $\delta = \pm 1$.
2. $\Lambda = 4\alpha_2^2$, $V = \left(\delta_2\sqrt{2\sqrt{2} - 2\alpha_2}, \delta_2\sqrt{2\sqrt{2} - 2\alpha_2}\delta_1(1 + \sqrt{2}), 0 \right)$,
 $P = \left(\delta_2(2 + \sqrt{2})\alpha_2\sqrt{2\sqrt{2} - 2} - P^2\delta_1\sqrt{2} - P^2\delta_1, P^2, -2\alpha_2 \right)$,
 $\alpha_1 = \delta_1(1 + \sqrt{2})\alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_2\delta_1(1 - \sqrt{2})$, $\delta_1 = \pm 1$, $\delta_2 = \pm 1$.

2. ИНВАРИАНТНЫЕ СОЛИТОНЫ РИЧЧИ ТРЕХМЕРНЫХ НЕУНИМОДУЛЯРНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП ЛИ

В данном разделе докажем теорему 5. Для этого рассмотрим систему уравнений (3), определяющую инвариантные солитоны Риччи, систему уравнений (4) определяющую симметричность тензора Риччи, а также систему уравнений (5) — условие тривиальности инвариантного солитона. Заметим, что в силу тензорного вида левой и правой частей уравнения (3) все вычисления достаточно провести для базиса теоремы 4.

Случай А. Условие (4) в данном случае запишется в виде

$$\cos(\alpha_3)V^1\alpha_1 + \sin(\alpha_3)V^2\alpha_2 = 0, \quad \sin(\alpha_3)V^1\alpha_1 - \cos(\alpha_3)V^2\alpha_2 = 0.$$

Поэтому имеет место один из следующих случаев

- (i) $V = (0, 0, V^3)$;
- (ii) $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0$;
- (iii) $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$.

Рассмотрим их последовательно.

(i) В данном случае уравнение солитона (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
0 &= -P^1 \alpha_1 \sin(\alpha_3) - P^2 \alpha_1 \cos(\alpha_3), \\
0 &= P^1 \alpha_2 \cos(\alpha_3) - P^2 \alpha_2 \sin(\alpha_3), \\
\cos(\alpha_3) \sin(\alpha_3) \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \sin(\alpha_3) \cos(\alpha_3) + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3) V^3 \alpha_1 - \frac{1}{2} \cos(\alpha_3) V^3 \alpha_2 &= \\
&= -P^3 (\alpha_2 \cos(\alpha_3) - \alpha_1 \cos(\alpha_3)), \\
\frac{1}{2} \cos^2(\alpha_3) \alpha_1^2 + \cos^2(\alpha_3) \alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{2} \cos^2(\alpha_3) \alpha_2^2 - \sin(\alpha_3) V^3 \alpha_1 - & \\
(6) \quad & - \alpha_1^2 - \sin(\alpha_3) V^3 \alpha_2 - \alpha_2^2 = -\Lambda, \\
-\frac{3}{2} \cos^2(\alpha_3) \alpha_1^2 - \cos^2(\alpha_3) \alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{2} \cos^2(\alpha_3) \alpha_2^2 + 2 \sin(\alpha_3) V^3 \alpha_1 + & \\
& + \sin(\alpha_3) V^3 \alpha_2 + (V^3)^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1^2 = 2P^3 \alpha_1 \sin(\alpha_3) + \Lambda, \\
\frac{1}{2} \cos^2(\alpha_3) \alpha_1^2 - \cos^2(\alpha_3) \alpha_1 \alpha_2 - \frac{3}{2} \cos^2(\alpha_3) \alpha_2^2 + \sin(\alpha_3) V^3 \alpha_1 + & \\
& + 2 \sin(\alpha_3) V^3 \alpha_2 + (V^3)^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 = 2P^3 \alpha_2 \sin(\alpha_3) + \Lambda.
\end{aligned}$$

Решениями системы равенств (6) являются

- (1) $\Lambda = 0$, $V = (0, 0, V^3)$, $P = (0, P^2, 0)$, $\alpha_1 = -\delta V^3$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \delta \frac{\pi}{2}$,
 $\delta = \pm 1$,
- (2) $\Lambda = 0$, $V = (0, 0, V^3)$, $P = (P^1, 0, 0)$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -\delta V^3$, $\alpha_3 = \delta \frac{\pi}{2}$,
 $\delta = \pm 1$,
- (3) $\Lambda = 2(V^3)^2$, $V = (0, 0, V^3)$, $P = (0, P^2, V^3)$, $\alpha_1 = \delta V^3$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \delta \frac{\pi}{2}$,
 $\delta = \pm 1$,
- (4) $\Lambda = 2(V^3)^2$, $V = (0, 0, V^3)$, $P = (P^1, 0, V^3)$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \delta V^3$, $\alpha_3 = \delta \frac{\pi}{2}$,
 $\delta = \pm 1$,
- (5) $\Lambda = -\frac{2(V^3)^3(\sin^2(\alpha_3)[V^3 - 2P^3] + \cos^2(\alpha_3)V^3 - V^3)}{\sin^2(\alpha_3)(V^3 - 2P^3)^2}$, $V = (0, 0, V^3)$,
 $P = (0, 0, P^3)$, $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{(V^3)^2}{\sin(\alpha_3)(V^3 - 2P^3)}$,
- (6) $\Lambda = (V^3)^2 + \delta V^3 \alpha_1 + \delta V^3 \sqrt{(V^3)^2 - \alpha_1^2}$, $V = (0, 0, V^3)$, $\delta = \pm 1$
 $P = \left(0, 0, \frac{1}{2} V^3 + \frac{1}{2} \delta \alpha_1 + \frac{1}{2} \delta \sqrt{(V^3)^2 - \alpha_1^2}\right)$, $\alpha_2 = \sqrt{(V^3)^2 - \alpha_1^2}$, $\alpha_3 = \delta \frac{\pi}{2}$.

Проверим, какие из полученных солитонов тривиальны, а какие нет.

Заметим, что в рассматриваемом случае условие (5) тривиальности солитона, равносильно системе уравнений вида

$$\begin{aligned}
(7) \quad & P^3 (\alpha_2 \cos(\alpha_3) - \alpha_1 \cos(\alpha_3)) = 0, \quad P^3 \alpha_1 \sin(\alpha_3) = 0, \quad P^3 \alpha_2 \sin(\alpha_3) = 0, \\
& P^1 \alpha_1 \sin(\alpha_3) + P^2 \alpha_1 \cos(\alpha_3) = 0, \quad -P^1 \alpha_2 \cos(\alpha_3) + P^2 \alpha_2 \sin(\alpha_3) = 0.
\end{aligned}$$

1. Пусть $\Lambda = 0$, $V = (0, 0, V^3)$, $P = (0, P^2, 0)$, $\alpha_1 = -\delta V^3$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \delta \frac{\pi}{2}$, $\delta = \pm 1$. Непосредственной подстановкой в систему (7) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи.

2. Пусть $\Lambda = 0$, $V = (0, 0, V^3)$, $P = (P^1, 0, 0)$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -\delta V^3$, $\alpha_3 = \delta \frac{\pi}{2}$, $\delta = \pm 1$. Непосредственной подстановкой в систему (7) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи.

3. Пусть $\Lambda = 2(V^3)^2$, $V = (0, 0, V^3)$, $P = (0, P^2, V^3)$, $\alpha_1 = \delta V^3$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \delta \frac{\pi}{2}$, $\delta = \pm 1$. Непосредственной подстановкой в систему (7) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи тогда и только тогда, когда $V^3 = 0$.

4. Пусть $\Lambda = 2(V^3)^2$, $V = (0, 0, V^3)$, $P = (P^1, 0, V^3)$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \delta V^3$, $\alpha_3 = \delta \frac{\pi}{2}$, $\delta = \pm 1$. Непосредственной подстановкой в систему (7) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи тогда и только тогда, когда $V^3 = 0$.

5. Пусть $\Lambda = -\frac{2(V^3)^3(\sin^2(\alpha_3)V^3 - 2\sin^2(\alpha_3)P^3 + \cos^2(\alpha_3)V^3 - V^3)}{\sin^2(\alpha_3)(V^3 - 2P^3)^2}$, $V = (0, 0, V^3)$, $P = (0, 0, P^3)$, $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{(V^3)^2}{\sin(\alpha_3)(V^3 - 2P^3)}$. Непосредственной подстановкой в систему (7) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи тогда и только тогда, когда $V^3 = 0$ или $P^3 = 0$.

6. Пусть $\Lambda = (V^3)^2 + \delta V^3 \alpha_1 + \delta V^3 \sqrt{(V^3)^2 - \alpha_1^2}$, $V = (0, 0, V^3)$, $\delta = \pm 1$, $P = \left(0, 0, \frac{1}{2}V^3 + \frac{1}{2}\delta\alpha_1 + \frac{1}{2}\delta\sqrt{(V^3)^2 - \alpha_1^2}\right)$, $\alpha_2 = \sqrt{(V^3)^2 - \alpha_1^2}$, $\alpha_3 = \delta \frac{\pi}{2}$. Непосредственной подстановкой в систему (7) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи тогда и только тогда, когда $V^3 = -\delta\alpha_1$.

(ii) В данном случае уравнение солитона (3) примет вид

$$\begin{aligned}
& -V^2V^3 = 0, \\
& -\frac{1}{2}\alpha_1 \cos(\alpha_3)V^2 = -P^1\alpha_1 \sin(\alpha_3) - P^2\alpha_1 \cos(\alpha_3), \\
& \cos(\alpha_3) \sin(\alpha_3)\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\cos(\alpha_3)V^3\alpha_1 = P^3\alpha_1 \cos(\alpha_3), \\
(8) \quad & \frac{1}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_1^2 + \sin(\alpha_3)V^3\alpha_1 + (V^3)^2 = \Lambda, \\
& \frac{1}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_1^2 - \sin(\alpha_3)V^3\alpha_1 + (V^2)^2 - \alpha_1^2 = -\Lambda, \\
& -\frac{3}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_1^2 + 2\sin(\alpha_3)V^3\alpha_1 + (V^3)^2 - (V^2)^2 + \alpha_1^2 = 2P^3\alpha_1 \sin(\alpha_3) + \Lambda.
\end{aligned}$$

Из первого уравнения системы заключаем, что либо $V^2 = 0$, либо $V^3 = 0$. Если $V^2 = 0$, то попадаем в рассмотренный выше случай (i). Если $V^3 = 0$, то система (8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\alpha_1 \cos(\alpha_3)V^2 = -P^1\alpha_1 \sin(\alpha_3) - P^2\alpha_1 \cos(\alpha_3), \\
& \cos(\alpha_3) \sin(\alpha_3)\alpha_1^2 = P^3\alpha_1 \cos(\alpha_3), \\
& \frac{1}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_1^2 = \Lambda, \\
& \frac{1}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_1^2 + (V^2)^2 - \alpha_1^2 = -\Lambda, \\
& -\frac{3}{2}\cos^2(\alpha_3)\alpha_1^2 - (V^2)^2 + \alpha_1^2 = 2P^3\alpha_1 \sin(\alpha_3) + \Lambda.
\end{aligned}$$

Данная система имеет четыре решения: $\Lambda = 0$, $V = (0, \pm\alpha_1, 0)$, $P = (0, P^2, 0)$, $\alpha_3 = \pm\frac{\pi}{2}$. Непосредственной подстановкой в условие (5) убеждаемся, что данные солитоны являются тривиальными.

(iii) В данном случае (аналогично случаю (ii)) находим четыре решения системы (3): $\Lambda = 0$, $V = (\pm\alpha_2, 0, 0)$, $P = (P^1, 0, 0)$, $\alpha_3 = \pm\frac{\pi}{2}$. Затем убеждаемся, что данные солитоны являются тривиальными.

Случай В. В данном случае уравнение солитона (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
& (V^3)^2 = 0, \\
& -\frac{1}{2}(\alpha_4 + 2V^2)V^3 = -P^3\alpha_4, \\
& -V^1V^2 + \frac{1}{2}V^1\alpha_4 - \alpha_2V^2 + \alpha_2\alpha_4 = P^1\alpha_4 - P^2\alpha_2 - P^3\alpha_1, \\
& \frac{1}{2}V^1\alpha_4 - V^1V^2 - \alpha_1V^3 + \alpha_2\alpha_4 = P^1\alpha_4 - P^2\alpha_2 - P^3\alpha_1, \\
& 2V^3V^1 + 2\alpha_2V^3 + \alpha_3V^3 - \frac{1}{2}\alpha_4^2 = 2P^3\alpha_2 + \Lambda, \\
& -\frac{1}{2}\alpha_4^2 + (V^2)^2 - \alpha_3V^3 + \frac{1}{2}\alpha_4V^2 - V^3V^1 - \alpha_2V^3 = -P^3\alpha_3 - \Lambda, \\
& -V^3V^1 - \alpha_2V^3 - 2\alpha_3V^3 - \frac{1}{2}\alpha_4V^2 - \frac{1}{2}\alpha_4^2 + (V^2)^2 = -P^3\alpha_3 - \Lambda, \\
& (V^1)^2 + V^1\alpha_3 + V^2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 = 2P^1\alpha_3 + 2P^2\alpha_1.
\end{aligned} \tag{9}$$

Из первого уравнения системы сразу же получаем $V^3 = 0$.

Условие (4) в данном случае запишется в виде

$$V^2\alpha_2 = 0, \quad V^2\alpha_4 = 0.$$

Поэтому имеет место одна из следующих возможностей

- (i) $V = (V^1, 0, 0)$;
- (ii) $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$.

Рассмотрим их последовательно.

(i) В данном случае уравнение солитона (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
& 0 = -P^3\alpha_4, \\
& \frac{1}{2}V^1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_4 = P^1\alpha_4 - P^2\alpha_2 - P^3\alpha_1, \\
& -\frac{1}{2}\alpha_4^2 = 2P^3\alpha_2 + \Lambda, \\
& -\frac{1}{2}\alpha_4^2 = -P^3\alpha_3 - \Lambda, \\
& (V^1)^2 + V^1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 = 2P^1\alpha_3 + 2P^2\alpha_1.
\end{aligned}$$

Из первого, третьего и четвертого уравнений следует, что $\alpha_4 = 0$, и система упрощается ещё раз

$$\begin{aligned}
& 0 = -P^2\alpha_2 - P^3\alpha_1, \\
& 0 = 2P^3\alpha_2 + \Lambda, \\
& 0 = -P^3\alpha_3 - \Lambda, \\
& (V^1)^2 + V^1\alpha_3 - \alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 = 2P^1\alpha_3 + 2P^2\alpha_1.
\end{aligned} \tag{10}$$

Решениями системы равенств (10) являются

- (1) $V = (V^1, 0, 0)$, $P = \left(\frac{(V^1 + \alpha_2)^2 \alpha_2^2 - \Lambda \alpha_1^2}{4\alpha_2^3}, \frac{\Lambda \alpha_1}{2\alpha_2^2}, -\frac{\Lambda}{2\alpha_2} \right)$, $\alpha_3 = 2\alpha_2$, $\alpha_4 = 0$,
- (2) $\Lambda = 0$, $V = (V^1, 0, 0)$, $P = \left(\frac{(V^1 + \alpha_2)(V^1 + \alpha_3 - \alpha_2)\alpha_2\alpha_3}{2\alpha_2\alpha_3^2}, 0, 0 \right)$, $\alpha_4 = 0$,
- (3) $\Lambda = 0$, $V = (V^1, 0, 0)$, $P = \left(\frac{V^1(\alpha_3 + V^1) - 2P^2\alpha_1}{2\alpha_3}, P^2, 0 \right)$, $\alpha_2 = 0$,
 $\alpha_4 = 0$,
- (4) $\Lambda = 0$, $V = (\pm\alpha_2, 0, 0)$, $P = (P^1, 0, 0)$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$.

Проверим, какие из полученных солитонов тривиальны, а какие нет.

Заметим, что в рассматриваемом случае условие тривиальности солитона (5) равносильно системе уравнений вида

$$(11) \quad P^3\alpha_3 = 0, \quad P^3\alpha_2 = 0, \quad P^1\alpha_3 + P^2\alpha_1 = 0, \quad P^2\alpha_2 + P^3\alpha_1 = 0.$$

1. Пусть $V = (V^1, 0, 0)$, $P = \left(\frac{(V^1 + \alpha_2)^2 \alpha_2^2 - \Lambda \alpha_1^2}{4\alpha_2^3}, \frac{\Lambda \alpha_1}{2\alpha_2^2}, -\frac{\Lambda}{2\alpha_2} \right)$, $\alpha_3 = 2\alpha_2$, $\alpha_4 = 0$. Непосредственной подстановкой в систему (11) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи тогда и только тогда, когда $\Lambda = 0$ и $V^1 = -\alpha_2$.

2. Пусть $\Lambda = 0$, $V = (V^1, 0, 0)$, $P = \left(\frac{(V^1 + \alpha_2)(V^1 + \alpha_3 - \alpha_2)\alpha_2\alpha_3}{2\alpha_2\alpha_3^2}, 0, 0 \right)$, $\alpha_4 = 0$. Непосредственной подстановкой в систему (11) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи тогда и только тогда, когда $V^1 = -\alpha_2$ или $V^1 = \alpha_2 - \alpha_3$.

3. Пусть $\Lambda = 0$, $V = (V^1, 0, 0)$, $P = \left(\frac{V^1(\alpha_3 + V^1) - 2P^2\alpha_1}{2\alpha_3}, P^2, 0 \right)$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 0$. Непосредственной подстановкой в систему (11) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи тогда и только тогда, когда $V^1 = 0$ или $V^1 = -\alpha_3$.

4. Пусть $\Lambda = 0$, $V = (\pm\alpha_2, 0, 0)$, $P = (P^1, 0, 0)$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$. Непосредственной подстановкой в систему (11) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи.

(ii) В данном случае уравнение солитона (3) имеет вид

$$(12) \quad \begin{aligned} -V^1V^2 &= -P^3\alpha_1, \\ 0 &= \Lambda, \\ (V^2)^2 &= -P^3\alpha_3 - \Lambda, \\ (V^1)^2 + V^1\alpha_3 + V^2\alpha_1 &= 2P^1\alpha_3 + 2P^2\alpha_1. \end{aligned}$$

Решениями системы равенств (12) является: $\Lambda = 0$, $V = \left(-\frac{V^2\alpha_1}{\alpha_3}, V^2, 0 \right)$,
 $P = \left(\frac{\alpha_1((V^2)^2\alpha_1 - 2P^2\alpha_3^2)}{2\alpha_3^3}, P^2, -\frac{(V^2)^2}{\alpha_3} \right)$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 0$. Непосредственной подстановкой в систему (5) убеждаемся, что данное решение является тривиальным солитоном Риччи тогда и только тогда, когда $V^2 = 0$ или $\alpha_1 = 0$.

Случай \mathcal{C}_1 . Условие (4) запишется в виде

$$V^1\alpha_1 - V^2\alpha_2 = 0, \quad V^1\alpha_3 - V^2\alpha_1 = 0.$$

Поэтому имеет место один из следующих случаев

- (i) $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$;
- (ii) $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_2 = 0$;
- (iii) $V = (V^1, V^1\alpha_1/\alpha_2, V^3)$ и $\alpha_3 = \alpha_1^2/\alpha_2$.

Рассмотрим их последовательно.

(i) В данном случае уравнение солитона (3) примет вид

$$(13) \quad \begin{aligned} 0 &= -P^1\alpha_3, \\ -V^2V^3 &= 0, \\ (V^3)^2 - V^3\alpha_3 &= -\Lambda, \\ (V^2)^2 + V^3\alpha_3 - \alpha_3^2 &= \Lambda, \\ (V^2)^2 - (V^3)^2 + 2V^3\alpha_3 - \alpha_3^2 &= 2P^3\alpha_3 + \Lambda. \end{aligned}$$

Решениями системы равенств (13) являются

- (1) $\Lambda = 0, V = (0, \pm\alpha_3, 0), P = (0, P^2, 0)$,
- (2) $\Lambda = -2\alpha_3^2, V = (0, 0, -\alpha_3), P = (0, P^2, -\alpha_3)$,
- (3) $\Lambda = 0, V = (0, 0, \alpha_3), P = (0, P^2, 0)$.

Проверим, какие из полученных солитонов тривиальны, а какие нет.

Заметим, что в рассматриваемом случае условие тривиальности солитона (5) равносильно следующей системе уравнений

$$P^1\alpha_3 = 0, \quad P^3\alpha_3 = 0.$$

Таким образом, солитоны 1 и 3 являются тривиальными, а солитон 2 — нет.

(ii) В данном случае уравнение солитона (3) имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &= P^1\alpha_1, \\ 0 &= -P^1\alpha_3 - P^2\alpha_1, \\ -\alpha_1\alpha_3 &= 0, \\ V^3\alpha_3 - \alpha_3^2 &= \Lambda, \\ (V^3)^2 - V^3\alpha_3 &= -\Lambda, \\ -(V^3)^2 + 2V^3\alpha_3 - \alpha_3^2 &= 2P^3\alpha_3 + \Lambda. \end{aligned}$$

Так как $\alpha_3 \neq \alpha_2 = 0$, то из третьего уравнения системы получаем $\alpha_1 = 0$. Но тогда мы возвращаемся к случаю (i). Таким образом, в этом случае новых решений нет.

(iii) В данном случае уравнение солитона (3) примет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha_2^3 - 2V^3\alpha_2^2 + ((V^1)^2 + (V^3)^2 + \alpha_1^2)\alpha_2 - V^3\alpha_1^2}{\alpha_2} = -2P^3\alpha_2 - \Lambda, \\
& \frac{(V^1)^2\alpha_1^2 - (V^3)^2\alpha_2^2 + 2V^3\alpha_1^2\alpha_2 + V^3\alpha_2^3 - \alpha_1^4 - \alpha_1^2\alpha_2^2}{\alpha_2} = 2P^3\alpha_1^2 + \Lambda\alpha_2, \\
(14) \quad & \frac{(V^1)^2\alpha_1^2 - (V^1)^2\alpha_2^2 + V^3\alpha_1^2\alpha_2 + V^3\alpha_2^3 - \alpha_1^4 - \alpha_2^4}{\alpha_2^2} = \Lambda, \\
& (V^3\alpha_2 - \alpha_1^2)V^1 = -\alpha_1(P^1\alpha_1 + P^2\alpha_2), \\
& -\alpha_1((V^1)^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2) = 0, \\
& -\frac{(V^3 - \alpha_2)V^1\alpha_1}{\alpha_2} = P^1\alpha_1 + P^2\alpha_2.
\end{aligned}$$

Решениями системы равенств (14) являются

- (1) $\Lambda = 0$, $V = (0, 0, \alpha_2)$, $P = (P^1, 0, 0)$, $\alpha_1 = 0$,
- (2) $\Lambda = -2\alpha_2^2$, $V = (0, 0, -\alpha_2)$, $P = (P^1, 0, -\alpha_2)$, $\alpha_1 = 0$.

Заметим, что в рассматриваемом случае условие тривиальности солитона (5) равносильно системе уравнений вида

$$P^3\alpha_2 = 0, \quad \frac{P^3\alpha_1^2}{\alpha_2} = 0, \quad \frac{P^1\alpha_1^2}{\alpha_2} + P^2\alpha_1 = 0, \quad P^1\alpha_1 + P^2\alpha_2 = 0.$$

Таким образом, солитон 1 является тривиальными, а солитон 2 — нет.

Случай C_2 . Условие (4) запишется в виде

$$V^1\alpha_1 - V^2\alpha_2 = 0, \quad V^1\alpha_2 + V^2\alpha_3 = 0.$$

Поэтому имеет место один из следующих случаев

- (i) $V = (0, 0, V^3)$;
- (ii) $V = (V^1, V^1\alpha_1/\alpha_2, V^3)$ и $\alpha_3 = -\alpha_2^2/\alpha_1$.

Рассмотрим их последовательно.

(i) В данном случае уравнение солитона (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
(15) \quad & 0 = -P^1\alpha_2 - P^2\alpha_1, \\
& 0 = -P^1\alpha_3 + P^2\alpha_2, \\
& \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3)(V^3 - 2\alpha_2) = P^3(\alpha_1 + \alpha_3), \\
& (V^3)^2 - 3\alpha_2V^3 + 2\alpha_2^2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 = -2P^3\alpha_2 - \Lambda, \\
& -\frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^3)^2 + 3\alpha_2V^3 - 2\alpha_2^2 = 2P^3\alpha_2 + \Lambda, \\
& \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 + 2\alpha_2V^3 - 2\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3 = \Lambda.
\end{aligned}$$

Система (15) имеет единственное решение: $\Lambda = -2\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 + 2\alpha_2\delta\sqrt{2\alpha_2^2 - 2\alpha_3^2}$, $V = (0, 0, \delta\sqrt{2\alpha_2^2 - 2\alpha_3^2})$, $P = (0, 0, \frac{1}{2}\delta\sqrt{2\alpha_2^2 - 2\alpha_3^2} - \alpha_2)$, $\alpha_1 = \alpha_3$, $\delta = \pm 1$. Непосредственной подстановкой в систему (5) убеждаемся, что данное решение является нетривиальным солитоном Риччи.

(ii) В данном случае уравнение солитона (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
(16) \quad & \frac{(2(V^1)^2 + 2(V^3)^2 - 6V^3\alpha_2 + 4\alpha_2^2)\alpha_1^2 + \alpha_2^4 - \alpha_1^4}{2\alpha_1^2} = -2P^3\alpha_2 - \Lambda, \\
& \frac{V^1(2V^3\alpha_2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{2\alpha_2} = -P^1\alpha_2 - P^2\alpha_1, \\
& \frac{(2(V^1)^2 - \alpha_2^2)\alpha_1^4 - 2\alpha_2^2(V^3 - \alpha_2)(V^3 - 2\alpha_2)\alpha_1^2 + \alpha_2^6}{2\alpha_1^2\alpha_2^2} = 2P^3\alpha_2 + \Lambda, \\
& \frac{(2(V^1)^2 + \alpha_2^2)\alpha_1^4 + (-2(V^1)^2\alpha_2^2 + 4V^3\alpha_2^3 - 6\alpha_2^4)\alpha_1^2 + \alpha_2^6}{2\alpha_1^2\alpha_2^2} = \Lambda, \\
& \frac{-2(V^1)^2\alpha_1^2 + V^3\alpha_1^2\alpha_2 - V^3\alpha_2^3 - 2\alpha_1^2\alpha_2^2 + 2\alpha_2^4}{2\alpha_2\alpha_1} = \frac{P^3(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{\alpha_1}, \\
& -\frac{V^1((2V^3 - \alpha_2)\alpha_1^2 - \alpha_2^3)}{2\alpha_1\alpha_2} = \frac{\alpha_2(P^1\alpha_2 + P^2\alpha_1)}{\alpha_1}.
\end{aligned}$$

Если сложить пятое уравнение и шестое, домноженное на α_1/α_2 , то получим

$$V^1V^3(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) = 0.$$

Если $V^1 = 0$, то мы возвращаемся к случаю (i). Случай $\alpha_1^2 = \alpha_2^2$ невозможен, так как $\alpha_1 \neq -\alpha_3 = \alpha_2^2/\alpha_1$. Таким образом, $V^3 = 0$. Кроме того, выразим P^3 и Λ из первого и третьего уравнений:

$$\begin{aligned}
P^3 &= \frac{-(V^1)^2\alpha_1^4 + \alpha_1^2\alpha_2^4 - \alpha_2^6}{2\alpha_1^2\alpha_2^3}, \\
\Lambda &= \frac{2(V^1)^2\alpha_1^4 - 2(V^1)^2\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^4\alpha_2^2 - 6\alpha_1^2\alpha_2^4 + \alpha_2^6}{2\alpha_1^2\alpha_2^2}.
\end{aligned}$$

Подставляя в (16), получим

$$\begin{aligned}
& \frac{2(V^1)^2\alpha_1^4 - \alpha_1^4\alpha_2^2 - 4\alpha_1^2\alpha_2^4 + \alpha_2^6}{2\alpha_1^2\alpha_2^2} = \frac{-2(V^1)^2\alpha_1^2 + \alpha_1^4 - 4\alpha_1^2\alpha_2^2 - \alpha_2^4}{2\alpha_1^2}, \\
& \frac{-(V^1)^2\alpha_1^2 - \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^4}{\alpha_2\alpha_1} = -\frac{((V^1)^2\alpha_1^4 - \alpha_1^2\alpha_2^4 + \alpha_2^6)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{2\alpha_1^3\alpha_2^3}, \\
& -\frac{V^1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{2\alpha_2} = -P^1\alpha_2 - P^2\alpha_1.
\end{aligned}$$

Выражая из первого уравнения $(V^1)^2 = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\alpha_2^2/\alpha_1^2$ (что также дает $|\alpha_1| > |\alpha_2|$) и подставляя во второе, получим

$$\alpha_1^6 - 7\alpha_1^4\alpha_2^2 + 7\alpha_1^2\alpha_2^4 - \alpha_2^6 = 0.$$

Из всех решений данного уравнения, условию $|\alpha_1| > |\alpha_2|$ удовлетворяют $\alpha_1 = \delta_1(1 + \sqrt{2})\alpha_2$, $\delta_1 = \pm 1$. Тогда $V^1 = \delta_2\sqrt{2\sqrt{2} - 2}\alpha_2$, $\delta_2 = \pm 1$. В системе (16) останется единственное уравнение, из которого мы выразим

$$P^1 = \delta_2(2 + \sqrt{2})\alpha_2\sqrt{2\sqrt{2} - 2} - P^2\delta_1\sqrt{2} - P^2\delta_1.$$

Таким образом, получено решение:

$$\begin{aligned}
\Lambda &= 4\alpha_2^2, \quad V = \left(\delta_2\sqrt{2\sqrt{2} - 2}\alpha_2, \delta_2\sqrt{2\sqrt{2} - 2}\alpha_2\delta_1(1 + \sqrt{2}), 0\right), \quad \delta_1 = \pm 1, \quad \delta_2 = \pm 1, \\
P &= \left(\delta_2(2 + \sqrt{2})\alpha_2\sqrt{2\sqrt{2} - 2} - P^2\delta_1\sqrt{2} - P^2\delta_1, P^2, -2\alpha_2\right), \quad \alpha_1 = \delta_1(1 + \sqrt{2})\alpha_2,
\end{aligned}$$

$\alpha_3 = \alpha_2 \delta_1 (1 - \sqrt{2})$. Непосредственной подстановкой в систему (5) убеждаемся, что данное решение является нетривиальным солитоном Риччи. Теорема доказана.

Замечание 1. Инвариантные солитоны Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью исследовались в [17].

Замечание 2. Теорема 5 дает ответ на гипотезу Л.Цербо в лоренцевом случае. Более того, в этом случае даже для связности Леви-Чивиты существуют нетривиальные инвариантные солитоны Риччи.

REFERENCES

- [1] E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. II*, Annales Ecole norm. (3), **42** (1925), 17–88. JFM 51.0582.01
- [2] G. Muniraja, *Manifolds admitting a semi-symmetric metric connection and a generalization of Schur's theorem*, Int. J. Contemp. Math. Sci., **3**:25-28 (2008), 1223–1232. Zbl 1169.53329
- [3] I. Agricola, C. Thier, *The geodesics of metric connections with vectorial torsion*, Ann. Global Anal. Geom., **26**:4 (2004), 321–332. Zbl 1130.53029
- [4] C. Murathan, C. Özgür, *Riemannian manifolds with a semi-symmetric metric connection satisfying some semisymmetry conditions*, Proc. Est. Acad. Sci., **57**:4 (2008), 210–216. Zbl 1218.53018
- [5] H.B. Yilmaz, F.Ö. Zengin, S.A. Uysal, *On a semi symmetric metric connection with a special condition on a Riemannian manifold*, Eur. J. Pure Appl. Math., **4**:2 (2011), 153–161. Zbl 1389.53024
- [6] F.Ö. Zengin, S.A. Demirbağ, S.A. Uysal, Y.H. Bağdatli, *Some vector fields on a Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection*, Bull. Iran. Math. Soc., **38**:2 (2012), 479–490. Zbl 1303.53025
- [7] I. Agricola, M. Kraus, *Manifolds with vectorial torsion*, Differ. Geom. Appl., **45** (2016), 130–147. Zbl 1339.53046
- [8] K. Yano, *On semi-symmetric metric connection*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., **15** (1970), 1579–1586. Zbl 0213.48401
- [9] B. Barua, A.Kr. Ray, *Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold*, Indian J. Pure Appl. Math., **16**:7 (1985), 736–740. Zbl 0577.53017
- [10] U.C. De, B.K. De, *Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold*, Istanbul Ünv. Fen Fak. Mat. Derg, **54** (1995), 111–117. Zbl 0909.53011
- [11] L.F. Di Cerbo, *Generic properties of homogeneous Ricci solitons*, Adv. Geom, **14**:2 (2014), 225–237. Zbl 1295.53071
- [12] P.N. Klepikov, D.N. Oskorbin, *Homogeneous invariant Ricci solitons on four-dimensional Lie groups*, Izvestiya of Altai State University, **85**:1-2 (2015), 115–122.
- [13] P.N. Klepikov, E.D. Rodionov, O.P. Khromova, *Invariant Ricci solitons on three-dimensional metric Lie groups with semi-symmetric connection*, Russ. Math., **65**:8 (2021), 70–74. Zbl 1479.53058
- [14] E.D. Rodionov, V.V. Slavskii, L.N. Chibrikova, *Locally conformally homogeneous pseudo-Riemannian spaces*, Sib. Adv. Math., **17**:3 (2007), 186–212. Zbl 1249.53072
- [15] G. Calvaruso, *Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds*, J. Geom. Phys., **57**:4 (2007), 1279–1291. Zbl 1112.53051
- [16] L.A. Cordero, P.E. Parker, *Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups*, Rend. Mat. Appl., VII. Ser., **17**:1 (1997), 129–155. Zbl 0948.53027
- [17] O. Khromova, P. Klepikov, E. Rodionov *Invariant Ricci solitons on metric Lie groups with semi-symmetric connections*, in *Classical and Modern Geometry: Proceedings of the International Conference Dedicated to the 100th Anniversary of the Birth of L.S. Atanasyan*, MPGU, Moscow, 2021, 22–23.

PAVEL NIKOLAEVICH КЛЕПИКОВ, EVGENY DMITRIEVICH RODIONOV, OLESYA PAVLOVNA KHROMOVA
ALTAI STATE UNIVERSITY,
PR. LENINA, 61,
656049, BARNAUL, RUSSIA
Email address: klepikov.math@gmail.com, edr2002@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com