S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 1013–1025 (2023) УДК 519.21
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.062 MSC 60G50

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОЛОСЫ ТРАЕКТОРИЯМИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

В.И. Лотов, В.Р. Ходжибаев

Представлено В.И. Вахтелем

Abstract: We study the distribution of the crossing number of a strip with straight parallel boundaries by trajectories of a stochastic process with independent increments (Levy process). For the distribution under study, we give a number of inequalities, as well as asymptotic representations for unlimitedly expanding strip.

Keywords: stationary stochastic process with independent increments (Levy process), number of strip crossings, probabilistic inequalities.

1. Введение

Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$, $\xi(0) = 0$, — однородный случайный процесс с независимыми приращениями (процесс Леви), выборочные функции которого непрерывны справа. В этом случае $\mathbf{E} \exp\{\lambda\xi(t)\} = \exp\{t\psi(\lambda)\}$ при

Lotov, V.I., Khodjibayev, V.R., On the distribution of the crossing number of a strip by trajectories of a stochastic process with independent increments.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект № FWNF-2022-0010.

Поступила 7 июля 2023 г., опубликована 12 ноября 2023 г.

$\operatorname{Re}\lambda = 0$,

$$\psi(\lambda) = \gamma\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\lambda x} - 1 - \frac{\lambda x}{1+x^2}\right) dS(x), \tag{1}$$

где γ и $\sigma > 0$ — вещественные числа, функция $S(x)$ не убывает на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$,

$$\int\limits_{|x|\le 1} x^2 dS(x) < \infty, \qquad S(-\infty) = S(\infty) = 0.$$

Будем предполагать, что сходится один из интегралов

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{t}\,\mathbf{P}(\xi(t) > 0)\,dt \quad \text{или} \quad \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{t}\,\mathbf{P}(\xi(t) < 0)\,dt. \tag{2}$$

Известно [1], что для этого достаточно, чтобы существовало $\mathbf{E}\xi(1) \neq 0$. Если, к примеру, сходится первый из интегралов (2), то траектория случайного процесса уходит вниз, с вероятностью единица ее верхняя грань конечна, а нижняя грань процесса равна $-\infty$.

Введем случайную величину θ, равную числу пересечений снизу вверх полосы $\{-a < y < b\}$ на координатной плоскости точек (x, y) траекторией случайного процесса $(t, \xi(t))_{t=0}^{\infty}$, здесь $a > 0$, $b > 0$. Нашей целью является изучение распределения этой случайной величины.

Для рассматриваемого случайного процесса определим последовательность марковских моментов:

$$\tau_0^+ = \tau_0^- = 0,$$

$$\tau_i^- = \inf\{t > \tau_{i-1}^+ :\ \xi(t) \le -a\},\ \tau_i^+ = \inf\{t > \tau_i^- :\ \xi(t) \ge b\}, \qquad i \ge 1.$$

Полагаем, что $\inf\varnothing = \infty$. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}(\theta \ge k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty), \qquad k \ge 1.$$

Аналогичным образом определяется случайная величина, равная числу пересечений полосы сверху вниз. Ясно, что количества пересечений полосы снизу вверх и сверху вниз отличаются друг от друга самое большее на единицу. Поэтому мы ограничимся изучением числа пересечений полосы снизу вверх. С другой стороны, изучение пересечений сверху вниз может быть проведено по аналогичной схеме. Известно [1], что условие (2) исключает возможность бесконечного числа пересечений интервала процессом $\xi(t)$.

Изучению распределения числа пересечений полосы посвящены работы многих авторов. Вычисление в точном виде характеристик функционалов в граничных задачах для случайных процессов, связанных с моментом выхода из интервала, в том числе распределения числа пересечений полосы, доступно только в некоторых частных ситуациях.

Некоторые сведения о точных формулах для распределения числа пересечений полосы можно найти в [2]. Поэтому основное внимание в изучении этих характеристик уделяется асимптотическим подходам. Для случайных блужданий, порождённых суммами независимых одинаково распределённых случайных величин, в [3] найдены асимптотические представления для распределения числа пересечений расширяющейся полосы за бесконечный промежуток времени в случаях, когда распределение скачка блуждания имеет лёгкий или тяжёлый правый хвост. В [4] получены полные асимптотические разложения для распределения числа пересечений полосы за конечный промежуток времени траекториями целочисленного случайного блуждания с нулевым средним. При этом предполагается, что выполнено условие Крамера на распределение скачков и ширина полосы неограниченно возрастает с различными скоростями вместе с расширением рассматриваемого промежутка времени. Аналогичная задача для однородных случайных процессов с независимыми приращениями рассматривалась в [5], [6].

В первой части настоящей работы (п. 2) будут установлены асимптотические представления для распределения числа пересечений снизу вверх расширяющей полосы траекториями случайного процесса $\xi(t)$ в том случае, когда это число пересечений конечно с вероятностью единица. Тем самым результаты работы [3], полученные для случайных блужданий, порождённых суммами независимых одинаково распределённых случайных величин, распространяются на процессы с непрерывным временем. Во второй части (п. 3) рассматривается задача получения неравенств для вероятности $\mathbf{P}(\theta \geq k)$. Эти оценки являются естественным дополнением к имеющимся асимптотическим результатам. Аналогичные неравенства для случайных блужданий, порождённых суммами независимых одинаково распределённых случайных величин, получены ранее в [2]. В настоящей работе рассматриваются различные ограничения на распределение процесса и используются некоторые приёмы и методы из [2], [3].

2. Асимптотика распределения числа пересечений полосы

Здесь мы будем предполагать, что $\mathbf{E}\xi(1) < 0$.

Как правило, те или иные характеристики функционалов в задачах с двумя границами первоначально выражаются через распределения функционалов от траекторий случайных процессов, возникающих в задачах с одной границей. Следуя этой схеме, мы будем использовать в дальнейшем распределение супремума траектории процесса и предельное распределение величины перескока через бесконечно удалённый отрицательный уровень.

Пусть для $\mathrm{Re}\,\lambda = 0,\ \ x \ge 0,\ \ y \le 0,$

$$\psi(\lambda) = \log \mathbf{E}\, e^{\lambda\xi(1)}, \qquad \zeta = \sup_{t\ge 0} \xi(t), \qquad Q(x) = \mathbf{P}(\zeta \ge x),$$

$$\eta_-(y) = \inf\{t \ge 0 :\ \xi(t) \le y\}, \qquad \chi_-(y) = \xi(\eta_-(y)) - y.$$

Имеет место следующее соотношение: для $k \ge 2$

$$\mathbf{P}(\theta \ge k) = \int_b^{\infty} \int_{-\infty}^{+0} Q(a+b-x)\,\mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx)\,\mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy). \quad (3)$$

Эту формулу нетрудно понять: если траектория процесса $k-1$ раз пересекла полосу снизу вверх и в момент τ_{k-1}^+ значение процесса оказалось равным $y \ge b$, то для того, чтобы произошло еще одно пересечение полосы, стартующая из точки y оставшаяся часть траектории должна пересечь нижнюю границу полосы с неизбежным перескоком, принимающим значение $x \in (-\infty, 0]$. Это обстоятельство отражает множитель $\mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx)$ под интегралом. Множитель $Q(a+b-x)$ под интегралом обеспечивает достижение верхней границы полосы для последующей части траектории.

Далее будем исследовать асимптотическое поведение подынтегрального выражения в (3) при $b \to \infty$. Приведем необходимые сведения.

Из результатов [7] следует, что если $-\infty < \mathbf{E}\xi(1) < 0$, то существует предельное при $y \to -\infty$ собственное распределение

$$\mathbf{P}(\chi_- < x) = \lim_{y\to-\infty} \mathbf{P}(\chi_-(y) < x)$$

величины первого перескока через бесконечно удалённый отрицательный барьер, и имеет место представление

$$\mathbf{E}e^{\lambda\chi_-} = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda|\mathbf{E}\xi(1)|}\,\mathbf{E}\,e^{\lambda\zeta}.$$

Из теоремы 2.1 [8, стр. 230] также следует, что

$$\mathbf{P}(\chi_- < x) = |\mathbf{E}\,\xi(1)|^{-1} \int_{-\infty}^{+0} \int_0^{\infty} S(z+x-y)\,d\mathbf{P}(\zeta \ge y)\,dz,$$

где $S(x)$ — спектральная функция процесса в представлении (1).

Функция $\mathbf{E}\exp\{\lambda\chi_-\}$ будет в дальнейшем нами использоваться, поэтому приведем для нее также другое представление, известное из [8, сл. 3.1, стр.131]. Пусть

$$\bar\eta_-(y) = \inf\{t \ge 0 :\ \xi(t) \le y\}, \qquad \bar\chi_-(y) = \xi(\bar\eta_-(y)) - y, \qquad y \le 0.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\exp\{\lambda\chi_-\} = \frac{1 - \mathbf{E}\,\exp\{\lambda\bar\chi_-(0)\}}{\lambda|\mathbf{E}\,\bar\chi_-(0)|},$$

если $-\infty < \mathbf{E}\,\xi(1) \le 0$ и $\mathbf{P}(\bar\eta_-(0) > 0) = 1$.

Известно [1], что для выполнения условия $\mathbf{P}(\bar{\eta}_-(0) > 0) = 1$ достаточно потребовать, чтобы

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathbf{P}(\xi(t) < 0)\,dt < \infty. \tag{4}$$

Достаточные условия сходимости интеграла (4) также приведены в [1].

Нахождение распределения супремума траектории процесса $\xi(t)$ в явном виде доступно лишь в немногих частных ситуациях. Поэтому здесь также приходится использовать асимптотические представления для $Q(x)$, которые известны при различных ограничениях на распределение $\xi(1)$. Рассмотрим эти ситуации более подробно.

В [9] установлено, что

$$Q(x) = \mathbf{P}(\zeta \geq x) \leq e^{-\rho x}, \tag{5}$$

где

$$\rho = \sup\{\lambda \geq 0:\ \mathbf{E}\exp\{\lambda\xi(1)\} \leq 1\} = \sup\{\lambda \geq 0:\ \psi(\lambda) \leq 0\}.$$

Если $\mathbf{E}\,\xi(1) < 0$ и $\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi(1)\} < \infty$ при некотором $\lambda > 0$, то и $\rho > 0$. Пусть

$$\mu := \sup\{\lambda \geq 0:\ \mathbf{E}\exp\{\lambda\xi(1)\} < \infty\},$$

тогда $\mu \geq \rho$. Если $\rho > 0$ и $\psi(\rho - 0) < 0$, то $\rho = \mu$.

Сначала рассмотрим случай, когда

$$\rho > 0, \qquad \psi(\rho) = 0, \qquad \psi'(\rho) = \mathbf{E}\,\xi(1)\,e^{\rho\xi(1)} < \infty. \tag{6}$$

Следующая лемма доказана в [8, стр. 214].

Лемма 1. *Пусть выполнено* (6). *Тогда*

$$Q(x) = c\,e^{-\rho x}(1 + \varphi(x)), \tag{7}$$

где $\varphi(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$,

$$c^{-1} = \rho\psi'(\rho)\int_{-\infty}^{0} e^{\rho y}\,dF_-(y),$$

$$F_-(y) = -\int_0^\infty \mathbf{P}(\inf_{0\leq s\leq t}\xi(s) \geq y)\,dt =$$

$$= -\int_0^\infty \mathbf{P}(\bar{\eta}_-(y) > t)\,dt = -\mathbf{E}\,\bar{\eta}_-(y), \qquad y \leq 0.$$

Соотношение (7) и другое выражение для константы c при некоторых дополнительных ограничениях на процесс известны также из [10].

Таким образом, в силу (7) равенство (3) приобретает вид

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = ce^{-\rho(a+b)} \int_b^{\infty} \int_{-\infty}^{+0} e^{\rho x}\, \mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx)\, \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy)$$

$$+ce^{-\rho(a+b)} \int_b^{\infty} \int_{-\infty}^{+0} e^{\rho x} \varphi(a+b-x)\, \mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx)\, \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy). \quad (8)$$

Очевидно, при $y \geq b$ и $b \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{+0} e^{\rho x}\, \mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx) \to h := \int_{-\infty}^{+0} e^{\rho x}\, \mathbf{P}(\chi_- \in dx), \quad (9)$$

поэтому первое слагаемое в правой части (8) равно

$$hce^{-\rho(a+b)} \int_b^{\infty} \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy)(1+o(1)), \qquad b \to \infty.$$

Обратимся ко второму слагаемому в правой части (8). Пусть

$$\varphi_1(z) = \sup_{v \geq z} \varphi(v).$$

Тогда

$$\varphi(a+b-x) \leq \varphi_1(a+b-x) \leq \varphi_1(a+b)$$

в силу того, что $x \leq 0$, а $\varphi_1(z)$ — невозрастающая функция. При этом $\varphi_1(z) \to 0$, если $z \to \infty$. Поэтому $\varphi_1(a+b) = o(1)$ при $b \to \infty$ и

$$\int_b^{\infty} \int_{-\infty}^{+0} e^{\rho x} \varphi(a+b-x)\, \mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx)\, \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy) =$$

$$= o(1) \int_b^{\infty} \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy).$$

Таким образом, для $k \geq 2$

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = hce^{-\rho(a+b)} \int_b^{\infty} \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy)(1+o(1)) =$$

$$= hce^{-\rho(a+b)} \mathbf{P}(\theta \geq k-1)(1+o(1)).$$

Пользуясь этим рекуррентным соотношением, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}\,\xi(1) < 0$ *и выполнены условия леммы* 1. *Тогда для любого целого* $k \geq 2$ *и произвольного* $a > 0$ *при* $b \to \infty$ *имеет место*

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = \mathbf{P}(\theta \geq 1)(hc)^{k-1} e^{-\rho(k-1)(a+b)}(1 + o(1)),$$

число c *определено в лемме* 1, h *задается формулой* (9).

Рассмотрим далее вероятность $\mathbf{P}(\theta \geq 1)$. Очевидно, что

$$\mathbf{P}(\theta \geq 1) = \int\limits_{-\infty}^{+0} Q(a + b - x)\,\mathbf{P}(\chi_-(-a) \in dx)$$

$$= ce^{-\rho(a+b)} \int\limits_{-\infty}^{+0} e^{\rho x}\,\mathbf{P}(\chi_-(-a) \in dx)(1 + o(1)), \qquad b \to \infty. \tag{10}$$

Если дополнительно потребовать, чтобы $a \to \infty$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+0} e^{\rho x}\,\mathbf{P}(\chi_-(-a) \in dx) \to h.$$

Таким образом, получаем

Следствие 1. *Если в условиях теоремы* 1 *предположить, что* $a \to \infty$ *наряду с* $b \to \infty$, *то для любого целого* $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = (hc)^k e^{-\rho k(a+b)}(1 + o(1)). \tag{11}$$

Асимптотическое представление (11) с экспоненциальной оценкой величины $o(1)$ ранее установлено в [5] при более ограничительных требованиях на распределение процесса.

Замечание. Если число a не растёт, то для вычисления интеграла в (10) можно воспользоваться следующим соотношением из [5]. При $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$

$$\mathbf{E}\exp\{u\eta_-(-a) + \lambda\xi(\eta_-(-a))\} = r_-^{-1}(u,\lambda)\big[r_-(u,\lambda)\big]^{(-\infty,-a]}. \tag{12}$$

Здесь $r_-(u,\lambda)$ — отрицательная компонента безгранично делимой факторизации

$$\frac{u}{u - \psi(\lambda)} = r_-(u,\lambda)\,r_+(u,\lambda),$$

введённой и изученной Б.А. Рогозиным в [1]. В (12) использовано обозначение

$$[g(\lambda)]^D = \int\limits_D e^{\lambda x}\,dG(x), \quad \text{если} \quad g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\,dG(x), \quad \operatorname{Re}\lambda = 0.$$

Левая часть (12) непрерывна в точке $u = 0$, поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+0} e^{\rho x}\,\mathbf{P}(\chi_-(-a) \in dx)$$

$$= \lim_{u\to 0} \mathbf{E} \exp\{u\eta_-(-a) + \rho\chi_-(-a)\} = \lim_{u\to 0} e^{\rho a} r_-^{-1}(u,\rho)\big[r_-(u,\rho)\big]^{(-\infty,-a]}.$$

Для случая, когда

$$\rho > 0, \qquad \psi(\rho) = 0, \qquad \psi'(\rho) = \mathbf{E}\,\xi(1)\,e^{\rho\xi(1)} = \infty,$$

соотношение (7) также имеет место ([8, стр.217]) с другой константой c при некоторых достаточно сложных дополнительных ограничениях. В этих условиях аналоги теоремы 1 и следствия 1 также могут быть получены описанным выше способом.

3. Неравенства для распределения числа пересечений

В этом разделе нашей целью является получение двусторонних оценок для вероятности $\mathbf{P}(\theta \geq k)$ при $\mathbf{E}\,\xi(1) < 0$.

Как отмечалось выше, эта задача для случайных блужданий, порожденных суммами независимых одинаково распределенных случайных величин, при различных ограничениях на распределение скачка блуждания решалась в [2]. Здесь мы будем действовать, в основном, по схеме работы [2].

Заметим, что при $\mathbf{E}\,\xi(1) \neq 0$ вероятности $\mathbf{P}(\theta \geq k)$ могут быть оценены сверху соответствующими вероятностями геометрического распределения. Если $\mathbf{E}\,\xi(1) < 0$, то

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) \leq [\mathbf{P}(\zeta \geq a+b)]^k = Q^k(a+b). \tag{13}$$

Действительно, имеем из (3) при $k \geq 2$

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = \int\limits_b^\infty \int\limits_{-\infty}^{+0} Q(a+b-x)\,\mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx)\,\mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy)$$

$$\leq Q(a+b) \int\limits_b^\infty \mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \leq 0)\,\mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy)$$

$$= Q(a+b)\mathbf{P}(\theta \geq k-1) = Q^k(a+b).$$

При $k=1$ оценка (13) легко получается из первого равенства в (10).

Экспоненциальная оценка сверху для $Q(x)$ содержится в (5) при дополнительном предположении, что $\rho > 0$.

Далее будем заниматься нахождением оценок снизу для $\mathbf{P}(\theta \geq k)$.

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{E}\,\xi(1) < 0$ и для некоторого $r > 0$ в представлении* (1) *выполняется $\int\limits_{-\infty}^{-r} d\,S(x) = 0$. Тогда для $k \geq 1$ имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) \geq Q^k(a+b+r).$$

Доказательство. Распределение положения процесса в момент выхода из полосы во многом определяется распределением скачков процесса, т. е. поведением спектральной функции $S(x)$ в представлении (1). Например, если отрицательные скачки процесса $\xi(t)$ (т. е. скачки вниз) по абсолютной величине не превышают числа r (в условиях теоремы это имеет место), то при всех $y \leq 0$ значение случайной величины $\chi_-(y)$ с вероятностью единица будет не меньше числа $-r$. Поэтому имеют место следующие соотношения: при $k \geq 2$

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = \int\limits_b^\infty \int\limits_{-r}^{+0} Q(a+b-x)\,\mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx)\,\mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy)$$

$$\geq Q(a+b+r)\int_b^\infty\int_{-r}^{+0}\mathbf{P}(\chi_-(-a-y)\in dx)\,\mathbf{P}(\xi(\tau^+_{k-1})\in dy)$$

$$\geq Q(a+b+r)\int_b^\infty \mathbf{P}(\xi(\tau^+_{k-1})\in dy)=Q(a+b+r)\mathbf{P}(\theta\geq k-1).$$

Применяя аналогичные рассуждения для величины $\mathbf{P}(\theta\geq 1)$, получаем требуемое утверждение. Из доказательства теоремы 2 сразу следует

Следствие 2. *Для спектрально положительного процесса $\xi(t)$ с $\mathbf{E}\,\xi(1)<0$ имеет место равенство $\mathbf{P}(\theta\geq k)=Q^k(a+b)$.*

Далее предположим, что функция $Q(x)$ является выпуклой вниз при $x>0$. Перепишем (3) в виде

$$\mathbf{P}(\theta\geq k)=\int_b^\infty \mathbf{E}\,Q(a+b-\chi_-(-a-y))\,\mathbf{P}(\xi(\tau^+_{k-1})\in dy)$$

и воспользуемся неравенством Йенсена для функции Q. Тогда

$$\mathbf{P}(\theta\geq k)\geq\int_b^\infty Q(a+b-\mathbf{E}\chi_-(-a-y))\,\mathbf{P}(\xi(\tau^+_{k-1})\in dy).$$

Из [7, теорема 5] выводим следующее неравенство. Если $\mathbf{E}\,\xi(1)\leq 0$, $\mathbf{E}\,|\xi^3(1)|<\infty$, то равномерно по $y\geq 0$ выполняется

$$|\mathbf{E}\,\chi_-(-y)|\leq l:=\frac{3a_3}{a_2}, \tag{14}$$

где принято обозначение $a_i=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x^i|\,d\,S(x)$, $i=2,3$. Эти величины конечны, если $\mathbf{E}\,|\xi^3(1)|<\infty$. Имеем далее

$$Q(a+b-\mathbf{E}\chi_-(-a-y))=Q(a+b+\mathbf{E}|\chi_-(-a-y))\geq Q(a+b+l).$$

В итоге получаем при $k\geq 2$

$$\mathbf{P}(\theta\geq k)\geq Q(a+b+l)\int_b^\infty \mathbf{P}(\xi(\tau^+_{k-1})\in dy)=Q(a+b+l)\mathbf{P}(\theta\geq k-1).$$

Для $\mathbf{P}(\theta\geq 1)$ имеем

$$\mathbf{P}(\theta\geq 1)=\int_{-\infty}^{+0}Q(a+b-x)\,\mathbf{P}(\chi_-(-a)\in dx)=$$

$$=\mathbf{E}\,Q(a+b-\chi_-(-a))\geq Q(a+b+l).$$

В итоге получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{E}\,\xi(1) < 0$, $\mathbf{E}\,|\xi^3(1)| < \infty$ *и функция* $Q(x)$ *выпукла вниз при* $x > 0$. *Тогда при всех* $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) \geq Q^k(a+b+l),$$

где $l = 3a_3/a_2$, $a_i = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x^i|\, d\,S(x)$, $i = 2, 3$.

Далее предложим другие версии оценок снизу для $\mathbf{P}(\theta \geq k)$.

Обозначим $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}\,\exp\{\lambda\xi(1)\}$ и предположим, что для $\xi(1)$ выполняется правостороннее условие Крамéра:

$$\varphi(\lambda_+) < \infty \qquad \text{для некоторого} \qquad \lambda_+ > 0. \tag{15}$$

Если же $\varphi(\lambda_+) \geq 1$, то уравнение $\varphi(\lambda) = 1$ имеет единственное решение $\rho > 0$ (см. [9]). В [11] установлено, что если $\mathbf{E}\,\xi(1) < 0$, то при выполнении (15) имеет место неравенство

$$Q(x) \geq s^{-1}\, e^{-\rho x}, \tag{16}$$

где

$$s = \sup_{0<x<M} \mathbf{E}\big(e^{\rho(\xi(1)-x)} | \xi(1) \geq x\big), \quad M = \inf\{x > 0 :\ \mathbf{P}(\xi(1) \leq x) = 1\};$$

здесь $M = \infty$, если $\mathbf{P}(\xi(1) < x) < 1$ при всех $x > 0$.

В соответствии с неравенством (16) оценим снизу функцию $Q(a+b-x)$ в (3), после чего воспользуемся неравенством Йенсена по отношению к выпуклой функции $e^{-\rho x}$, а затем применим неравенство (14), предположив дополнительно, что $\mathbf{E}\,|\xi^3(1)| < \infty$. Получаем для $k \geq 2$

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) \geq \int\limits_b^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{+0} s^{-1} e^{-\rho(a+b-x)}\, \mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx)\, \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy)$$

$$= s^{-1} e^{-\rho(a+b)} \int\limits_b^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{+0} e^{\rho x}\, \mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx)\, \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy)$$

$$= s^{-1} e^{-\rho(a+b)} \int\limits_b^{\infty} \mathbf{E}\, e^{\rho\, \chi_-(-a-y)}\, \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy)$$

$$\geq s^{-1} e^{-\rho(a+b)} \int\limits_b^{\infty} e^{\rho\, \mathbf{E}\, \chi_-(-a-y)}\, \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy)$$

$$\geq s^{-1} e^{-\rho(a+b)} \int\limits_b^{\infty} e^{\rho l}\, \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy) = s^{-1}\, e^{-\rho(a+b+l)} \mathbf{P}(\theta \geq k-1).$$

Проводя аналогичные рассуждения для $\mathbf{P}(\theta \geq 1)$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{E}\,\xi(1) < 0$, $\mathbf{E}\,|\xi^3(1)| < \infty$, *выполняется правостороннее условие Крамéра* (15) *и* $\varphi(\lambda_+) \geq 1$. *Тогда для* $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) \geq s^{-1}\, e^{-\rho k(a+b+l)}.$$

Предположим теперь, что для рассматриваемого случайного процесса $\xi(t)$ условие (15) не выполняется, то есть распределение случайной величины $\xi(1)$ имеет тяжёлый правый хвост: $\mathbf{E}\,\exp\{\lambda\xi(1)\} = \infty$ при всех $\lambda > 0$. Рассмотрим случайный процесс $\xi_1(t)$, который получается простой заменой скачков процесса $\xi(t)$, превышающих некоторое положительное число q, на скачки размера q. Спектральная функция процесса $\xi_1(t)$ в представлении (1) будет равна

$$S_1(x) = \begin{cases} S(x), & \text{если} \quad x \leq q, \\ S(q), & \text{если} \quad x > q. \end{cases}$$

Ясно, что для процесса $\xi_1(t)$ выполнено условие (15), так как

$$\varphi_1(\lambda) \equiv \mathbf{E}\,\exp\{\lambda\xi_1(l)\} < \infty$$

при любом $\lambda > 0$ и, кроме того, $\varphi_1(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$. Отметим также, что $\mathbf{E}\,\xi_1(1) \leq \mathbf{E}\,\xi(1) < 0$, с вероятностью единица $\zeta \geq \zeta_1 := \sup_{t\geq 0}\xi_1(t)$ и

$$Q(x) = \mathbf{P}(\zeta \geq x) \geq Q_1(x) := \mathbf{P}(\zeta_1 \geq x).$$

Ясно, что чем больше число q, тем меньше будет потеря точности в последнем неравенстве.

Поскольку для $\xi_1(t)$ выполняется правостороннее условие Крамéра, для получения необходимой оценки снизу для вероятности $\mathbf{P}(\zeta_1 \geq x)$ мы вновь можем пользоваться неравенством (16). При этом участвующие в нём величины ρ и s определяются уже по распределению случайной величины $\xi_1(1)$ и зависят от q; их обозначим через $\rho(q)$ и $s(q)$.

Таким образом,

$$Q_1(x) \geq (s(q))^{-1}\, e^{-\rho(q)x}. \tag{17}$$

Для получения оценки снизу для вероятности $\mathbf{P}(\theta \geq k)$ нужно теперь под интегралом в формуле (3) воспользоваться оценкой снизу

$$Q(a+b-x) \geq Q_1(a+b-x),$$

применить к полученному выражению оценку (17) и дальше действовать по схеме доказательства теоремы 4. В итоге получаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{E}\,\xi(1) < 0$ *и* $\mathbf{E}\,|\xi^3(1)| < \infty$. *Тогда для* $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) \geq (s(q))^{-1}\, e^{-\rho(q)k(a+b+l)},$$

где величины $\rho(q)$ *и* $s(q)$ *определяются по процессу* $\xi_1(t)$.

Отметим, что в последнем неравенстве число $l = 3a_3/a_2$ определяется по процессу $\xi(t)$.

References

[1] B.A. Rogozin, *On distributions of functionals related to boundary problems for processes with independent increments*, Theor. Probab. Appl., **11**:4 (1966), 580–591. Zbl 0178.52701

[2] V.I. Lotov, A.P. L'vov, *Bounds for the number of crossings of a strip by random walk paths*, J. Math. Sci., New York, **230**:1 (2018), 112–117. Zbl 1413.60036

[3] V.I. Lotov, *On the limit behavior of the distribution of the crossing number of a strip by sample paths of a random walk*, Sib. Math. J., **54**:2 (2013), 265–270. Zbl 1274.60122

[4] V.I. Lotov, N.G. Orlova, *Asymptotic expansions for the distribution of the crossing number of a strip by sample paths of a random walk*, Sib. Math. J., **45**:4 (2004), 680–698. Zbl 1061.60048

[5] V.I. Lotov, V.R. Khodzhibaev, *On the number of crossings of a strip for stochastic processes with independent increments*, Sib. Adv. Math., **3**:2 (1993), 145–152. Zbl 0848.60072

[6] V.R. Hodzhibaev, A.A. Atahodzhaev, *Raspredelenie chisla peresechenij polosy dlya sluchajnyh processov s nezavisimymi prirashcheniyami*, Uz. Mat. J., **2010**:1 (2010), 150–169.

[7] A.A. Mogul'skii, *On the size of the first jump for a process with independent increments*, Theory Probab. Appl., **21** (1977), 470–481. Zbl 0361.60038

[8] N.S. Bratijchuk, D.V. Gusak, *Granichnye zadachi dlya processov s nezavisimymi prirashcheniyami*, Naukova dumka, Kiev, 1990. Zbl 0758.60074

[9] B.A. Rogozin, *Local behavior of processes with independent increments*, Theor. Probab. Appl., **13**:3 (1968), 482–486. Zbl 0177.21305

[10] B.A. Rogozin, *Distribution of the maximum of a process with independent increments*, Sib. Math. J., **10** (1970), 989–1010. Zbl 0198.22302

[11] V.I. Lotov, V.R. Khodjibayev, *Inequalities in a two-sided boundary crossing problem for stochastic processes*, Sib. Math. J., **62**:3 (2021), 455–461. Zbl 1470.60124

Vladimir Ivanovich Lotov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: lotov@math.nsc.ru

Vali Rakhimdjanovich Khodjibayev
Namangan Engineering - construction Institute,
Islam Karimov str., 12,
160103, Namangan, Uzbekistan,
Institute of Mathematics Uzbekistan Akademy of Sciences,
Universitetskaya str., 46,
100174, Tashkent, Uzbekistan
Email address: vkhodjibayev@mail.ru