

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 20, №2, стр. 1064–1078 (2023)
DOI 10.33048/semi.2023.20.066УДК 519.633
MSC 65M12**О СХОДИМОСТИ ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫХ СХЕМ ДЛЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ
ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В МНОГОМЕРНОЙ
ОБЛАСТИ**

А.К. БАЗЗАЕВ

АБСТРАКТ. В работе построены локально-одномерные схемы (ЛОС) для дифференциальных уравнений в частных производных дробных порядков по времени и по пространству в многомерной области. Установлена справедливость принципа максимума для решения разностной задачи. На основании принципа максимума получена априорная оценка в равномерной метрике, откуда следует устойчивость и сходимость разностных схем.

Keywords: уравнение диффузии дробного порядка, производная дробного порядка, устойчивость и сходимость разностных схем, уравнение медленной диффузии, локально-одномерные схемы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка возникают при изучении многих физических процессов [1] — [5], при изучении фильтрации жидкости в сильно-пористой (фрактальной) среде [6]. Заметим, что порядок дробной производной связан с размерностью фрактала [2], [3]. Простые формулы, связывающие размерность фрактала d_f с порядком дробной производной получены в работе [7].

BAZZAEV, A.K., ON THE CONVERGENCE OF LOCALLY ONE-DIMENSIONAL SCHEMES FOR THE DIFFERENTIAL EQUATION IN PARTIAL DERIVATIVES OF FRACTIONAL ORDERS IN A MULTIDIMENSIONAL DOMAIN.

© 2023 Баззаев А.К.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 075-02-2023-939.

Поступила 25 января 2023 г., опубликована 21 ноября 2023 г.

Как отмечается в [8] существуют достаточно много подтверждений тому, что для диффузионного процесса характерно нелинейное нарастание среднего квадратичного отклонения. Нарушения проявляются во многих ситуациях, в том числе при движении частиц в плазме [9], турбулентной диффузии частиц [10]. В качестве математических моделей подобных процессов рассматриваются дифференциальные уравнения в частных производных дробных порядков по пространству и времени [11] — [13].

В работе [14] для численного моделирования аномальной диффузии в многомерной области применяется метод приближенной факторизации. Для первой начально-краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробных порядков по пространству и времени изучена чисто неявная схема на основе метода приближенной факторизации, доказана устойчивость схемы для рассматриваемого класса задач.

В работе [15] рассматривается первая начально-краевая задача для одномерного уравнения параболического типа с дробной производной Римана-Лиувилля по пространственной переменной

$$\begin{aligned} u_t - \mathcal{D}_x^\alpha u &= f, \quad x \in D = (0, 1), \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= v, \quad x \in D, \end{aligned}$$

где $\alpha \in (1, 2)$.

Рассматривается специальная полудискретная схема на основе метода Галеркина, а также полностью дискретная схема, основанная на методе Кранка-Николсона. Получены оценки для погрешности в нормах $L_2(D)$ и $H^{\alpha/2}(D)$ для полудискретной схемы и в норме $L_2(D)$ для полностью дискретной схемы.

В работе [16] рассматривается вариационная формулировка типа Петрова-Галеркина для одномерных краевых задач с дробной производной Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (3/2, 2)$.

В работе [17] рассматривается уравнение с производной дробного порядка по времени с граничными условиями первого рода

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha u - \Delta u &= f, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < \alpha < 1, \\ u|_\Gamma &= 0, \quad 0 < t \leq T, \quad \Omega + \Gamma = \bar{\Omega}, \\ u(x, 0) &= v, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

В работе получен дискретный аналог дробной производной по времени порядка аппроксимации $O(\tau^{2-\alpha})$. Доказана сходимость построенной схемы в норме $L_2(\Omega)$.

В работе [18] рассматриваются разностные схемы для дифференциальных уравнений обыкновенных и с частными производными второго порядка с дробной производной по времени. Отдельно изучены стационарные и нестационарные задачи для уравнения диффузии в одномерной и многомерной областях. Доказаны устойчивость и сходимость разностных схем для рассматриваемых уравнений.

В работах [19] и [20] были рассмотрены локально-одномерные схемы для уравнения диффузии дробного порядка в p -мерном параллелепипеде с крайевыми условиями первого и третьего рода соответственно, а в [21] для уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью. В этих работах была доказана сходимость ЛОС в равномерной метрике при

$1/2 < \alpha \leq 1$. В работе [22] построены многомерные разностные схемы для уравнения диффузии дробного порядка и доказана сходимость разностных схем при всех α , $0 < \alpha \leq 1$. Работа [23] посвящена рассмотрению локально-одномерных разностных схем для уравнения диффузии дробного порядка с переменными коэффициентами в области сложной формы. Доказаны устойчивость и равномерная сходимость локально-одномерных схем для рассматриваемой задачи.

В работах [24] — [25] рассматриваются дифференциальные уравнения теплопроводности дробного порядка с краевыми условиями третьего рода.

Работа [26] посвящена численному методу второго порядка точности решения дробного дифференциального уравнения диффузии. Алгоритм численного решения, предложенный в данной работе, основан на классическом методе Кранка-Николсона. Доказывается сходимость предложенного метода.

Основополагающие элементы теории краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка рассмотрены, например, в монографии [27].

В работах [28] — [31] рассмотрена проблема единственности решения начально-краевых задач для обобщенного уравнения диффузии с дробной производной по времени в области $G \times (0, T)$, $G \in R_n$. Доказывается принцип максимума для рассматриваемой задачи. С помощью принципа максимума показано, что рассматриваемая задача имеет единственное решение, зависящее от входных данных задачи. Результаты этих работ использованы в работах [32], [33] для доказательства принципа максимума для дифференциального уравнения дробного порядка.

В работах [34] — [38] рассматриваются численные методы решения дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля по пространственной переменной, а также вопросы устойчивости и сходимости.

В работе [39] построены разностные схемы для дифференциальных уравнений дробного порядка по времени и по пространству, а также построены локально-одномерные схемы для многомерного дифференциального уравнения с дробной производной по пространственной переменной.

В работе [41] исследуется семейство разностных схем, аппроксимирующих первую и третью краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка с переменными коэффициентами. Получены достаточные условия устойчивости разностных схем. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки для рассматриваемых краевых задач.

В работе [40] рассматривается первая краевая задача для уравнения Аллера дробного по времени порядка с обобщенными функциями памяти. Для численного решения поставленной задачи построены две разностные схемы повышенного порядка аппроксимации. В случае переменных коэффициентов предложена разностная схема второго порядка аппроксимации, как по времени, так и по пространству. А для обобщенного уравнения Аллера с постоянными коэффициентами предложена компактная разностная схема четвертого порядка аппроксимации по пространственной переменной и второго порядка по времени. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки для решений предложенных разностных схем. Доказана их безусловная устойчивость и сходимость. Также показано, что скорость сходимости совпадает с порядком погрешности аппроксимации в случае достаточно гладкого решения исходной задачи.

Данная работа посвящена построению локально-одномерных схем для уравнения диффузии с частными производными дробных порядков по пространству и по времени в многомерной области. Для построенных ЛОС доказан принцип максимума, а также устойчивость и равномерная сходимость в случае, когда порядок дробной производной по времени $\alpha \in (1/2; 1]$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В цилиндре $Q_T = G \times (0; T]$, основанием которого является p -мерный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_k < \ell_k, k = 1, 2, \dots, p\}$ с границей Γ , рассмотрим задачу:

$$(1) \quad \partial_{0t}^\alpha u = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T,$$

где

$$Lu = \sum_{k=1}^p L_k^{\beta_k} u, \quad L_k^{\beta_k} u = \partial_{0x_k}^{\beta_k} u + q_k(x, t)u,$$

$\partial_{0x_k}^{\beta_k} u = \frac{1}{\Gamma(2 - \beta_k)} \int_0^{x_k} \frac{u_{\eta\eta}(x_1, \dots, x_{k-1}, \eta, x_{k+1}, \dots, x_p, t)}{(x_k - \eta)^{\beta_k - 1}} d\eta$ — дробная производная Капуто порядка β_k , $1 < \beta_k \leq 2$ по пространственной координате x_k ,

$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{\dot{u}(x, \eta)}{(t - \eta)^\alpha} d\eta$ — дробная производная Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$, $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $q_k \geq q_* > 0$.

К уравнению (1) присоединим начальное и краевые условия

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_k} = \lambda_{-k} u - \mu_{-k}(x, t), & x_k = 0, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lambda_{+k} u - \mu_{+k}(x, t), & x_k = \ell_k, \end{cases}$$

$$(3) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G},$$

где $\lambda_{\pm k} \geq \lambda_* > 0$.

В дальнейшем будем полагать, что задача (1) — (3) имеет единственное достаточно гладкое решение, а также и входные данные задачи обладают необходимой гладкостью.

3. ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_k с шагом $h_k = \ell_k/N_k$, $k = 1, 2, \dots, p$:

$$\bar{\omega}_{h_k} = \{x_k^{(i_k)} = (i_k h_k : i_k = 0, 1, \dots, N_k)\}, \quad \bar{\omega} = \prod_{k=1}^p \bar{\omega}_{h_k}.$$

На отрезке $[0; T]$ введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}_\tau = \{0, t_{j+k/p} = (j + k/p)\tau, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, k = 1, 2, \dots, p\},$$

содержащую наряду с узлами $t_j = j\tau$ фиктивные узлы $t_{j+k/p}$, $k = 1, 2, \dots, p-1$. Будем обозначать через ω_τ — множество узлов сетки $\bar{\omega}_\tau$, для которых $t > 0$.

В работе [18] показано, что дискретный аналог дробной производной Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$ имеет вид [19]:

$$(4) \quad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_{j+k/p}} \frac{\dot{u}(x, \eta)}{(t_{j+k/p} - \eta)^\alpha} d\eta = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t_{j+(k-s+1)/p}^{1-\alpha} - t_{j+(k-s)/p}^{1-\alpha} \right) u_{\bar{t}}^{s/p} + O\left(\frac{\tau}{p}\right),$$

где $u_{\bar{t}}^{s/p} = \frac{u^{s/p} - u^{(s-1)/p}}{\tau/p}$, $u(t) \in C^2[0, T]$.

По аналогии с работой [41] покажем, что этот результат можно улучшить, если $u(t) \in C^3[0, T]$. Справедлива

Лемма 1. Если $u(t) \in C^2[0, T]$, то

$$(5) \quad \frac{1}{\Gamma(1-k)} \int_0^{t_{j+k/p}} \frac{\dot{u}(x, \eta)}{(t_{j+k/p} - \eta)^\alpha} d\eta = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t_{j+(k-s+1)/p}^{1-\alpha} - t_{j+(k-s)/p}^{1-k} \right) u_{\bar{t}}^{s/p} + O\left(\frac{\tau}{p}\right)^{2-\alpha},$$

где $u_{\bar{t}}^{s/p} = \frac{u_{\bar{t}}^{s/p} - u^{(s-1)/p}}{\tau/p}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_{j+k/p}} \frac{\dot{u}(x, \eta)}{(t_{j+k/p} - \eta)^\alpha} d\eta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{\dot{u}(x, \eta)}{(t_{j+k/p} - \eta)^\alpha} d\eta = \\ & = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{\dot{u}(x, \bar{t}) + (\eta - \bar{t})\ddot{u}(x, \bar{t}) + O((\eta - \bar{t})^2)}{(t_{j+k/p} - \eta)^\alpha} d\eta = \\ & = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{\dot{u}(x, \bar{t})}{(t_{j+k/p} - \eta)^\alpha} d\eta + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{(\eta - \bar{t})\ddot{u}(x, \bar{t})}{(t_{j+k/p} - \eta)^\alpha} d\eta + O\left(\left(\frac{\tau}{p}\right)^2\right), \\ & = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t_{j+(k-s+1)/p}^{1-\alpha} - t_{j+(k-s)/p}^{1-\alpha} \right) u_{\bar{t}}^{s/p} + \\ & + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{(\eta - \bar{t})\ddot{u}(x, \bar{t})}{(t_{j+k/p} - \eta)^\alpha} d\eta + O\left(\left(\frac{\tau}{p}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (6)$$

где $\bar{t} = t_{\frac{s}{p}} - \frac{1}{2p}$.

Оценим второе слагаемое в (6):

$$\left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{(\eta - \bar{t})\ddot{u}(x, \bar{t})}{(t_{j+k/p} - \eta)^\alpha} d\eta \right| = \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \ddot{u}(x, \bar{t}) \int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{\eta - \bar{t}}{(t_{j+k/p} - \eta)^\alpha} d\eta \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left| \frac{M}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{\eta - \bar{t}}{(t_{j+k/p} - \eta)^\alpha} d\eta \right| = \\
 &= \frac{M}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left| \int_{\bar{t}}^{t_{\frac{s}{p}}} \frac{\eta - \bar{t}}{(t_{j+k/p} - \eta)^\alpha} d\eta - \int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{\bar{t}} \frac{\bar{t} - \eta}{(t_{j+k/p} - \eta)^\alpha} d\eta \right| = \\
 &= \frac{2^\alpha M}{4\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\tau}{p}\right)^{2-\alpha} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(\int_0^1 \frac{z dz}{(2(pj+k-s)+1-z)^\alpha} - \int_0^1 \frac{z dz}{(2(pj+k-s)+1+z)^\alpha} \right) = \\
 &= \frac{2^\alpha M}{4\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\tau}{p}\right)^{2-\alpha} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(\int_0^1 \frac{1}{(2(pj+k-s)+1-z)^\alpha} - \int_0^1 \frac{1}{(2(pj+k-s)+1+z)^\alpha} \right) z dz = \\
 &= \frac{2^\alpha M}{4\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\tau}{p}\right)^{2-\alpha} \int_0^1 z \sum_{s=1}^{pj+k} \left(\frac{1}{(2(pj+k-s)+1-z)^\alpha} - \frac{1}{(2(pj+k-s)+1+z)^\alpha} \right) dz = \\
 &= \frac{2^\alpha M}{4\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\tau}{p}\right)^{2-\alpha} \int_0^1 \left(\frac{z}{(3-z)^\alpha} - \frac{z}{(2(pj+k)+1+z)^\alpha} \right) dz - \\
 &- \frac{2^\alpha M}{4\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\tau}{p}\right)^{2-\alpha} \int_0^1 z \sum_{s=1}^{pj+k} \left(\frac{1}{(2(pj+k-s)+1-z)^\alpha} - \frac{1}{(2(pj+k+1)+1+z)^\alpha} \right) dz \leq \\
 &\leq \frac{2^\alpha M}{4\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\tau}{p}\right)^{2-\alpha} \int_0^1 \frac{z dz}{(3-z)^\alpha} = \frac{2^\alpha [(\alpha-4)2^{1-\alpha} + 3^{2-\alpha}] M}{4\Gamma(3-\alpha)} \left(\frac{\tau}{p}\right)^{2-\alpha},
 \end{aligned}$$

где $M = \max_{0 \leq t \leq T} |\ddot{u}(x, \bar{t})|$.

Лемма доказана. □

Аналогичный результат можно получить и для дробной производной Капуто порядка β , $1 < \beta \leq 2$, по пространственной переменной x . В работе [39] построен дискретный аналог дробной производной порядка β , $1 < \beta \leq 2$, по пространственной переменной x :

$$\Delta_{0x_i}^\beta v = \frac{1}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{s=1}^i \left(x_{i-s+1}^{2-\beta} - x_{i-s}^{2-\beta} \right) v_{\bar{x}x,s}, \quad 1 < \beta \leq 2, \quad v_{\bar{x}x,s} = \frac{u_{s+1} - 2u_s + u_{s-1}}{h^2},$$

а также показано, что

$$(7) \quad \partial_{0x_i}^\beta v = \Delta_{0x_i}^\beta v + O(h),$$

при условии, что $v(x) \in C^3[0, \ell]$. Как и выше покажем, что этот результат также можно улучшить при $v(x) \in C^4[0, \ell]$.

Итак, справедлива

Лемма 2. Для любой функции $v(x) \in C^4[0, \ell]$ справедливо равенство

$$\partial_{0x_{i_k}}^{\beta_k} v_k = \frac{1}{\Gamma(3-\beta_k)} \sum_{s=1}^{i_k} \left(x_{i_k-s+1}^{2-\beta_k} - x_{i_k-s}^{2-\beta_k} \right) v_{\bar{x}_k x_k, s} + O(h_k^{3-\beta_k}), \quad 1 < \beta_k \leq 2.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 \partial_{0x_{i_k}}^{\beta_k} v_k &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta_k)} \int_0^{x_{i_k}} \frac{v''(\xi) d\xi}{(x_{i_k}-\xi)^{\beta_k-1}} = \frac{1}{\Gamma(2-\beta_k)} \sum_{s=1}^{i_k} \int_{x_{s-1}}^{x_s} \frac{v''(\xi) d\xi}{(x_{i_k}-\xi)^{\beta_k-1}} = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta_k)} \sum_{s=1}^{i_k} \int_{x_{s-1}}^{x_s} \frac{v''(x_{s-1/2}) + v'''(x_{s-1/2})(\xi-x_{s-1/2}) + O((\xi-x_{s-1/2})^2)}{(x_{i_k}-\xi)^{\beta_k-1}} d\xi = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta_k)} \sum_{s=1}^{i_k} v_{\overline{x_k x_k}, s-1/2} \int_{x_{s-1}}^{x_s} \frac{d\xi}{(x_{i_k}-\xi)^{\beta_k-1}} + \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(2-\beta_k)} \sum_{s=1}^{i_k} v'''(x_{s-1/2}) \int_{x_{s-1}}^{x_s} \frac{(\xi-x_{s-1/2})}{(x_{i_k}-\xi)^{\beta_k-1}} d\xi + O(h^2).
 \end{aligned}$$

Оценим величину

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{1}{\Gamma(2-\beta_k)} \sum_{s=1}^{i_k} v'''(x_{s-1/2}) \int_{x_{s-1}}^{x_s} \frac{(\xi-x_{s-1/2})}{(x_{i_k}-\xi)^{\beta_k-1}} d\xi \right| \leq \\
 &\leq \frac{M_k}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=1}^{i_k} \left| \int_{x_{s-1}}^{x_s} \frac{(\xi-x_{s-1/2})}{(x_{i_k}-\xi)^{\beta_k-1}} d\xi \right| = \\
 &= \frac{M_k}{\Gamma(2-\beta_k)} \sum_{s=1}^{i_k} \left| \int_{x_{s-1/2}}^{x_s} \frac{\xi-x_{s-1/2}}{(x_i-\xi)^{\beta_k-1}} d\xi - \int_{x_{s-1}}^{x_{s-1/2}} \frac{x_{s-1/2}-\xi}{(x_{i_k}-\xi)^{\beta_k-1}} d\xi \right| = \\
 &= \frac{2^{\beta_k-1} h^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \sum_{s=1}^{i_k} \left| \int_0^1 \frac{z dz}{(2(i_k-s)+1-z)^{\beta_k-1}} - \int_0^1 \frac{z dz}{(2(i_k-s)+1+z)^{\beta_k-1}} \right| = \\
 &= \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int_0^1 z \sum_{s=0}^{i_k-1} \left(\frac{1}{(2s+1-z)^{\beta_k-1}} - \frac{1}{(2s+1+z)^{\beta_k-1}} \right) dz = \\
 &= \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int_0^1 z \left(\frac{1}{(1-z)^{\beta_k-1}} - \frac{1}{(2i_k-1+z)^{\beta_k-1}} \right) dz + \\
 &+ \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int_0^1 z \sum_{s=1}^{i_k-1} \left(\frac{1}{(2s-1+z)^{\beta_k-1}} - \frac{1}{(2s+1-z)^{\beta_k-1}} \right) dz = \\
 &= \frac{2^{\beta_k-1} h^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int_0^1 \left(\frac{z}{(1-z)^{\beta_k-1}} - \frac{z}{(2i-1+z)^{\beta_k-1}} \right) dz - \\
 &- \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int_0^1 z \sum_{s=1}^{i_k-1} \left(\frac{1}{(2s-1+z)^{\beta_k-1}} - \frac{1}{(2s+1-z)^{\beta_k-1}} \right) dz \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int_0^1 \left(\frac{z}{(1-z)^{\beta_k-1}} - \frac{z}{(2i_k-1+z)^{\beta_k-1}} \right) dz = \\ &= \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int_0^1 \frac{z dz}{(1-z)^{\beta_k-1}} - \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int_0^1 \frac{z dz}{(2i_k-1+z)^{\beta_k-1}} \leq \\ &\leq \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \int_0^1 \frac{z dz}{(1-z)^{\beta_k-1}} = \\ &= \frac{2^{\beta_k-1} h_k^{3-\beta_k} M_k}{4\Gamma(2-\beta_k)} \frac{1}{(2-\beta_k)(3-\beta_k)} = \frac{2^{\beta_k-1} M_k}{4\Gamma(4-\beta_k)} h_k^{3-\beta_k}, \end{aligned}$$

где $M_k = \max_{0 \leq x_k \leq \ell_k} |v'''(x_k)|$.

Лемма доказана. □

По аналогии с ([43], с. 522) уравнению (1) поставим в соответствие цепочку одномерных уравнений

$$\mathcal{P}_k u = 0, \text{ где } \mathcal{P}_k u = \frac{1}{p} \partial_{0t}^\alpha u - L_k^{\beta_k} u - f_k, \sum_{k=1}^p f_k = f.$$

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\mathcal{P}u = \partial_{0t}^\alpha u - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^p \mathcal{P}_k u = 0, \quad \mathcal{P}_k u = \frac{1}{p} \partial_{0t}^\alpha u - L_k u - f_k.$$

На каждом полуинтервале $\Delta_k = (t_{j+(k-1)/p}, t_{j+k/p}]$, $k = 1, 2, \dots, p$, будем последовательно решать задачи

$$(8) \quad \mathcal{P}_k v^{(k)} = \frac{1}{p} \partial_{0t}^\alpha v^{(k)} - L_k^{\beta_k} v^{(k)} - f_k = 0, \quad t \in \Delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_k} = \lambda_{-k} v^{(k)} - \mu_{-k}(x, t), & x_k = 0, \\ -\frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_k} = \lambda_{+k} v^{(k)} - \mu_{+k}(x, t), & x_k = \ell_k, \end{cases}$$

полагая при этом следующее:

$$(10) \quad \begin{aligned} v_{(1)}(x, 0) &= u_0(x), \\ v_{(k)}(x, t_{j+(k-1)/p}) &= v_{(k-1)}(x, t_{j+(k-1)/p}), \quad k = 2, 3, \dots, p, \\ v_{(1)}(x, t_j) &= v_{(p)}(x, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1. \end{aligned}$$

Каждое из уравнений (8) номера k аппроксимируем неявной двухслойной схемой

$$(11) \quad \Delta_{0t_{j+k/p}}^\alpha y = \Lambda_k \left(\sigma_k y^{j+k/p} + (1-\sigma_k) y^{j+(k-1)/p} \right) + \varphi_k^{j+k/p}, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

где

$$\Delta_{0t_{j+k/p}}^\alpha y = \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t_{j+(k-s+1)/p}^{1-\alpha} - t_{j+(k-s)/p}^{1-\alpha} \right) y_t^{\frac{s}{p}},$$

$$\Lambda_k y = \frac{1}{\Gamma(3 - \beta_k)} \sum_{s=1}^{i_k} \left(x_{i_k-s+1}^{2-\beta_k} - x_{i_k-s}^{2-\beta_k} \right) y_{\bar{x}_k x_k, s} - d_k y,$$

$$y^{(\sigma_k)} = \sigma_k y^{j+k/p} + (1 - \sigma_k) y^{j+(k-1)/p}, \quad 0 \leq \sigma_k \leq 1,$$

$$(12) \quad \begin{cases} \left(y_{x_k, 0}^{j+k/p} - \lambda_{-k} y_0^{j+k/p} \right)^{\sigma_k} = -\mu_{-k}, & x_k = 0, \\ - \left(y_{\bar{x}_k, N_k}^{j+k/p} - \lambda_{+k} y_{N_k}^{j+k/p} \right)^{\sigma_k} = -\mu_{+k}, & x_k = \ell_k, \end{cases}$$

$$(13) \quad y(x, 0) = u_0(x).$$

Среди неявных схем наибольшее распространение в вычислительной практике получили симметричная схема ($\sigma_k = 0,5$) и чисто неявная схема ($\sigma_k = 1$) (см., например, [44] стр. 248). В дальнейшем для простоты будем рассматривать случай чисто неявных схем.

4. ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ ЛОС

Подставляя $y^{j+k/p} = z^{j+k/p} + u^{j+k/p}$ в уравнение (11), получим уравнение для погрешности $z^{j+k/p}$:

$$(14) \quad \Delta_{0t_{j+k/p}}^\alpha z = \Lambda_k z^{j+k/p} + \psi_k^{j+k/p}, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

где

$$\psi_k^{j+k/p} = \Lambda_k u^{j+k/p} + \varphi_k^{j+k/p} - \Delta_{0t_{j+k/p}}^\alpha u.$$

Обозначив через

$$\overset{\circ}{\psi}_k = \left(L_k^{\beta_k} u + f_k - \frac{1}{p} \partial_{0t}^\alpha u \right)^{j+1/2}$$

заметим, что

$$\sum_{k=1}^p \overset{\circ}{\psi}_k = 0, \quad \text{если} \quad \sum_{k=1}^p f_k = f.$$

Представим $\psi_k = \psi_k^{j+k/p}$ в виде

$$\psi_k = \overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k,$$

тогда

$$\begin{aligned} \psi_k^{j+k/p} &= \left(\Lambda_k u^{j+k/p} + \varphi_k^{j+k/p} - \Delta_{0t_{j+k/p}}^\alpha u \right) - \\ &\quad - \left(L_k^{\beta_k} u + f_k - \frac{1}{p} \partial_{0t}^\alpha u \right)^{j+1/2} + \overset{\circ}{\psi}_k = \\ &= \left(\Lambda_k u^{j+k/p} - \left(L_k^{\beta_k} u \right)^{j+1/2} \right) + \left(\varphi_k^{j+k/p} - f_k^{1+1/2} \right) - \\ &\quad - \left(\Delta_{0t_{j+k/p}}^\alpha u - \frac{1}{p} \left(\partial_{0t}^\alpha u \right)^{j+1/2} \right) + \overset{\circ}{\psi}_k = \overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \overset{*}{\psi}_k &= \left(\Lambda_k u^{j+k/p} - \left(L_k^{\beta_k} u \right)^{j+1/2} \right) + \left(\varphi_k^{j+k/p} - f_k^{j+1/2} \right) - \\ &\quad - \left(\Delta_{0t_{j+k/p}}^\alpha u - \frac{1}{p} \left(\partial_{0t}^\alpha u \right)^{j+1/2} \right). \end{aligned}$$

Из определения Λ_k и φ_k следует, что

$$\begin{aligned} \psi_k^* &= O(h_k^{3-\beta_k} + \tau^{2-\alpha}), \quad \dot{\psi}_k = O(1), \\ \sum_{k=1}^p \dot{\psi}_k &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\psi = \sum_{k=1}^p \psi_k = \sum_{k=1}^p (\dot{\psi}_k + \psi_k^*) = \sum_{k=1}^p \psi_k^* = O(|h|^{3-\beta_k} + \tau^{2-\alpha}).$$

Граничные условия запишем в виде

$$(15) \quad \begin{cases} z_{x_k,0}^{j+k/p} - \lambda_{-k} z_0^{j+k/p} = \psi_{-k}, \quad \psi_{-k} = \lambda_{-k} u_0^{j+k/p} - u_{x_k,0}^{j+k/p} - \mu_{-k}, \\ z_{\bar{x}_k, N_k}^{j+k/p} - \lambda_{+k} z_{N_k}^{j+k/p} = \psi_{+k}, \quad \psi_{+k} = \lambda_{+k} u_{N_k}^{j+k/p} - u_{\bar{x}_k, N_k}^{j+k/p} - \mu_{+k}, \end{cases}$$

$$(16) \quad z(x, 0) = 0,$$

где

$$\psi_{-k}, \psi_{+k} = O(h).$$

Таким образом, схема (11) – (13) обладает суммарной аппроксимацией

$$\psi = \sum_{k=1}^p \psi_k = \sum_{k=1}^p (\dot{\psi}_k + \psi_k^*) = \sum_{k=1}^p \psi_k^* = O(|h| + \tau^{2-\alpha}).$$

5. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛОС

Чтобы получить оценку для решения разностной задачи (11) – (13), приведем уравнение и граничные условия к каноническому виду ([42], стр. 339):

$$(17) \quad A(P)y(P) = \sum_{Q \in \Pi'(P)} B(P, Q)y(Q) + F(P), \quad P \in \omega,$$

$$A(P) > 0, \quad B(P, Q) > 0, \quad D(P) = A(P) - \sum_{Q \in \Pi'(P)} B(P, Q) \geq 0 \text{ для всех } P \in \omega,$$

ω – множество узлов сетки в некоторой ограниченной области n - мерного евклидова пространства.

Каноническую форму уравнения (11) запишем в виде

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2\tau^\alpha}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}} - \frac{(2^{2-\beta_k}-1)\tau^\alpha}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} + d_k \right) y_{i_k}^{j+k/p} = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}} y_{i_k+1}^{j+k/p} + \\ &\quad + \left(\frac{\tau^\alpha}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}} - \frac{2(2^{2-\beta_k}-1)\tau^\alpha}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}} + \frac{\tau^\alpha(3^{2-\beta_k}-2^{2-\beta_k})}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}} \right) y_{i_k-1}^{j+k/p} + \\ &\quad + \left(\frac{\tau^\alpha(2^{2-\beta_k}-1)}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}} - \frac{2\tau^\alpha(3^{2-\beta_k}-2^{2-\beta_k})}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}} + \frac{\tau^\alpha(4^{2-\beta_k}-3^{2-\beta_k})}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}} \right) y_{i_k-2}^{j+k/p} + \dots + \\ &\quad + \left(\frac{\tau^\alpha[(i_k-3)^{2-\beta_k} - (i_k-4)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}} - \frac{2\tau^\alpha[(i_k-2)^{2-\beta_k} - (i_k-3)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}} \right) + \\ &\quad + \frac{\tau^\alpha[(i_k-1)^{2-\beta_k} - (i_k-2)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}} \Big) y_3^{j+k/p} + \left(\frac{\tau^\alpha[(i_k-2)^{2-\beta_k} - (i_k-3)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3-\beta_k)h_k^{\beta_k}} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2\tau^\alpha [(i_k - 1)^{2-\beta_k} - (i_k - 2)^{2-\beta_k}] + \tau^\alpha [i_k^{2-\beta_k} - (i_k - 1)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3 - \beta_k) h_k^{\beta_k}} \Big) y_2^{j+k/p} + \\
& + \left(\frac{\tau^\alpha [(i_k - 1)^{2-\beta_k} - (i_k - 2)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3 - \beta_k) h_k^{\beta_k}} - \frac{2\tau^\alpha [i_k^{2-\beta_k} - (i_k - 1)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3 - \beta_k) h_k^{\beta_k}} + \right. \\
& \quad \left. + (1 - \lambda_{-k} h_k) \frac{\tau^\alpha [i_k^{2-\beta_k} - (i_k - 1)^{2-\beta_k}]}{\Gamma(3 - \beta_k) h_k^\beta} \right) y_1^{j+k/p} + \\
& + \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \left\{ [(j + 1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] y_{i_k}^0 + [-(j + 1)^{1-\alpha} + 2j^{1-\alpha} - (j - 1)^{1-\alpha}] y_{i_k}^1 + \right. \\
(18) \quad & \left. + \dots + (-2^{1-\alpha} + 2) y_{i_k}^{j+(k-1)/p} \right\} + \varphi_{i_k} \tau^\alpha + \frac{\mu_{-k} h_k}{1 + \lambda_{-k} h_k} \frac{\tau^\alpha (x_{i_k}^{2-\beta_k} - x_{i_k-1}^{2-\beta_k})}{\Gamma(3 - \beta_k) h_k^2}.
\end{aligned}$$

Заметим, что [18]

$$\begin{aligned}
& -(j + 1)^{1-\alpha} + 2j^{1-\alpha} - (j - 1)^{1-\alpha} > 0, \quad j \geq 1, \\
A(P) & = \frac{2\tau^\alpha}{\Gamma(3 - \beta_k) h_k^{\beta_k}} - \frac{(2^{2-\beta_k} - 1)\tau^\alpha}{\Gamma(3 - \beta_k) h_k^{\beta_k}} + \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} + d_k > 0
\end{aligned}$$

и все коэффициенты, стоящие перед $y_s^{j+k/p}$, $s = 2, 3, \dots, i_k + 1$, положительны, а коэффициент при $y_1^{j+k/p}$ положителен при малых h_k . При написании канонической формы (18) был использован разностный аналог граничного условия при $x_k = 0$, $y_{x_k,0} = \lambda_{-k} y_0 - \mu_{-k}$, или $y_0 = (1 - \lambda_{-k} h_k) y_1 + \frac{\mu_{-k} h_k}{1 + \lambda_{-k} h_k}$, $h_k < \frac{1}{\lambda_{-k}}$.

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned}
D(P(x_{i_k}, t_{j+1})) & = \frac{\lambda_{-k} \tau^\alpha (x_{i_k}^{2-\beta_k} - x_{i_k-1}^{2-\beta_k})}{\Gamma(3 - \beta_k) h_k} + d_k > 0, \\
D(P(0, t_{j+1})) & = \lambda_{-k}, \quad D(P(\ell_k, t_{j+1})) = \lambda_{+k}, \quad \beta_{\pm k} \geq \lambda_* > 0.
\end{aligned}$$

Замечание 1. В общем случае схемы с весами, когда $0 \leq \sigma_k \leq 1$, коэффициенты $B(P, Q) > 0$, если

$$(19) \quad \tau^\alpha \leq \frac{\Gamma(3 - \beta_k)(2 - 2^{1-\alpha}) h_k^{\beta_k}}{(1 - \sigma_k)(3 - 2^{2-\beta_k})},$$

Т.о., при условии (19) на шаг сетки по времени принцип максимума сохраняется и в общем случае.

При $\alpha \rightarrow 1, \beta_k \rightarrow 2, k = 1, 2, \dots, p$, (19) переходит в хорошо известное условие

$$\tau \leq \frac{h_k^2}{2(1 - \sigma_k)}.$$

Итак, так как $D(P) > 0$ на всей сетке $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, то при каждом $k = 1, 2, \dots, p$ для решения задачи (11) – (13) из принципа максимума следует оценка

$$\begin{aligned}
\|y^{j+k/p}\|_{C_h} & \leq \|u_0(x)\|_{C_h} + \frac{2}{\lambda_*} \sum_{k=1}^p \max_{t \in \omega_\tau} \left(\|\mu_{-k}(t)\|_{C_{\gamma_k^-}} + \|\mu_{+k}(t)\|_{C_{\gamma_k^+}} \right) + \\
(20) \quad & + \frac{\ell_k^{\beta_k-1} \Gamma(2 - \beta_k)}{\lambda_*} \max_{t \in \omega_\tau} \|\varphi_k^{j+k/p}\|_{C_h},
\end{aligned}$$

где γ_k^- — множество левых граничных узлов, γ_k^+ — множество правых граничных узлов, $\gamma = \gamma_k^- + \gamma_k^+$, где $\|y\|_{C_h} = \max_{x \in \omega_h} |y(x)|$.

Суммируя (20) по всем k от 1 до p , получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \|y^{j+k/p}\|_{C_h} &\leq p \|u_0(x)\|_{C_h} + \frac{2}{\lambda_*} \sum_{k=1}^p \max_{t \in \omega_\tau} \left(\|\mu_{-k}(t)\|_{C_{\gamma_k^-}} + \|\mu_{+k}(t)\|_{C_{\gamma_k^+}} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^p \frac{\ell_k^{\beta_k-1} \Gamma(2-\beta_k)}{\lambda_*} \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'+k/p}\|_{C_h}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \|y^{j+1}\|_{C_h} &\leq p \|u_0(x)\|_{C_h} + \frac{2}{\lambda_*} \sum_{k=1}^p \max_{t \in \omega_\tau} \left(\|\mu_{-k}(t)\|_{C_{\gamma_k^-}} + \|\mu_{+k}(t)\|_{C_{\gamma_k^+}} \right) + \\ (21) \quad &+ \sum_{k=1}^p \frac{\ell_k^{\beta_k-1} \Gamma(2-\beta_k)}{\lambda_*} \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'+k/p}\|_{C_h}. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Локально-одномерная схема (11) — (13) устойчива по начальным данным и правой части, так что для задачи (11) — (13) справедлива оценка (21).*

6. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ЛОС

Обозначим через $z^{(k)} = z^{j+k/p}$ и представим решение задачи (14) — (16) в виде суммы

$$z^{(k)} = v^{(k)} + \eta^{(k)},$$

где $\eta^{(k)}$ определяется условиями

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t_{j+(k-s+1)/p}^{1-\alpha} - t_{j+(k-s)/p}^{1-\alpha} \right) \eta_t^{\frac{s}{p}} &= \overset{\circ}{\psi}_k, \quad x \in \omega_{h_k} + \gamma_{h_k}, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ \eta(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

По аналогии с [19], [20] доказывается, что

$$\eta_{(k)}^{j+k/p} = O(\tau^\alpha), \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1.$$

Функция $v^{(k)}$ определяется условиями

$$(22) \quad \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t_{j+(k-s+1)/p}^{1-\alpha} - t_{j+(k-s)/p}^{1-\alpha} \right) \eta_t^{\frac{s}{p}} = \Lambda_k v^{(k)} + \tilde{\psi}_k, \quad \tilde{\psi}_k = \Lambda_k \eta^{(k)} + \psi_k^*,$$

$$(23) \quad \begin{cases} v_{x_k, 0} = \lambda_{-k} v_0 + \tilde{\psi}_{-k}, & \tilde{\psi}_{-k} = -\eta_{x_k, 0}^{j+k/p} + \lambda_{-k} \eta^{(k)} - \psi_{-k}, \\ -v_{\bar{x}_k, N_k} = \lambda_{+k} v_{N_k} + \tilde{\psi}_{+k}, & \tilde{\psi}_{+k} = \eta_{\bar{x}_k, N_k}^{j+k/p} + \lambda_{+k} \eta^{(k)} - \psi_{+k}, \end{cases}$$

$$(24) \quad v_{(k)}(x, 0) = 0.$$

Воспользуемся теперь (21) для оценки решения задачи (22) — (24) $v^{(k)}$:

$$\|v^{j+1}\|_{C_h} \leq \frac{2}{\lambda_*} \sum_{k=1}^p \max_{t \in \omega_\tau} \left(\|\tilde{\psi}_{-k}(t)\|_{C_{\gamma_k^-}} + \|\tilde{\psi}_{+k}(t)\|_{C_{\gamma_k^+}} \right) +$$

$$(25) \quad + \sum_{k=1}^p \frac{\ell_k^{\beta_k-1} \Gamma(2-\beta_k)}{\lambda_*} \max_{0 \leq j' \leq j} \|\tilde{\psi}^{j'+k/p}\|_{C_h}.$$

Если существуют непрерывные в замкнутой области \bar{Q}_T производные $\frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\beta^2}$, $k \neq \beta$, то

$$\Lambda_k \eta_{(k)} = -\tau^\alpha \Lambda_k \left(\overset{\circ}{\psi}_{k+1} + \dots + \overset{\circ}{\psi}_p \right) = O(\tau^\alpha), \quad \tilde{\psi}_{-k} = \tilde{\psi}_{+k} = O(h).$$

Поэтому из оценки (25) получаем

$$\|z^j\|_{C_h} \leq \|v^j\|_{C_h} \leq M \left(\frac{h}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1} \right),$$

так как $\eta^j = 0$ для всех $j = 0, 1, \dots, j_0$.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 2. Пусть задача (1) – (3) имеет единственное непрерывное в \bar{Q}_T решение $u(x, t)$ и существуют непрерывные в \bar{Q}_T производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_s^2}, \quad \frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_k^2 \partial t^\alpha}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}, \quad 1 \leq k, s \leq p, \quad k \neq s.$$

Тогда локально-одномерная схема (11) – (13) равномерно сходится со скоростью

$$O \left(\frac{h}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1} \right), \quad h = O(\tau^{1-\alpha}), \quad 1/2 < \alpha \leq 1,$$

так что

$$\|y^j - u^j\|_{C_h} \leq M \left(\frac{h}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1} \right),$$

где $h = \max_k h_k$, $M > 0$, M – не зависит от h и τ .

REFERENCES

- [1] K.V. Chukbar, *Stochastic transport and fractional derivatives*, Zh. Éksp. Teor. Fiz., **108**:11 (1995), 1875–1884.
- [2] V.L. Kobelev, Ya.L. Kobelev, E.P. Romanov, *Self-maintained processes in the case of nonlinear fractal diffusion*, Dokl. Phys., **44** (1999), 752–753.
- [3] V.L. Kobelev, Ya.L. Kobelev, E.P. Romanov, *Non-Debye relaxation and diffusion in fractal space*, Dokl. Phys., **43** (1998), 752–753.
- [4] V.M. Goloviznin, V.P. Kiselev, I.A. Korotkin, Yu.P. Yurkov, *Pryamye zadachi klassicheskogo perenosa radionuklidov v geologicheskikh formatsiyakh*, Izv. Ross. Akad. Nauk, Energ., **2004**:4 (2004), 121–130.
- [5] V.M. Goloviznin, V.P. Kiselev, I.A. Korotkin, Yu.P. Yurkov, *Chislennyye metody resheniya uravneniya diffuzii s drobnoy proizvodnoy v odnomernom sluchaye*, Preprint IBRAE, **2003-12**, IBRAE RAS, Moscow, 2003.
- [6] R.R. Nigmatulin, *Relaxation features in a system with remnant memory*, Fiz. Tverd. Tela, **27**:5 (1985), 1583–1585.
- [7] V.Kh. Shogenov, A.A. Akhkubekov, R.A. Akhkubekov, *Fractional differentiation method in the theory of Brownian motion*, Izv. Vyssh. Uch. Zaved. Sev.-Kav. Reg., **2004**:1 (2004), 46–49.
- [8] V.V. Uchaikin, *Anomalous diffusion of particles with a finite free-motion velocity*, Theor. Math. Phys., **115**:1 (1998), 496–501. Zbl 1085.82506
- [9] V.Yu. Ziburdaev, K.V. Chukbar, *Enhanced superdiffusion and finite velocity of Levy flights*, J. Exp. Theor. Phys., **94**:2 (2002), 252–259.
- [10] J. Klafter, M.F. Shlesinger, G. Zumofen, *Beyond brownian motion*, Phys. Today., **49**:2 (1996), 33–39.

- [11] F. Mainardi, Y. Luchko, G. Pagnini, *The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation*, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **4**:2 (2001), 153–192. Zbl 1054.35156
- [12] E. Scalas, R. Gorenflo, F. Mainardi, *Uncoupled continuous-time random walks: solution and limiting behaviour of the master equation*, *Phys. Rev. E.*, **69**:1 (2004), 011107–011114.
- [13] Y. Zhang, D.A. Benson, M.M. Meerschaert, H.-P. Scheffler, *On using random walks to solve the space-fractional advection-dispersion equations*, *J. Stat. Phys.*, **123**:1 (2006), 89–110. Zbl 1092.82038
- [14] N.G. Abrashina-Zhadaeva, I.A. Timoshchenko, *Finite-difference schemes for a diffusion equation with fractional derivatives in a multidimensional domain*, *Differ. Equ.*, **49**:7 (2013), 789–795. Zbl 1286.65094
- [15] Bangti Jin, Raytcho Lazarov, Zhi Zhou, *A Petrov-Galerkin finite element method for fractional convection-diffusion equations*, *SIAM J. Numer. Anal.*, **54**:1 (2014), 481–503. Zbl 1335.65092
- [16] Bangti Jin, Raytcho Lazarov, Josef Pasciak, Zhi Zhou, *Error analysis of a finite element method for the space-fractional parabolic equation*, *SIAM J. Numer. Anal.*, **52**:5 (2014), 2272–2294. Zbl 1310.65126
- [17] Bangti Jin, Raytcho Lazarov, *An analysis of the L_1 scheme for the subdiffusion equation with nonsmooth data*, *IMA J. Numer. Anal.*, **36**:1 (2016), 197–221. Zbl 1336.65150
- [18] F.I. Taukenova, M.Kh. Shkhanukov-Lafishev, *Difference methods for solving boundary value problems for fractional differential equations*, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:10 (2006), 1785–1795.
- [19] M.M. Lafisheva, M.Kh. Shkhanukov-Lafishev, *Locally one-dimensional difference schemes for the fractional order diffusion equation*, *Comput. Math. Math. Phys.*, **48**:10 (2008), 1875–1884. Zbl 1177.76393
- [20] A.K. Bazzaev, M.Kh. Shkhanukov-Lafishev, *Locally one-dimensional scheme for fractional diffusion equations with Robin boundary conditions*, *Comput. Math. Math. Phys.*, **50**:7 (2010), 1141–1149. Zbl 1224.65198
- [21] A.K. Bazzaev, A.V. Mambetova, M.Kh. Shkhanukov-Lafishev, *Locally one-dimensional scheme for the heat equation of fractional order with concentrated heat capacity*, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **52**:9 (2012), 1656–1665. Zbl 1274.35154
- [22] A.K. Bazzaev, *Difference schemes for fractional-order diffusion equation with Robin boundary conditions in a multidimensional domain*, *Ufim. Mat. Zh.*, **5**:1 (2013), 11–16.
- [23] A.K. Bazzaev, M.Kh. Shkhanukov-Lafishev, *Locally one-dimensional schemes for the diffusion equation with a fractional time derivative in an arbitrary domain*, *Comput. Math. Math. Phys.*, **56**:1 (2016), 106–115. Zbl 1416.65253
- [24] Y. Povstenko, *Axisymmetric solutions to fractional diffusion-wave equation in a cylinder under Robin boundary condition*, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **222**:8 (2013), 1767–1777.
- [25] Y. Povstenko, *Time-fractional heat conduction in an infinite medium with a spherical hole under Robin boundary condition*, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **16**:2 (2013), 354–369. Zbl 1312.35186
- [26] Ch. Tadjeran, M. Meerschaert, H. Scheffler, *A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation*, *J. Comput. Phys.*, **213**:1 (2006) 205–213. Zbl 1089.65089
- [27] A.V. Pskhu, *Partial differential equations of fractional order*, Nauka, Moskva, 2005. Zbl 1193.35245
- [28] Yu. Luchko, *Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation*, *J. Math. Anal. Appl.*, **351**:1 (2009), 218–223. Zbl 1172.35341
- [29] Yu. Luchko, *Boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order*, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **12**:4 (2009), 409–422. Zbl 1198.26012
- [30] Yu. Luchko, *Maximum principle and its application for the time-fractional diffusion equations*, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **14**:1 (2011), 110–124. Zbl 1273.35297
- [31] Yu. Luchko, *Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation*, *Comput. Math. Appl.*, **59**:5 (2010), 1766–1772. Zbl 1189.35360
- [32] Juan J. Nieto, *Maximum principles for fractional differential equations derived from Mittag-Leffler functions*, *Appl. Math. Lett.*, **23**:10 (2010), 1248–1251. Zbl 1202.34019
- [33] H. Ye, F. Liu, V. Anh, I. Turner, *Maximum principle and numerical method for the multi-term time-space Riesz-Caputo fractional differential equations*, *Appl. Math. Comput.*, **227** (2014), 531–540. Zbl 1364.35428

- [34] M.M. Meerschaert, H.-P. Scheffler, C. Tadjeran, *Finite difference methods for two-dimensional fractional dispersion equation*, J. Comput. Phys., **211** (2006), 249–261. Zbl 1085.65080
- [35] W. Tian, H. Zhou, W. Deng, *A class of second order difference approximation for solving space fractional diffusion equations*, Math. Comput., **84**:294 (2015), 1703–1727. Zbl 1318.65058
- [36] X.-Q. Jin, F.-R. Lin, Z. Zhao, *Preconditioned iterative methods for two-dimensional space-fractional diffusion equations*, Commun. Comput. Phys., **18**:2 (2015), 469–488.
- [37] X.-L. Lin, M.K. Ng, *A fast solver multidimensional time-space fractional diffusion equation with variable coefficients*, Comput. Math. Appl., **78**:5 (2029), 1477–1489. Zbl 1442.65169
- [38] X.-L. Lin, M.K. Ng., H.-W. Sun, *Stability and convergence analysis of finite difference schemes for time-dependent space-fractional diffusion equation with variable diffusion coefficients*, J. Sci. Comput., **75**:2 (2018), 1102–1127. Zbl 1398.65214
- [39] A.K. Bazzaev, M.Kh. Shhanukov-Lafishev, *On the convergence of difference schemes for fractional differential equations with Robin boundary conditions*, Comput. Math. Math. Phys., **57**:1 (2017), 133–144. Zbl 1371.65095
- [40] A.A. Alikhanov, *Stability and convergence of difference schemes for boundary value problems for the fractional-order diffusion equation*, Comput. Math. Math. Phys., **56**:4 (2016), 561–575. Zbl 1352.65287
- [41] A.A. Alikhanov, A.M. Apekov, A.Kh. Khibiev, *Higher-order approximation difference scheme for the generalized aller equation of fractional order*, Vladikavkaz. Mat. Zh., **23**:3 (2021), 5–15. Zbl 1513.65273
- [42] A.A. Samarskii, A.V. Gulin, *Stability of difference schemes*, Nauka, Moscow, 1973. Zbl 0304.65003
- [43] A.A. Samarskii, *Theory of difference schemes*, Nauka, Moscow, 1977. Zbl 0462.65055
- [44] A.A. Samarskiy, P.N. Vabishchevich, *Vychislitel'naya teploperedacha*, Editorial URSS, Moscow, 2003.

ALEXANDER K. BAZZAEV

1) NORTH OSSETIAN STATE UNIVERSITY AFTER K.L. KHETAGUROV,
VATUTINA STR. 44 — 46,

362025, NORTH OSSETIA - ALANIA, VLADIKAVKAZ, RUSSIA,

2) VLADIKAVKAZ INSTITUTE OF MANAGEMENT,

BORODINSKAYA STR. 14,

362025, NORTH OSSETIA - ALANIA, VLADIKAVKAZ, RUSSIA

Email address: a.k.bazzaev@yandex.ru