S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 1079–1092 (2023) УДК 517.958
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.067 MSC 35Q60

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА КОЭФФИЦИЕНТА РАССЕЯНИЯ ПО ВРЕМЕННО-УГЛОВОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ИЗЛУЧЕНИЯ

П.А. Ворновских, И.В. Прохоров

Представлено М.А. Шишлениным

Abstract: In the paper the inverse problem for the nonstationary radiative transfer equation is formulated and investigated. It consists in determining the discontinuity surfaces of the scattering coefficient by the time-angular distribution of the radiation flux density at a given point in space. A numerical method for localizing the lines of discontinuity of the required coefficient in any plane is proposed. On a number of numerical experiments applied to high-frequency acoustic sounding of an inhomogeneous fluctuating ocean, the operability of the algorithm is demonstrated and its shortcomings due to the measurement data error are indicated.

Keywords: radiative transfer equation, inverse problem, scattering coefficient, function discontinuity surfaces

В работах [1, 2] рассмотрена обратная задача для уравнения переноса излучения со сосредоточенным импульсным источником, заключающаяся в нахождении коэффициента рассеяния по временно-угловому распределению плотности потока в заданной точке пространства. В двумерном и трехмерном случаях был проведен численный анализ погрешности приближения однократного рассеяния при нахождении решения обратной задачи. Обозначены границы

Localization of Discontinuity Surfaces of the Scattering Coefficient According to the Time-Angular Distribution of the Radiation Flux Density.

Работа выполнена в рамках НИОКТР АААА-А20-120120390006-0 при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение 075-02-2023-946).

Поступила 1 ноября 2022 г., опубликована 16 ноября 2023 г.

применимости приближения однократного рассеяния при акустическом зондировании океана на частотах порядка несколько сотен килогерц.

В настоящей работе рассматривается задача определения поверхностей разрыва коэффициента рассеяния по тем же исходным данным, что и в задаче, ранее рассмотренной в [1, 2]. В отличии от предыдущей задачи коэффициент ослабления излучения может быть неизвестным, но не подлежит определению в данной постановке. Предложен численный метод определения поверхностей разрыва коэффициента рассеяния, основанный на построении некоторой индикаторной функции, позволяющий сравнительно просто локализовать искомые поверхности. Метод свободен от ограничений приближения однократного рассеяния и теоретически позволяет найти решение обратной задачи в общем случае. Численные эксперименты на трехмерном фантоме из работы [2] показали работоспособность алгоритма, если уровень шума в исходных данных задачи не слишком высок.

1 Постановки прямой и обратной задач для уравнения переноса излучения

В работе рассматривается интегро-дифференциальное уравнение следующего вида

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{k}\cdot\nabla_r I(\mathbf{r},\mathbf{k},t) + \mu I(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{4\pi}\int\limits_{\Omega} I(\mathbf{r},\mathbf{k}',t)d\mathbf{k}' + J(\mathbf{r},\mathbf{k},t), \qquad (1)$$

где $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in [0,T]$ и волновой вектор $\mathbf{k}$ принадлежит единичной сфере $\Omega = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{k}| = 1\}$. Функция $I(\mathbf{r},\mathbf{k},t)$ интерпретируется как плотность потока энергии волны в момент времени t в точке $\mathbf{r}$, распространяющейся в направлении $\mathbf{k}$ со скоростью c. Неотрицательные величины μ и σ имеют смысл коэффициентов затухания и рассеяния, а функция J описывает источники излучения.

Уравнение (1) описывает множество нестационарных процессов переноса излучения в изотропно рассеивающих средах и может быть использовано для моделирования процесса распространения высокочастотных акустических полей во флуктуирующем океане [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

Добавим к уравнению (1) начальное условие

$$I^-(\mathbf{r},\mathbf{k},0) = 0, \qquad (\mathbf{r},\mathbf{k}) \in G\times\Omega \qquad (2)$$

и пусть функция J описывает точечный источник излучения, сосредоточенный в начале координат и излучающий в момент времени $t=0$ импульс единичной мощности:

$$J(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t), \qquad (3)$$

где δ — дельта-функция Дирака и $I^{\pm}(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \lim\limits_{\epsilon\to -0} I(\mathbf{r}\pm\epsilon,\mathbf{k},t\pm\epsilon)$.

Предполагается, что функция $\sigma(\mathbf{r})$ кусочно-постоянная в $\mathbb{R}^3$: $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_i, \mathbf{r} \in G_i$, $i = 0,1,...,p$, где G_i, $i = 1,...p$ ограниченные попарно не пересекающиеся области и $G_0 = \mathbb{R}^3\setminus(G_1\cup....\cup G_p)$. Поверхности ∂G_i достаточно гладкие класса C^1, а разбиение $G_1, G_2, ...G_p$ удовлетворяет условию обобщенной выпуклости [10], а именно — множество $\gamma = \partial G_1 \cup .... \cup \partial G_p$ пересекается любой прямой в конечном числе точек.

Сформулируем прямую и две обратных задачи для нестационарного уравнения переноса излучения (1).

Задача 1. *Найти функцию I из уравнения (1) и начального условия (2) при всех заданных коэффициентах c, μ, σ, J.*

Задача 2. *Найти функцию σ из соотношений (1),(2),(3) и дополнительного условия*

$$I^{+}(0, \mathbf{k}, t) = P(\mathbf{k}, t), \tag{4}$$

в которых величины c, μ и функция P известны.

Задача 3. *Определить поверхности разрыва функции σ (множество γ) из соотношений (1),(2),(3) и дополнительного условия (4), в которых c, P известны.*

Решение обратных коэффициентных задач для интегро-дифференциальных уравнений переноса в общем виде представляет собой достаточно сложную математическую проблему. Чаще всего удается доказать единственность решения обратных задач при ограничениях на исходные данные типа «малости» [11, 12]. В тоже время теория обратных задач для уравнений переноса излучения постоянно привлекает внимание специалистов и ее развитие идет, как по пути создания новых методов, так и по пути усложнения существующих моделей переноса излучения [7, 13, 14, 15, 16, 17].

В постановке Задачи 3 требуется определить только поверхности разрыва функции σ. Нахождение такой частичной информации об искомом коэффициенте уравнения переноса излучения сильно упрощает исходную задачу [10]. В монографии [10] разработаны и обоснованы методы определения поверхностей разрыва коэффициентов стационарного уравнения переноса излучения. Задачи подобного типа, посвященные нахождению линий разрыва функции для упрощенных моделей томографии, рассматривались многими авторами [18, 20, 19, 21, 23, 22, 24, 25, 26]. Разработано широкое множество методов локализации линий разрыва функции для различных схем сканирования.

2 Прямая задача для уравнения переноса излучения и метод Монте-Карло для вычисления приближенного решения

Задача Коши (1),(2) эквивалентна уравнению интегрального типа, которое в $\mathbb{R}^3$ имеет следующий вид [1, 2]:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{ct} & \exp(-\mu\tau)\times \\ & \times \left(\frac{\sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k})}{4\pi} \int_\Omega I\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c}\right) d\mathbf{k}' + J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c}\right)\right) d\tau. \end{aligned} \tag{5}$$

Решение уравнения (5) может быть найдено виде ряда Неймана

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t), \tag{6}$$

где функции I_n, $n = 0, 1, ...$, определяются рекуррентным образом

$$I_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int\limits_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \frac{\sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k})}{4\pi} \int\limits_\Omega I_{n-1}\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c}\right) d\mathbf{k}' d\tau, \tag{7}$$

$$I_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \times J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c}\right) d\tau \tag{8}$$

и J имеет вид (3). В работах [1, 2] получены выражения для всех компонент ряда Неймана $I_n, n = 2, 3, , , ,$

$$I_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{2c \exp(-\mu ct)}{4\pi |\mathbf{r} - ct\mathbf{k}|^2} \sigma(\mathbf{r} - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)\mathbf{k}) \chi_{ct}(\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)). \tag{9}$$

$$I_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{2c \exp(-\mu ct)}{(4\pi)^n} \int\limits_0^{\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)} \int\limits_\Omega ... \int\limits_0^{\tau(\mathbf{r}_{n-2}, \mathbf{k}_{n-2}, t_{n-2})} \int\limits_\Omega \prod_{i=1}^{n-1} \sigma(\mathbf{r}_i) \times$$
$$\times \frac{\sigma(\overline{\mathbf{r}}_{n-1})}{|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1}\mathbf{k}_{n-1}|^2} d\mathbf{k}_{n-1} d\tau_{n-1} ... d\mathbf{k}_1 d\tau_1, \tag{10}$$

где $\overline{r}_{n-1} = \mathbf{r}_{n-1} - \tau(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1})\mathbf{k}_{n-1}$ и $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \tau_i \mathbf{k}_{i-1}$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$, $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$, $t_i = t_{i-1} - \tau_i/c$, $t_0 = t$, $i = 1, ..., n-1$, $\chi_a(x)$ —характеристическая функция интервала $[0, a]$ и

$$\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s) = \frac{1}{2} \frac{(cs)^2 - |\mathbf{r}|^2}{cs - (\mathbf{r}, \mathbf{k})}.$$

Таким образом, выражение для функции I имеет вид

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = I_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) +$$
$$+ \frac{c \exp(-\mu ct)}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \int\limits_0^{\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)} \int\limits_\Omega ... \int\limits_0^{\tau(\mathbf{r}_{n-2}, \mathbf{k}_{n-2}, t_{n-2})} \int\limits_\Omega \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma(\mathbf{r}_i)}{4\pi} \times$$
$$\times \frac{\sigma(\overline{\mathbf{r}}_{n-1})}{|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1}\mathbf{k}_{n-1}|^2} d\mathbf{k}_{n-1} d\tau_{n-1} ... d\mathbf{k}_1 d\tau_1. \tag{11}$$

Кратко опишем схему применения метода Монте-Карло для вычисления усеченной суммы ряда Неймана (11) в точке $(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0) = (\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ [27, 28]. Строится траектория

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0), (\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1), , ..., (\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1}), \tag{12}$$

где

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \tau_i \mathbf{k}_{i-1}, \ t_i = t_{i-1} - \tau_i/c, \ i = 1 \dots n-1, \tag{13}$$

$\mathbf{k}_i$ — случайный вектор, равномерно распределённый на единичной сфере Ω, τ_i — случайная величина, равномерно распределённая на отрезке $[0, \tau(\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{k}_{i-1}, t_{i-1})]$.

Процесс построения марковской цепочки (12) завершается вычислением еще одной дополнительной точки $\overline{r}_{n-1} = \mathbf{r}_{n-1} - \tau(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1})\mathbf{k}_{n-1}$. Затем вычисляется случайна величина

$$\Theta_N = \frac{c \exp(-\mu ct_0)}{2\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sigma(\overline{\mathbf{r}}_{n-1})}{|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1}\mathbf{k}_{n-1}|^2} \theta_{n-1}, \tag{14}$$

где случайные величины θ_n определяются рекуррентным образом

$$\theta_n = \theta_{n-1}\sigma(\mathbf{r}_n)\tau(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1}), \quad \theta_0 = 1, \quad n = 1, 2, ...$$

Указанная процедура повторяется M раз, и полученная выборка случайной величины Θ_N усредняется. Полученное значение дает оценку математического ожидания случайной величины Θ_N, а это, в свою очередь, является оценкой для плотности потока излучения $I(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)$ в приближении N-кратного рассеяния.

3 Численный метод локализации поверхностей разрыва функции $\sigma(\mathbf{r})$

Так как в точке $\mathbf{r}_0 = 0$ функция $\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}, t) = ct/2$ и $\chi_{ct}(ct/2) = 1$, то из (9),(11) получаем

$$I_1^+(0, \mathbf{k}, t) = \frac{\exp(-\mu ct)}{2\pi ct^2}\sigma\left(-\frac{ct}{2}\mathbf{k}\right), \tag{15}$$

$$I^+(0, \mathbf{k}, t) = \frac{\exp(-\mu ct)}{2\pi ct^2}\sigma(\overline{\mathbf{r}}_0) + \\ + \frac{c\exp(-\mu ct)}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\int\limits_0^{\tau(\mathbf{r}_0,\mathbf{k}_0,t_0)}\int\limits_\Omega ... \int\limits_0^{\tau(\mathbf{r}_{n-2},\mathbf{k}_{n-2},t_{n-2})}\int\limits_\Omega \prod_{i=1}^{n-1}\frac{\sigma(\mathbf{r}_i)}{4\pi}\times \\ \times \frac{\sigma(\overline{\mathbf{r}}_{n-1})}{|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1}\mathbf{k}_{n-1}|^2} d\mathbf{k}_{n-1}d\tau_{n-1}...d\mathbf{k}_1 d\tau_1. \tag{16}$$

Полагая $\mathbf{k} = -\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ и $t = \dfrac{2|\mathbf{r}|}{c}$ из (15) находим искомую функция $\sigma(\mathbf{r})$

$$\sigma(\mathbf{r}) = I_1^+\left(0, -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right)\left(\frac{c\exp(-2\mu|\mathbf{r}|)}{8\pi|\mathbf{r}|^2}\right)^{-1}. \tag{17}$$

Формула (17) дает явное решение обратной Задачи 2 в приближении однократного рассеяния.

В постановке обратной Задачи 2 считается известным полный поток излучения $P(\mathbf{k}, t) = I^+(0, \mathbf{k}, t) = I_1^+(0, \mathbf{k}, t) + ... + I_n^+(0, \mathbf{k}, t) + ...$ в точке $\mathbf{r} = 0$, а не каждая функция $I_n^+(0, \mathbf{k}, t)$ в отдельности, поэтому нахождение функции $\sigma(\mathbf{r})$ по формуле

$$\sigma(\mathbf{r}) = P\left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right)\left(\frac{c\exp(-2\mu|\mathbf{r}|)}{8\pi|\mathbf{r}|^2}\right)^{-1} \tag{18}$$

приводит к естественной ошибке. В работах [1, 2] проведен количественный и качественный анализ искажений при расчете функции σ по формуле (18) в зависимости от учитываемой кратности рассеяния.

Непосредственно из (17) видно, что поверхности разрыва функции $\sigma(\mathbf{r})$ совпадают с линиями разрыва функции

$$\widehat{I}_1(\mathbf{r}) = I_1^+\left(0, -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right).$$

Можно показать, что при условии обобщенной выпуклости [10] функции

$$\widehat{I}_n(\mathbf{r}) = I_n^+\left(0, -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right)$$

при $n = 2, 3, ...$ непрерывны по переменной $\mathbf{r}$, следовательно, поверхности разрывов функций $\sigma(\mathbf{r})$ и

$$\widehat{P}(\mathbf{r}) = \frac{8\pi}{c}\exp(2\mu|\mathbf{r}|)|\mathbf{r}|^2 P\left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right) = \\ = \frac{8\pi}{c}\exp(2\mu|\mathbf{r}|)|\mathbf{r}|^2\left(\widehat{I}_1(\mathbf{r}) + \widehat{I}_2(\mathbf{r}) + ...\right) \quad (19)$$

совпадают. Строгое доказательство непрерывности функций $\widehat{I}_n(\mathbf{r})$, $n = 2, 3, ...$ достаточно громоздкое и выходит за рамки данной статьи. Отметим лишь, что доказательство непрерывности функций $\widehat{I}_3(\mathbf{r}), \widehat{I}_2(\mathbf{r}), ...$ по переменной $\mathbf{r}$ упирается в доказательство непрерывности функции

$$I_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{c\exp(-\mu ct)}{8\pi}\times \\ \times \int\limits_0^{\tau(\mathbf{r},\mathbf{k},t)}\int\limits_\Omega \frac{\sigma(\mathbf{r} - \tau_1\mathbf{k})\sigma\left(\mathbf{r} - \tau_1\mathbf{k} - \tau(\mathbf{r} - \tau_1\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, t - \tau_1/c)\mathbf{k}_1\right)}{|\mathbf{r} - \tau_1\mathbf{k} - (ct - \tau_1)\mathbf{k}_1|^2} d\mathbf{k}_1 d\tau_1 \quad (20)$$

по переменным $\mathbf{r}, t, \mathbf{k}$. Если непрерывность функции I_2 показана, то учитывая рекуррентный способ определения функций $I_3, I_4, ...$ по формуле (7), доказательство непрерывности функций $I_n, n > 2$ провести значительно проще.

Для локализации поверхностей разрыва коэффициента рассеяния можно воспользоваться следующим алгоритмом. Выбирается произвольная плоскость в $\mathbb{R}^3$, например $r_3 = l$, и прямоугольная область интереса изменения переменных r_1, r_2. В этой области на сетке $\mathbf{r}_{i,j} = (r_{1,i}, r_{2,j}, 0)$ с некоторым шагом h, $r_{1,i} = r_{1,0} + ih$, $r_{2,j} = r_{2,0} + jh$, вычисляется функция

$$\mathrm{Ind}(\mathbf{r}_{i,j}) = (\widehat{P}(\mathbf{r}_{i+1,j}) - \widehat{P}(\mathbf{r}_{i-1,j}))^2 + (\widehat{P}(\mathbf{r}_{i,j+1}) - \widehat{P}(\mathbf{r}_{i,j-1}))^2. \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что при стремлении h к нулю, функция $\mathrm{Ind}(\mathbf{r})$ стремится к нулю всюду в области интереса за исключением точек из h-окрестности линий разрыва функции $\widehat{P}$. Меняя параметр l, поверхности разрыва функции $\widehat{P}$ в $\mathbb{R}^3$ определяются послойно в произвольной горизонтальной плоскости. Так как поверхности разрыва функций σ и $\widehat{P}$ совпадают, то после применения указанного алгоритма приближенное решение обратной Задачи 3 будет найдено, как место положение точек, где функция $\mathrm{Ind}(\mathbf{r})$ принимает значения больше некоторого порогового. Функция $\mathrm{Ind}(\mathbf{r})$ является в некотором смысле индикаторной функцией множества γ. Отметим, что в определении функции $\widehat{P}(\mathbf{r})$ входит параметр μ, который в общем случае неизвестен в постановке Задачи 3. При реализации алгоритма нахождения решения обратной задачи параметр μ можно положить равным нулю, либо воспользоваться априорными приближенными значениями. Наличие множителя $\exp(2\mu|\mathbf{r}|)$ в (19) для применения метода не принципиально, поскольку указанный множитель является гладкой функцией переменной $\mathbf{r}$. Однако, хорошо подобранное значение μ в соотношении (19) может улучшить качество восстановления линий разрыва функции $\sigma(\mathbf{r})$ в дальней зоне (при $|\mathbf{r}| \to \infty$).

4 Вычислительные эксперименты

Для удобства описания численных результатов обозначим через $\widehat{P}_n(\mathbf{r})$ функцию, определяемую соотношением (19), где вместо бесконечной суммы $\widehat{I}_1(\mathbf{r}) + \widehat{I}_2(\mathbf{r}) + ...$ стоит конечная сумма из n слагаемых $\widehat{I}_1(\mathbf{r}) + ... + \widehat{I}_n(\mathbf{r})$. Фактически, функция $\widehat{P}_n(\mathbf{r})$ определяется через решение уравнения переноса излучения в точке 0 в приближении n-кратного рассеяния. Обозначим через Ind_n соответствующую индикаторную функцию

$$\mathrm{Ind}_n(\mathbf{r}_{i,j}) = (\widehat{P}_n(\mathbf{r}_{i+1,j}) - \widehat{P}_n(\mathbf{r}_{i-1,j}))^2 + (\widehat{P}_n(\mathbf{r}_{i,j+1}) - \widehat{P}_n(\mathbf{r}_{i,j-1}))^2. \qquad (22)$$

Функция $\mathrm{Ind}_n(\mathbf{r})$ локализует линии разрыва коэффициента рассеяния $\sigma(r)$ в модели переноса излучения, учитывающей многократное рассеяние в среде до n-ой кратности включительно.

Тестирование алгоритма проводилось на фантоме из работы [2] для включений, ограниченных эллипсоидами. Скорость звука и коэффициент затухания соответствуют реальным величинам, характерным для акустического зондирования в морской среде на частотах порядка сотен килогерц: $c = 1500$м/с, $\mu = 0.018$м$^{-1}$. Отношение σ/μ в основной водной среде составляло 0.1 [4], а во включениях уровень рассеяния колебался в диапазоне от 0 до 1.

Проведено два численных эксперимента, отличающихся размерами реконструируемых областей. В первом эксперименте восстановление объектов проводилось в плоскости $r_3 = 0$ в области зондирования с размерами 400м $\times$ 200м, ($r_1 \in [-200, 200], r_2 \in [0, 200]$) и с шагом дискретизации $h = 1$м на сетке $r_{1,i} = r_{1,0} + ih$, $r_{2,j} = r_{2,0} + jh$, $i = 1, ..., 400$, $j = 1, ..., 200$, $r_{1,0} = -200$, $r_{2,0} = 0$. Во втором эксперименте область интереса была увеличена в 2 раза с соответствующим увеличением масштаба самих включений и местом их расположения. То есть реконструкция включений осуществлялась в области зондирования с размерами 800м $\times$ 400м и с шагом дискретизации $h = 2$м ($r_{1,i} = r_{1,0} + ih$, $r_{2,j} = r_{2,0} + jh$, $i = 1, ..., 400$, $j = 1, ..., 200$, $r_{1,0} = -400$, $r_{2,0} = 0$. Заметим, что с математической точки зрения для моделирования процесса переноса излучения в средах, отличающихся лишь размерами с сохранением структуры рассеивающих объектов, достаточно пропорционально увеличить или уменьшить коэффициенты ослабления и рассеяния без изменения размеров региона зондирования. В нашем случае коэффициенты ослабления и рассеяния из первого эксперимента нужно увеличить в два раза.

На рис. 1 в графическом виде приведено распределение функции $\sigma(\mathbf{r})$ в плоскости $r_3 = 0$ для условий первого эксперимента.

На рисунках 2 и 3 в графическом виде представлены результаты расчетов функций $\mathrm{Ind}_2, \mathrm{Ind}_5, \mathrm{Ind}_8$ для первого и второго экспериментов, соответственно. Более темные цвета на рисунках соответствуют большим значениям функций Ind_2, Ind_5 и Ind_8. Распределения указанных функций позволяют локализовать линии разрыва $\sigma(\mathbf{r})$, если решение уравнения переноса вычисляется в приближении двукратного, пятикратного и восьмикратного рассеяния, соответственно.

Визуальный анализ рисунков показывает, что качество реконструкции также, как и в работах [1, 2] падает с увеличением n и ростом дальности зондирования. Однако, снижение качества томографического изображения происходит

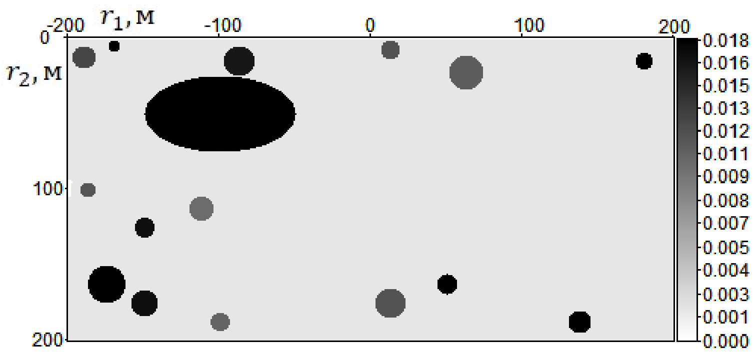


Рис. 1. Карта распределения функции $\sigma(r_1, r_2, 0)$ в области зондирования 400×200 м^2

не столь значительно, как это было при определении коэффициента ослабления по явной формуле, отвечающей приближению однократного рассеяния [1, 2].

Для количественной оценки качества локализации линий разрыва нужно подобрать подходящую величину. В работе [2] для этой цели была выбрана относительная среднеквадратичная ошибка между точным решением и приближенным решением обратной Задачи 2. Использование такой величины для анализа точности восстановления линий разрыва коэффициента не подходит, поэтому мы взяли следующую характеристику

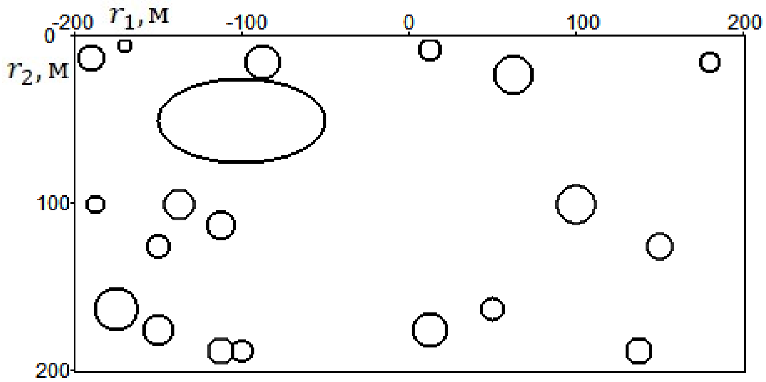
$$\varepsilon_n = \sqrt{\frac{\sum\limits_i \sum\limits_j \left(\mathrm{Ind}_1(r_{1,i}, r_{2,j}, 0) - \mathrm{Ind}_n(r_{1,i}, r_{2,j}, 0)\right)^2}{\sum\limits_i \sum\limits_j \mathrm{Ind}_1^2(r_{1,i}, r_{2,j}, 0)}}. \tag{23}$$

Фактически, величина ε_n есть относительная среднеквадратичная погрешность между Ind_1 и Ind_n. Так как однократное рассеяние I_1 вычисляется аналитически, то на расчет функции Ind_1 оказывают влияние только ошибки дискретизации на сетке $(r_{1,i}, r_{2,j}, 0)$. В этом смысле ее изображение можно считать эталонным. В таблицах 1 и 2 приведены значения величин $\varepsilon_2, ..., \varepsilon_8$, вычисленных по формуле (23).

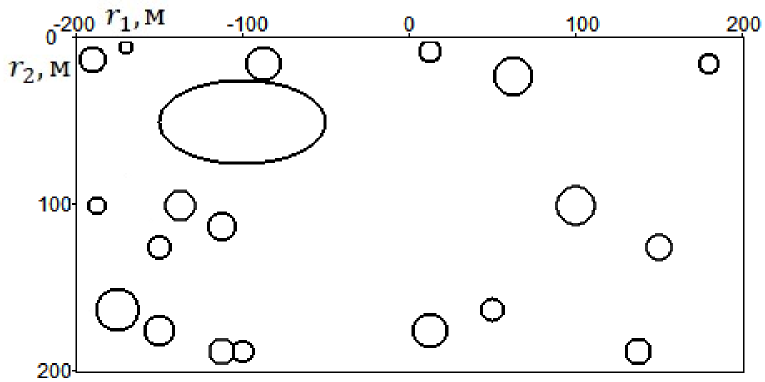
Сравнивая рисунок 2 с рисунком 3 и таблицу 1 с таблицей 2, убеждаемся, что для достаточно больших n погрешность ε_n растет с увеличением области зондирования. Так как при расчете непрерывной части ряда Неймана с помощью метода Монте-Карло возникают ошибки случайного характера, которые в общем случае нарушают непрерывность функции $I_2 + I_3 + ... + I_n$, то с увеличением размеров зондируемого региона вклад суммы $I_2 + I_3 + ... + I_n$ растет по сравнению с вкладом первого слагаемого I_1. Следовательно, увеличивается погрешность вычисления функции $\mathrm{Ind}_n(\mathbf{r})$.

Таблица 1. Среднеквадратичное отклонение функции $\mathrm{Ind}_n(\mathbf{r})$ от $\mathrm{Ind}_1(\mathbf{r})$ для области зондирования 400×200 м^2

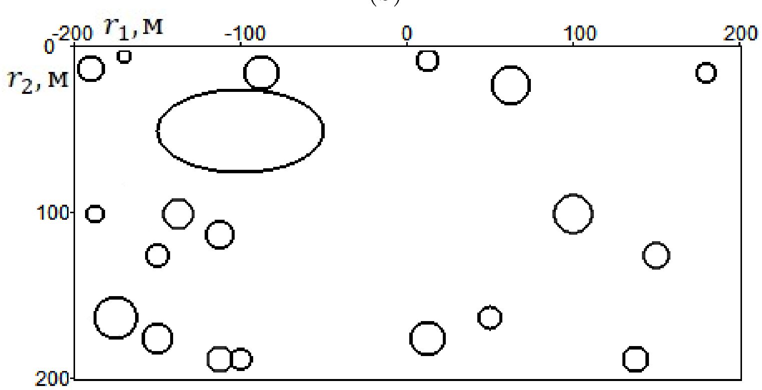
ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8
0.00511	0.00990	0.01274	0.01389	0.01428	0.01440	0.01443



(a)

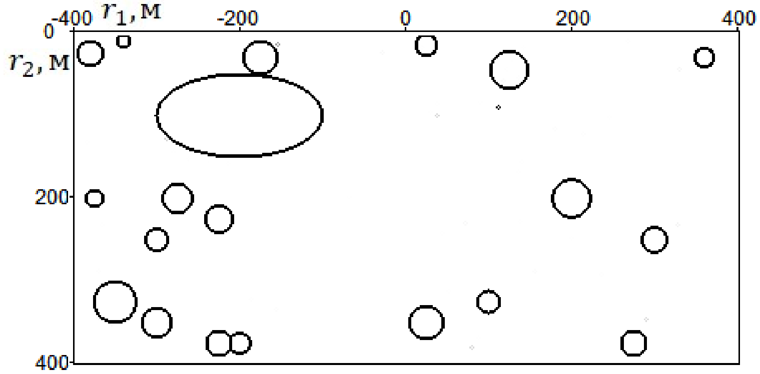


(b)

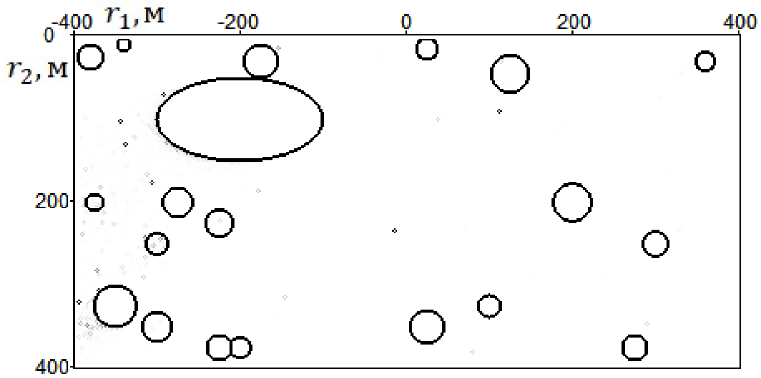


(c)

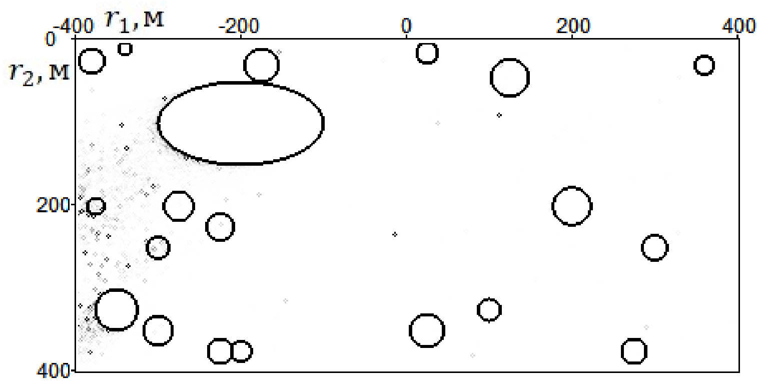
Рис. 2. Результаты восстановления линий разрыва коэффициента рассеяния $\sigma(\mathbf{r})$ для области зондирования 400×200 м^2: (a)– карта распределения функции $\mathrm{Ind}_2(r_1, r_2, 0)$; (b)– карта распределения функции $\mathrm{Ind}_5(r_1, r_2, 0)$; (c)– карта распределения функции $\mathrm{Ind}_8(r_1, r_2, 0)$;



(a)



(b)



(c)

Рис. 3. Результаты восстановления линий разрыва коэффициента рассеяния $\sigma(\mathbf{r})$ для области зондирования 800×400 м^2: (a)– карта распределения функции $\mathrm{Ind}_2(r_1, r_2, 0)$; (b)– карта распределения функции $\mathrm{Ind}_5(r_1, r_2, 0)$; (c)– карта распределения функции $\mathrm{Ind}_8(r_1, r_2, 0)$;

Таблица 2. Среднеквадратичное отклонение функции $\mathrm{Ind}_n(\mathbf{r})$ от $\mathrm{Ind}_1(\mathbf{r})$ для области зондирования 800×400 м^2

ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8
0.007804	0.02181	0.03805	0.05224	0.06172	0.07001	0.0723

Как в первом, так и во втором экспериментах погрешность ε_n растет с ростом n и ее рост, как и при решении Задачи 2 в приближении однократного рассеяния, замедляется для достаточно больших n [1, 2]. Подчеркнем, что в отличие от результатов работ [1, 2], ухудшение качества восстановления с ростом учитываемых актов рассеяния n в среде не связано с ограничениями присущими приближению однократного рассеяния, а вызвано неизбежной погрешностью вычисления решения прямой задачи. На практике такая ситуация может складываться при недостаточной точности измерений для получения исходных данных обратной Задачи 3. Для достижения требуемой точности вычисления функций $\mathrm{Ind}_n(\mathbf{r})$ с ростом n необходимо существенно увеличивать количество траекторий в методе Монте-Карло при расчете решения уравнения переноса излучения I. При тестировании мы намерено не повышали количество испытаний для того, чтобы продемонстрировать недостатки метода реконструкции линий разрыва коэффициента рассеяния, обусловленные его чувствительностью к ошибкам измерений. В каждом из двух первых экспериментов количество траекторий для вычисления решения уравнения переноса в заданной точке выбиралось одно и тоже и равнялось 600.

Чтобы убедиться в том, что дело именно в точности решения уравнения переноса излучения, мы повторили второй численный эксперимент с уточненными исходными данными. Для вычисления решения прямой задачи в заданной точке фазового пространства было разыграно 6000 траекторий при реализации метода Монте-Карло, что в десять раз больше, чем в первых двух экспериментах.

Таблица 3. Среднеквадратичное отклонение функции $\mathrm{Ind}_n(\mathbf{r})$ от $\mathrm{Ind}_1(\mathbf{r})$ для области зондирования 800×400 м^2 с повышенной точностью вычисления функции $I(0, \mathbf{k}, t)$

ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8
0.00208	0.00658	0.01224	0.01796	0.02266	0.02999	0.03062

Среднеквадратичные ошибки ε_n, $n = 1, ..., 8$ и карта распределения функции $\mathrm{Ind}_8(r_1, r_2, 0)$ для этого эксперимента приведены в таблице 3 и на рисунке 3, соответственно. По сравнению с результатами второго эксперимента, значения ε_n действительно уменьшились более чем в два раза, а качество восстановления линий разрыва коэффициента рассеяния существенно повысилось, что свидетельствует о работоспособности метода для зондирования рассеивающий сред на большой дальности при соблюдении условий, обеспечивающих хорошую точность измерений.

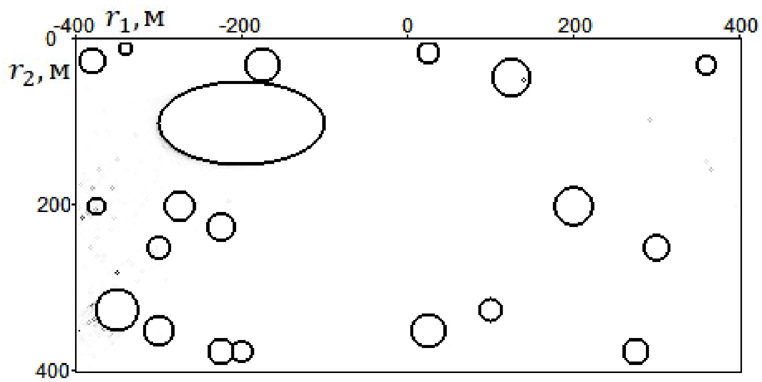


Рис. 4. Карта распределения функции $\mathrm{Ind}_8(r_1, r_2, 0)$ для области зондирования 800×400 м^2 с повышенной точностью вычисления функции $I(0, \mathbf{k}, t)$.

Заключение

В работе рассмотрена новая постановка обратной задачи для уравнения переноса излучения, заключающаяся в восстановлении поверхностей разрыва коэффициента рассеяния по временно-угловому распределению потока излучения в заданной точке пространства, и предложен численный метод локализации искомых поверхностей, основанный на построении некоторой индикаторной функции. Путем численного моделирования проведен анализ качества восстановления томографических изображений в зависимости от дальности зондирования и различной степени учета кратности рассеяния в среде. Показано, что алгоритм может успешно применяться для локализации неоднородностей рассеивающих сред при соблюдении ограничений на точность измерений обратно рассеянного сигнала.

References

[1] P.A. Vornovskikh, A. Kim, I.V. Prokhorov, *The applicability of the approximation of single scattering in pulsed sensing of an inhomogeneous medium*, Computer Research and Modeling, **12**:5 (2020), 1063–1079.

[2] P.A. Vornovskikh, I.V. Prokhorov, *Comparative analysis of the error of the single scattering approximation when solving one inverse problem in two-dimensional and three-dimensional cases*, Dal'nevost. Mat. Zh., **21**:2 (2021), 151–165. Zbl 1483.35148

[3] A. Ishimaru, *Wave propagation and scattering in random media*, Academic Press, New York, 1978. Zbl 0873.65115

[4] V.I. Mendus, G.A. Postnov, *On angular intensity distribution of high-frequency ambient dynamic noise of the ocean*, Akust. Zh. **39**:6 (1993), 1107–1116.

[5] I.B. Andreeva, A.V. Belousov, *Applicability of the single-scattering approximation to problems of acoustic scattering from clusters of sea creatures*, Acoustical Physics, **42**:4 (1996), 495–496.

[6] G. Bal, *Kinetics of scalar wave fields in random media*, Wave Motion, **43**:2 (2005), 132–157. Zbl 1231.76257

[7] G. Bal, *Inverse transport theory and applications*, Inverse Probl., **25**:5 (2009), Article ID 053001. Zbl 1178.35377

[8] I.V. Prokhorov, V.V. Zolotarev, I.B. Agafonov, *The problem of acoustic sounding within fluctuation ocean*, Dal'nevost. Mat. Zh., **11**:1 (2011), 76–87. Zbl 1268.35116

[9] I.V. Prokhorov, A.A. Sushchenko, *Studying the problem of acoustic sounding of the seabed using methods of radiative transfer theory*, Acoustical Physics, **61**:3 (2015), 368–375.

[10] D.S. Anikonov, A.E. Kovtanyuk, I.V. Prokhorov, *Transport equation and tomography*, Inverse and Ill-Posed Problems Series, **30**, VSP, Utrecht, 2002. Zbl 1042.45009

[11] A.I. Prilepko, A.L. Ivankov, *Inverse problems for determining the coefficient, the scattering indicatrix and the right-hand side of a time-dependent multiple-speed transport equation.*, Diff. Uravn., **21**:5 (1985), 870–885. Zbl 0572.45013

[12] V.G. Romanov, *A stability estimate in the problem of determining the dispersion index and relaxation for the transport equation*, Sib. Math. J., **37**:2 (1996), 308–324. Zbl 0878.45004

[13] S. Acosta, *Time reversal for radiative transport with applications to inverse and control problems*, Inverse Probl., **29**:8 (2013), Article ID 085014. Zbl 1277.35341

[14] C. Wang, T. Zhou, *A hybrid reconstruction approach for absorption coefficient by fluorescence photoacoustic tomography*, Inverse Probl., **35**:2 (2019), Article ID 025005. Zbl 1408.92013

[15] M. Bellassoued, Y. Boughanja, *An inverse problem for the linear Boltzmann equation with a time-dependent coefficient*, Inverse Probl., **35**:8 (2019), Article ID 085003. Zbl 1447.35372

[16] W. Dahmen, F. Gruber, O. Mula, *An adaptive nested source term iteration for radiative transfer equations*, Math. Comput., **89**:324 (2020), 1605–1646. Zbl 1437.65183

[17] Q. Li, W. Sun, *Applications of kinetic tools to inverse transport problems*, Inverse Probl., **36**:3, (2020), Article ID 035011. Zbl 1452.65211

[18] A. Faridani, E.L. Ritman, K.T. Smith, *Local tomography*, SIAM J. Appl. Math., **52**:2 (1992), 459–484. Zbl 0758.65081

[19] A. Faridani, D.V. Finch, E.L. Ritman, K.T. Smith, *Local tomography. II*, SIAM J. Appl. Math., **57**:4 (1997), 1095–1127. Zbl 0897.65083

[20] E.T. Quinto, *Singularities of the X-ray transform and limited data tomography in R^2 and R^3*, SIAM J. Math. Anal., **24**:5 (1993), 1215–1225. Zbl 0784.44002

[21] A.G. Ramm, A.I. Katsevich, *The Radon transform and local tomography*, CRC Press, Boca Raton, 1996. Zbl 0863.44001

[22] D.S. Anikonov, V.G. Nazarov, I.V. Prokhorov, *Algorithm of finding a body projection within an absorbing and scattering medium*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **18**:8 (2010), 885–893. Zbl 1279.92043

[23] D.S. Anikonov, V.G. Nazarov, I.V. Prokhorov, *An integrodifferential indicator for the problem of single beam tomography*, J. Appl. Ind. Math., **8**:3 (2014), 301–306. Zbl 1340.65331

[24] V.G. Romanov, *Recovering jumps in X-ray tomography*, J. Appl. Ind. Math., **8**:4 (2014), 582–593. Zbl 1340.35395

[25] E.Yu. Derevtsov, S.V. Mal'tseva, I.E. Svetov, *Determination of discontinuities of a function in a domain with refraction from its attenuated ray transform*, J. Appl. Ind. Math., **12**:4 (2018), 619–641. Zbl 1438.65317

[26] S.V. Mal'tseva, I.E. Svetov, A.P. Polyakova, *Reconstruction of a function and its singular support in a cylinder by tomographic data*, Euras. J. Math. Computer Appl., **8**:2 (2020), 86–97.

[27] G.I. Marchuk, G.A. Mikhailov, M.A. Nazaraliev, *The Monte Carlo methods in atmospheric optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[28] G.A. Mikhailov, I.N. Medvedev, *Optimization of Weighted algorithms of statistical solution*, Omega Print, Novosibirsk, 2011.

Polina Andreevna Vornovskikh
Institute of Applied Mathematics FEB RAS,
str. Radio, 7,
Vladivostok, 690041, Russia;
Far Eastern Federal University,
10 Ajax Bay, Russky Island,
Vladivostok, 690922, Russia
Email address: vornovskikh.polina@gmail.com

Igor Vasilievich Prokhorov
Institute of Applied Mathematics FEB RAS,
str. Radio, 7,
Vladivostok, 690041, Russia;
Email address: prokhorov@iam.dvo.ru