S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 1160–1184 (2023) УДК 510.6. 510.22, 515.12
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.072 MSC 01A, 03C, 03E, 22A, 54C

ТЕОРЕМЫ А.Д. ТАЙМАНОВА

И.А. Тайманов

Представлено Ю.Л. Трахининым

Abstract: The article provides a brief overview of the main mathematical results of Asan Dabsovich Taimanov (1917-1990), supplemented by biographical comments.

Keywords: set theory, topology, mathematical logics. topological algebra.

Ученик — это не сосуд,
который надо наполнить, а
факел, который надо зажечь.
Плутарх

1 Предыстория

Высказывание Плутарха, помещённое в эпиграф, было одним из любимых у Асана Дабсовича Тайманова. Отчасти это связано с тем сложным путём, который ему пришлось пройти самому.

А.Д. Тайманов родился в октябре 1917 года [1] на западе Казахстана. Сейчас этот район называется Бокейординским и находится в Западно–Казахстанской области. Историческим центром его является поселок

Taimanov, I.A., A.D. Taimanov's theorems.

Поступила 12 ноября 2023 г., опубликована 16 ноября 2023 г.

[1] По официальным документам — 25 октября.

Урда, где в начале 19-го века была ставка правителей Букеевской орды, последних (условно) независимых казахских ханов. Самый последний из них — Джангир-хан — основал первую казахскую школу, существующую до сих пор. Семья А.Д. Тайманова распалась, он воспитывался бабушкой, в свой первый класс пошёл в медресе (поэтому легко писал по-казахски арабской вязью). Через год его бабушка умерла, и он оказался в детском доме в станице Сломихино (Сламихинская) [2], где еще сохранялись прямые потомки пугачёвских "генералов" (например, в детстве он играл с мальчиком по фамилии Творогов). До 14–15 лет русского языка А.Д. Тайманов, практически, не знал и начал изучать его по газетам. Например, так как всю жизнь он интересовался поэзией, он хорошо запомнил характеристики С. Есенина, одного из его самых любимых поэтов, и некоторых других литераторов в речи Н.И. Бухарина на первом съезде советских писателей (до конца 1980-ых годов её текст не публиковался) [3] . После окончания школы он поступил в учительский институт в Уральске [4] . Когда преподаватель математики, ссыльный немец, учившийся в Санкт-Петербурге, узнал, что А.Д, Тайманов знает бином Ньютона, его сразу перевели на второй курс.

После окончания института (в девятнадцать лет) он два года проработал в нём преподавателем, а потом поехал в Москву, учиться. Реального высшего образования по современным меркам он не имел, хотел учиться в университете, но поступить в него не смог, так как уже закончил вуз. Как выпускник педагогического института он был допущен к поступлению в аспирантуру Московского государственного педагогического института, который с 1941 года стал носить имя В.И. Ленина.

Экзамены в аспирантуру проходили в один день, а вечером было зачисление. Никого из профессоров он не знал и набрал одинаковые баллы с выпускником одного из московских вузов. Профессор А.Я. Хинчин, который должен был взять одного из из них к себе в аспирантуру, сказал, что раз казах сдал одинаково с москвичом, то, по сути, он должно быть, сильнее, и так А.Д. Тайманов стал аспирантом Александра Яковлевича Хинчина, выдающегося специалиста по теории вероятностей и теории чисел, избранного в 1939 году членом-корреспондентом АН СССР. В те годы Хинчин интересовался строгими теоретико-вероятностными обоснованиями основ статистической физики и квантовой механики. К теории вероятностей А.Д. Тайманов сохранил любовь на всю жизнь, следил

[2] С 1993 года — поселок Жакпактал.

[3] В разные годы он цитировал понравившуюся ему фразу из этой речи: "Яркий песенник, звонкий лирик прошёл по полям Революции Сергей Есенин".

[4] Основан в 1932 г., став вторым педагогическим вузом в Казахстане (первым был институт в Алма-Ате, основанный в 1928 г.; Казахский национальный университет им. Аль-Фараби был основан позже, в 1934 г.). В год 100-летия со дня смерти А.С. Пушкина он стал Уральским педагогическим институтом им. А.С. Пушкина. Великий поэт посещал Уральск, бывшую столицу Яицкого казачьего войска, когда собирал материалы для "Истории Пугачёвского бунта". Ныне — Западно-Казахстанский университет им. М. Утемисова.

за выходящими книгами и однажды порекомендовал автору этого текста в качестве отличного учебника по математической статистике книжку Ван дер Вардена, чьё имя было нам до этого известно только благодаря его знаменитой монографии по современной алгебре. Для работы по хинчинской тематике следовало иметь очень хорошее знание современной, на тот момент, физики. Видимо это и привело к тому, что А.Д. Тайманов отошёл от этой темы и, посещая семинары по другим направлениям, заинтересовался дескриптивной теорией множеств, одной из основных тем собственно лузинской математической школы. Семинар для студентов и аспирантов по этой теме вела Людмила Всеволодовна Келдыш, а помогал ей в этом Алексей Андреевич Ляпунов. Хинчин к этому выбору отнесся очень уважительно и со второго года А.Д. Тайманов стал специализироваться у Петра Сергеевича Новикова, мужа Л.В. Келдыш. Впоследствии, в 1960 году, П.С. Новиков был избран академиком АН СССР.

К началу Великой Отечественной войны А.Д. Тайманов был аспирантом Московского педагогического института им. В.И. Ленина. В первые дни войны настроение среди студентов и аспирантов было оптимистическим, сказалась предвоенная пропаганда мощи Красной Армии, отражение агрессии казалось близким. Все изменила знаменитая речь И.В. Сталина, обратившимся 3 июля к “братьям и сестрам”. Стало ясно, что для страны существует реальная угроза её существованию. Первым порывом у многих было пойти добровольцем на фронт. Так поступил и А.Д. Тайманов, вступив в 5-ую дивизию народного ополчения Москвы, в которую вошло много студентов, аспирантов и даже профессоров педагогического института. Правда после коротких сборов профессора были отозваны в тыл (среди них, как вспоминал А.Д. Тайманов, был и специалист по педагогике И.А. Каиров, ставший впоследствии президентом Академии педагогических наук РСФСР). Из источников можно узнать, что 26 сентября 5-ая дивизия народного ополчения была переформирована в 113-ую стрелковую дивизию. К началу Московской битвы она занимала боевые позиции около железнодорожной станции Сухиничи и после немецкого наступления в начале октября попала в Вяземский котел. Из 11501 военнослужащих, состоявших в штате в конце сентября, вышли из окружения 2680 человек. Попал в плен и комдив (с 2 июля, с самого начала формирования) генерал-майор И.А. Пресняков, отказавшийся сотрудничать с фашистами и расстрелянный ими в Нюрнбергской тюрьме в 1943 г. А.Д. Тайманов попал в плен при попытке выйти из окружения. Их небольшая группа иногда получала приют в деревнях, в одной из них староста обещал им помочь переночевать и подкрепиться, но ночью вызвал немецких военных. Потом последовало два с половиной года различных лагерей в России и Белоруссии. Под конец в 1944 году А.Д. Тайманов в группе заключенных был направлен на строительство оборонительных сооружений. По его рассказам, с двумя товарищами он совершил побег (в Белоруссии это было частым делом, бежали к партизанам), бежали врассыпную, и А.Д. Тайманов вышел через некоторое время на наши наступающие части. После допроса в первом отделе, где ему, как наверное положено было, на словах не поверили, целую ночь ожидал обещанного расстрела. Потом пришла информация, что на соседнюю часть вышел ещё один из этой тройки и показания совпали, третий из группы видимо погиб. После чего А.Д. Тайманов был направлен для прохождения дальнейшей службы.

Здесь он никогда не договаривал. Про то, что это была штрафная рота, мы узнали только лет десять тому назад после рассекречивания документов на сайте http://pamyat-naroda.ru. Хотя запомнился его рассказ о том, как один сослуживец, профессиональный квартирный вор, который провел в заключении большую часть жизни, говорил ему: "Асан, ты выживешь, у тебя будут семья и дом. Только не заводи большую собаку, они сразу на нас бросаются и мы с ними легко справляемся. А вот маленькая залезет куда-нибудь, лает там и работать не дает..." Помним, что однажды он сказал, что направление в штрафные части было эквивалентно скольки-то годам заключения.

Знаменитые штрафбаты составлялись из бывших офицеров, штрафроты были для рядового и сержантского состава. На сайте министерства обороны России указано [5], что в штрафных соединениях "среднемесячные потери постоянного и переменного состава достигали 14 191 человек, или 52% от среднемесячной их численности (27 326 человек). Это было в 3–6 раз больше, чем среднемесячные потери личного состава в обычных войсках в тех же наступательных операциях 1944 г."

Сайт http://pamyat-naroda [6] содержит документ [7] от 10 августа 1944 г. из отдела по персональному учёту потерь серж. и ряд. состава 11-ой гвардейской армии. [8] В списке №5 под номером 97 указан Тайманов Асан Дансович [9], казах, 1917 года рождения, в графе постоянного проживания указано: "Зап. Казахстанская обл., Урдинский р., пос. Лбищенск". [10] Он был призван в армию 7 июля 1941 года Фрунзенским РВК г. Москвы как

[5]https://mil.ru/winner _may/history/more.htm?id=11205690@cmsArticle

[6]https://pamyat-naroda.ru/heroes/memorial-chelovek _dopolnitelnoe _donesenie 78465206/

[7]Рассекречено в соответствии с приказом Министра обороны РФ от 8 мая 2007 года №181 "О рассекречивании архивных документов Красной Армии и Военно-Морского Флота за период Великой Отечественной войны 1941-1945 годов"

[8]С 23 июня по 29 августа 1944 г. 11-ая гвардейская армия под командованием генерал-полковника (впоследствии генерала армии) К.Н. Галицкого в составе 3-го Белорусского фронта принимала участие в Белорусской наступательной операции "Багратион".

[9]Из-за опечатки в отчестве сразу найти эти данные сложно.

[10]Мы не уверены, что в 1930–40-ые годы Лбищенск входил в Урдинский район, который видимо упоминается как место рождения. Лбищенск находится довольно далеко от Урды и сравнительно близко к областному центру, Уральску. В Лбищенске в 1919 году погиб герой Гражданской войны В.И. Чапаев, широко известный в

ополченец, попал в плен 5 ноября 1941 г. около г. Киров [11] "по ранению", 3 июля 1944 г. направлен, как и все упомянутые в этом документе, для прохождения дальнейшей службы в штрафную роту.

Войну он закончил в Кёнигсберге (ныне Калининград), при штурме которого был ранен, и встретил День Победы в госпитале в Вильнюсе.

2 Квазикомпоненты несвязных множеств

После возвращения из армии А.Д. Тайманов поначалу решил покинуть аспирантуру и вернуться в Казахстан, чтобы преподавать математику. Аргумент был простой — за четыре года многое забылось, возвращаться к научной деятельности было очень трудно, а диссертацию надо было подготовить за последний оставшийся в аспирантуре год. Отговорил его Ф.Р. Гантмахер, известный математик и автор знаменитой монографии "Теория матриц". А.Д. Тайманов, будучи в гостях у Гантмахера, поделился своими планами. Феликс Рувимович нашёл веский аргумент: "Асан, ты сейчас в Москве, вернуться всегда успеешь, а пока можешь походить по театрам, пожить настоящей культурной жизнью. В Казахстане этого нет, а так будет о чём и тебе вспомнить, и студентам рассказать. Им это тоже будет интересно". Про Астангова (как он произносил гамлетовские "Слова, слова, слова"), Козловского, Лемешева, Обухову (в частности, о том как она в годовщину победы бесплатно пела на концерте, устроенном аспирантами и студентами, прошедшими войну. А.Д. Тайманов был в числе тех, кто договаривался с ней о выступлении) А.Д. Тайманов много рассказывал нам, а тогда он постепенно втянулся в работу и написал свою первую статью.

В 1947 году А.Д. Тайманов защитил кандидатскую диссертацию в Московском университете. Оппонентами были П.С. Александров, глава московской топологической школы, назвавший диссертацию выдающейся, и И.А. Вайнштейн.

Тема диссертации была посвящена квазикомпонентам несвязных множеств в евклидовых пространствах. Понятие квазикомпоненты было введено Хаусдорфом. Для подмножества E евклидова пространства квазикомпонентой $E(x)$, содержащей точку x из E, называется пересечение всех открыто-замкнутых подмножеств E, содержащих точку x. Каждое подмножество E распадается в объединение попарно непересекающихся квазикомпонент.

П.С. Новиков, научный руководитель А.Д. Тайманова, в 1947 году доказал, что для любого A-множества (это более общий класс множеств,

---

Советском Союзе, благодаря культовому и безусловно выдающемуся одноименному художественному фильму.

[11] Город в Калужской области.

чем борелевские; сейчас их называют также аналитическими множествами) число квазикомпонент либо конечно, либо счётно, либо континуум [12] . А.Д. Тайманов получил следующее обобщение этого результата: каждая квазикомпонента (с этого момента будем называть их 1-квазикомпонентами) может быть сама несвязной, и по отношению к ней мы можем повторить эту процедуру и разбить её на квазикомпоненты, которые являются 2-квазикомпонентами по отношению к изначальному множеству E. Последовательным применением таких разбиений мы можем определить α-квазикомпоненты для любого ординала α. Для каждой точки x последовательность квазикомпонент $E^1(x) \supset E^2(x) \supset \cdots \supset E^\alpha(x) \supset \dots$ стабилизируется на каком-то ординале, который называется индексом точки и является топологическим инвариантом множества E. Если индекс точек из множества E ограничен, то он называется индексом множества E. Для любого ординала α существует разбиение E в объединение квазикомпонент: $E = E^\alpha(x) \cup E^\alpha(y) \cup \dots$, которое не обязано стабилизироваться. Все α-квазикомпоненты множества E параметризуются точками множества K_E^α.

В первой статье А.Д. Тайманова [1], сданной в печать 1 ноября 1947 года и в которой в качестве адреса автора уже указана Кзыл-Орда, в частности, приведены примеры плоских множеств сколь угодно большого индекса и подмножеств трёхмерного пространства неограниченного индекса. Основным результатом статьи является обобщение теоремы П.С. Новикова.

Теорема 1 ([1])**.** *Для любого A-множества E в метрическом пространстве со счётной базой и $\alpha < \Omega$ мощность множества K_E^α либо конечна, либо счётна, либо континуум.*

Здесь через Ω обозначено наименьшее несчётное трансфинитное число. Иными совами утверждение теоремы установлено для конечных и счётных ординалов α.

В последующей статье [2], сданной в печать 16 сентября 1950 года, А.Д. Тайманов рассмотрел пространство α-квазикомпонент как метрическое пространство с популярной сейчас метрикой Хаусдорфа на подмножествах метрического пространства. Основной результат статьи состоит в следующем.

Теорема 2 ([2])**.** *Для любого A-множества E в евклидовом пространстве пространство K_E^1 его 1-квазикомпонент с метрикой Хаусдорфа является непрерывным образом E.*

В работе [2] было также построено универсальное множество в четырёхмерном евклидовом пространстве. В евклидовом пространстве E^n

[12]П.С. Новиков. *О мощности множества связных компонент A-множеств*, ДАН СССР, 1947, т. 56, №8, 787–790.

размерности n с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ под универсальным множеством понимается такое локальное компактное множество U размерности $n-1$, что для любого локально компактного множества $U' \subset E^{n-1}$ существует такое a, что пересечение U с гиперплоскостью $x_1 = a$ есть множество U'. После этой работы Л.В. Келдыш задала вопрос о том, можно ли построить универсальное множество в трёхмерном пространстве E^3. В одной из последних работ, выполненных в Кзыл-Орде, А. Д. Тайманов ответил на него положительно, доказав следующий факт.

Теорема 3 ([2] при $n = 4$, [6] при $n = 3$ и $n > 4$)**.** *Для любого $n \geq 3$ в евклидовом пространстве E^n существует универсальное множество.*

Результаты работы [2] были получены уже в Кзыл-Орде.

После окончания аспирантуры в 1947 г. А.Д. Тайманов был направлен на работу в Алма-Ату, но по прибытии туда был перенаправлен в Кзыл-Орду. Оказалось, что в столице союзной республики бывшие военнопленные тоже нежелательны.

С 1947 г. по 1954 г. А.Д. Тайманов работал в Кзыл-Ординском педагогическом институте. В 1948 г. после окончания физического факультета Московского университета к нему присоединилась жена, Ольга Ивановна Блохина. Она тоже стала преподавать в этом институте. В Кзыл-Орде у них родились трое старших детей: Искандер (октябрь 1948 г.), Надежда (октябрь 1950 г.) и Владимир (январь 1954 г.).

Конечно же им пришлось работать не в столице Казахстана, но у Кзыл-Орды были свои самобытные черты. Еще прошло немного времени с тех пор, как она была столицей Казахстана (с 1925 г. по 1927 г.). В многонациональном городе были большие корейская и чеченская диаспоры. В 1937 году на базе Дальневосточного Корейского университета в ней был образован учительский институт, который приютил во время войны эвакуированные Киевский и Харьковский университеты. В Кзыл-Орде во время войны официально функционировал Объединённый Украинский университет. Многие его преподаватели, в основном гуманитарии, остались в Казахстане. Именно по их неожиданному предложению, поддержанному в Москве, в честь 100-летия со дня смерти Н.В. Гоголя имя этого писателя было присвоено институту, который носил его сорок лет. [13]

3 Распространение непрерывных отображений

Переход от дескриптивной теории множеств к теоретико-множественной топологии произошёл в 1952 году, и первая статья на эту тему оказалась и самой известной из топологического цикла. Она была посвящена задаче распространения непрерывных отображений и была

[13] Ныне — Кызылординский университет им. Коркыт ата.

сдана в печать 26 апреля 1952 года. Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема 4 ([3])**.** *Пусть A — плотное подмножество топологического пространства X и пусть $f : A \to Y$ — непрерывное отображение A в компактное (хаусдорфово) пространство Y. Тогда f распространяется до непрерывного отображения*

$$F : X \to Y, \quad F|_A = f$$

тогда и только тогда, когда для любых двух подмножеств B_1 и B_2 в пространстве Y, которые замкнуты и не пересекаются, замыкания их обратных образов $f^{-1}(B_1)$ и $f^{-1}(B_2)$ не пересекаются в X.

Кроме того, что её утверждение само по себе важно и интересно, в [3] показано, как из неё выводятся многие другие результаты, доказанные ранее. В известной монографии Р. Энгелькинга [14] по общей топологии, где она приведена как теорема 3.2.1 и открывает §3.2 “Операции над компактами”, как ее немедленное следствие (теорема 3.2.2) приведена известная теорема П.С. Александрова, доказанная им в 1936 году и утверждающая, что каждый компакт (хаусдорфово компактное пространство) веса $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ является непрерывным образом замкнутого подпространства канторова куба $D^{\mathfrak{m}}$. Как отметил Энгелькинг, двойственное утверждение было доказано Стинродом и Эйленбергом [15] .

К распространению отображений относится и другая работа А.Д. Тайманова [8], которая не широко известна и имеет дело с совершенно другой ситуацией, чем в теореме 4.

Теорема 5 ([8])**.** *Непрерывное отображение нигде не плотного подмножества куба $I^n (n \leq \omega)$ на компактное метрическое пространство может быть продолжено до открытого отображения множества типа F_σ.*

Напомним, что подмножество топологического пространства имеет тип F_σ, если оно является объединением счётного числа замкнутых множеств, а непрерывное отображение называется открытым, если оно переводит открытые в открытые). Доказательство теоремы проведено в привычном для А. Д. Тайманова духе тонких и красивых теоретико-множественных построений, и следствия из основного результата звучат очень интересно.

Следствие 1 ([8])**.** *Существует плоское множество типа F_σ, открытый образ которого есть куб $I^n, n \geq 3$.*

Следствие 2 ([8])**.** *Всякое метрическое пространство Y, являющееся непрерывным образом n-мерного множества X, является открытым образом некоторого другого n-мерного множества.*

[14] R. Engelking. *General topology.* Monografie Matematyczne, Tom 60. PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.

[15] S. Eilenberg and N. Steenrod. *Foundations of Algebraic Topology.* Princeton, 1952.

4 Множества моногенности: проблема Лузина

После кончины выдающегося математика и основателя знаменитой научной школы Н.Н. Лузина в 1950 году в “Успехах математических наук” был опубликован целый ряд статей, посвящённых его математическому творчеству. Среди них была краткая заметка самого Лузина о его работах по теории функций комплексной переменной [16], которую сопровождала статья В.С. Фёдорова [17] , ученика Лузина. В.С. Фёдоров работал в Иваново, а А.Д. Тайманов был лузинским “научным внуком”, который традиционно проводил летние отпуска в Иваново у родителей жены, а в 1954 году и вовсе переехал в Ивановскую область. Результатом их научных контактов явилась статья [4], сданная в печать в конце лета, 9 августа 1952 года.

В статье Фёдорова была приведена проблема, поставленная Лузиным:

“Пусть $f(z)$ — однозначная и непрерывная функция в некоторой области D комплексного переменного $z = x + iy$. Для данной точки z этой области и для заданного $\varepsilon > 0$ пусть M_ε — множество значений разностного отношения

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

для всех комплексных Δz таких, что: 1) $\Delta z \neq 0$, 2) $|\Delta z| < \varepsilon$, 3) точка $z + \Delta z$ принадлежит области D. Пересечение замыканий всех таких множеств M_ε, отвечающих всевозможным $\varepsilon > 0$, называется множеством моногенности функции $f(z)$ в точке z и обозначается $\mathfrak{M}_z$. Спрашивается: каково множество $\mathfrak{M}_z$ в общем случае $f(z)$ однозначной и непрерывной в области D и, в частности, может ли $\mathfrak{M}_z$ содержать кусок плоскости? Может ли $\mathfrak{M}_z$ быть кривой Кантора, не являющейся кривой Жордана? Может ли $\mathfrak{M}_z$ иметь плоскую меру > 0? Каково множество точек z таких, что $\mathfrak{M}_z$ не есть простая дуга.”

Мы привели формулировку этой задачи подробно, поскольку понятие моногенности не комплексно аналитической функции не является широко известным.

С помощью изящного построения А.Д. Тайманов получил следующий результат.

Теорема 6 ([4])**.** *Существует комплексно аналитическая функция, для которой множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ в некоторой точке z является замкнутым кругом.*

Как отмечено в конце этой краткой трёхстраничной заметки, из предложенной конструкции

---

[16] Н. Н. Лузин. *Работы по теории функций комплексного переменного.* Успехи матем. наук, 1952, том 7, вып. 2(48), 3–6.

[17] В. С. Фёдоров. *Труды Н. Н. Лузина по теории функций комплексного переменного.* Успехи матем. наук, 1952, том 7, вып. 2(48), 7–16.

“очевидно, легко построить пример функции $f(z)$, имеющей бесконечное множество точек, в которых множество моногенности функции содержит часть плоскости или является кривой Кантора, имеющей положительную меру и не являющейся кривой Жордана.”

Эта статья была первой, в которой были построены нетривиальные множества моногенности. Она инициировала целый ряд работ, в которых в скором времени были получены дальнейшие результаты по проблеме Лузина:

1) А.Д. Мышкис и Г.В. Гиль доказали, что для того, чтобы замкнутое подмножество $\mathfrak{M}$ было множеством моногенности некоторой непрерывной функции $f(z)$ в области D в некоторой точке z из D, необходимо и достаточно, чтобы замыкание множества $\mathfrak{M}$ в расширенной комплексной плоскости было связным [18] ;

2) Ю.Ю. Трохимчук показал, что, если $f(z)$ — произвольная однозначная и непрерывная в области D функция, то почти для всех точек $z \in D$ множества моногенности $\mathfrak{M}_z$ этой функции суть либо окружности (в частности, точки), либо полные плоскости [19].

Бурный год, в котором были написаны две статьи по совершенно новым областям — топологии и теории функций комплексной переменной — завершился очень трагичными событиями. В октябре 1952 года тяжело заболел старший сын — Искандер (дома его называли Сашей). В этом месяце ему исполнилось четыре года. Установить диагноз по головным болям и рвоте было сложно, но в Кзыл-Орде были очень квалифицированные столичные врачи, оказавшиеся здесь в ссылке. Один из них поставил диагноз — опухоль мозга. Сейчас трудно в это поверить, но в те годы ребенок из глухой провинции с таким диагнозом в кратчайшие сроки был направлен в московский институт Бурденко. При обследовании диагноз подтвердился, проведённая операция подтвердила подозрение, что опухоль является злокачественной. После неё Саша ослеп и в оставшиеся дни любил руками ощупывать лица приходивших к нему родителей, чтобы научиться и привыкнуть к новым ощущениям, к новому способу познания мира. В ночь на Рождество, 7 января 1953 года, он скончался. Похоронен он был после кремации в колумбарии Донского кладбища в Москве. Обычную могилу родители, жившие в Кзыл-Орде, поддерживать не смогли бы, а это было условием Донского кладбища.

5 Сохранение классов борелевских множеств

Одним из важнейших объектов исследования в дескриптивной теории множеств является борелевская алгебра $B(X)$. Она определяется

[18] А. Д. Мышкис, Г. В. Гиль. *Об одной задаче Н. Н. Лузина.* Успехи матем. наук, 1955, том 10, вып. 1(63), 143–145.

[19] Ю. Ю. Трохимчук. *О двух проблемах Н. Н. Лузина.* Успехи матем. наук, 1956, том 11, вып. 5(71), 215–222.

как минимальная алгебра, содержащая все открытые подмножества топологического пространства X и замкнутая относительно объединения счётного числа её элементов и операции дополнения, которая сопоставляет подмножеству $A \subset X$ подмножество $X \setminus A$.

Классы борелевских множеств в X определяются последовательно. Обозначим через $\mathbf{\Sigma}^0_1$ совокупность всех открытых множеств, а через $\mathbf{\Pi}^0_1$ — семейство всех замкнутых множеств в X. Вообще, по определению, для любого счётного ординала α класс $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ состоит из множеств, которые являются дополнениями к элементам из $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$. Класс $\mathbf{\Sigma}^0_2$ содержит, в точности, те множества, которые являются счётными объединениями элементов из $\mathbf{\Pi}^0_1$, т.е. объединения счётного числа замкнутых множеств. Следовательно, класс $\mathbf{\Pi}^0_2$ состоит из пересечений счётного числа открытых множеств. Теперь класс $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ для любого ординала определяется как состоящий из таких множеств A, которые являются объединениями счётного числа множеств A_i, лежащих в классах $\mathbf{\Pi}^0_{\alpha_i}$ при $\alpha_i < \alpha$. В частности, $\mathbf{\Pi} : 0_\beta \subset \mathbf{\Sigma} : 0_\alpha$ при $\beta < \alpha$. Борелевские множества — это множества, входящие в эти классы. Минимальный ординал α, для которого $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ называется рангом борелевского множества A.

В классических работах первой половины 20-го века множество $\mathbf{\Sigma}^0_2$ обозначается через F_σ, $\mathbf{\Pi}^0_2$ — через G_δ, а далее символы σ и δ чередуются: $\mathbf{\Sigma}^0_3$ обозначается через $G_{\delta\sigma}$, $\mathbf{\Pi}^0_3$ — через $F_{\sigma\delta}$ и т.д.

Класс A-множеств (аналитических множеств) в полных сепарабельных метрических пространствах получается, если мы пополним класс борелевских множеств проекциями $X \times Y \supset B \to X$ борелевских множеств B в различных произведениях $X \times Y$ и замкнём полученное семейство за счёт операций счётного объединения и дополнения.

Проблема сохранения классов борелевских множеств при непрерывных отображениях топологических пространств была поставлена Хаусдорфом. Заметим, что непрерывное отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется открытым, если оно переводит открытые множества в открытые.

В 1934 году Хаусдорф доказал, что открытые отображения переводят G_δ-множества в G_δ-множества и высказал предположение, что такие отображения сохраняют все классы борелевских множеств. Эта гипотеза была опровергнута Л.В. Келдыш, доказавшей, что всякое борелевское множество является открытым образом множества, лежащего в пересечении классов $G_\delta \cap F_\sigma$.

А.Д. Тайманов рассмотрел другой класс непрерывных отображений — замкнутых. Определение таких отображений аналогично открытым: непрерывное отображение замкнуто, если оно переводит все замкнутые множества в замкнутые.

А.Д. Тайманов получил следующий результат.

Теорема 7 ([5]). *Образ борелевского множества при замкнутом отображении $f : X \to Y$ полных сепарабельных метрических пространств является борелевским множеством.*

Уточнение этой теоремы было получено уже во время работы в Ивановском текстильном институте, хотя, судя по тому, что статья [5] уже в 1954 году при подаче в печать была указана как первая часть работы, этот результат планировался в те же годы:

Теорема 8 ([9]). *. Пусть $f : X \to Y$ — замкнутое отображение полных сепарабельных метрических пространств. Тогда, если борелевское подмножество A в X имеет ранг, равный α, то ранг его образа в Y не превосходит α, если α — бесконечный ординал, и $\alpha + 1$, если α — конечный ординал.*

Впоследствии Сент-Раймон доказал, что ранг образа не превосходит α и для конечных ординалов [20] . Полученный результат о неповышении ранга борелевского множества при замкнутых отображениях называется теоремой Тайманов—Сент-Раймона [21] . М.М. Чобан распространил её на случай несепарабельных пространств [22] .

Если отображение f компактно, то есть прообраз каждой точки компактен в X, то, как показал И.А. Вайнштейн, ранг борелевского множества не понижается. Поэтому при замкнутых компактных отображениях теорема Тайманова–Сент-Раймона утверждает сохранение классов борелевских множеств.

Вопрос Хаусдорфа о сохранении классов борелевских множеств при открытых отображениях может быть поставлен шире: при каких открытых отображениях эти классы сохраняются. Ответ на него был получен А.Д. Таймановым. Он ввел понятие изолированного отображения: непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется изолированным, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in Y$ содержит точку, изолированную в $f^{-1}(y)$. Для изолированных отображений верно следующее утверждение.

Теорема 9 ([7]). *Пусть семейство подмножеств полных сепарабельных метрических пространств содержит все открытые и замкнутые подмножества и замкнуто относительно счётных пересечений и объединений. Тогда оно инвариантно относительно открытых изолированных отображений.*

Отсюда следует сохранение при таких отображения классов борелевских подмножеств и размерности пространства. В качестве следствия

[20] J. Saint–Raymond. *Fonctions boreliennes sur un quotients*, Bull. Sci. Math. (2), 1976, 100, 141–147.

[21] *Analytic Sets.* London, Academic Press, 1980.

[22] М. М. Чобан. *Многозначные отображения и борелевские множества*, Тр. ММО, 22, Изд-во Московского университета, М., 1970, 229–250.

получается теорема П.С. Александрова о сохранении размерности при конечно-кратных открытых отображениях.

Работа [5] была сдана в печать 11 июня 1953 года, отредактированный вариант — 27 мая 1954 года, когда А.Д. Тайманов был ещё в Кзыл-Орде, но в статье в качестве места работы уже указана Шуя. Такая же ситуация и с другой статьей [7], сданной в печать 15 апреля 1954 года. В статье [6], поступившей в редакцию позднее, 30 июня 1954 г., в качестве места работы по-прежнему указана Кзыл-Орда.

Переезд в Шую был отчасти случайным: родители жены А.Д. Тайманова жили в Иваново и когда он с семьей приезжал к ним в гости, то ездил ночными поездами в Москву, на семинары. Однажды его соседом по купе оказался математик, Д.А. Райков, известный своими совместными с И.М. Гельфандом основополагающими работами по теории унитарных представлений некомпактных групп Ли и нормированным кольцам. В те годы по причине политической неблагонадёжности Райков работал заведующим кафедрой в Шуйском педагогическом институте. Он пригласил А.Д. Тайманова на работу в этот институт. В 1954-ом году, в период "оттепели" (впервые это слово, как характеристику перемен в России после смерти Николая I, применил Тютчев) А.Д. Тайманов смог покинуть Кзыл-Орду и перебраться на пару лет в Шую, находившуюся километрах в тридцати от Иваново, а уж оттуда в 1956-ом перейти на работу в Ивановский текстильный институт. Сам Райков в том же году вернулся в Москву после восьмилетней работы в педагогических институтах в Костроме и Шуе.

6 Критерий элементарной эквивалентности теорий

Переезд из Шуи в областной центр, Иваново, в конечном итоге определил дальнейшую научную деятельность А.Д. Тайманова. В лучшие вузы — педагогический, энергетический, химико-технологический институты — ему с женой устроиться не удалось и они стали преподавателями в текстильном институте с очень большой учебной нагрузкой. Но в городе жили родители жены, Иван Федорович и Екатерина Степановна Блохины, помогавшие в воспитании детей. Семье были выделены две комнаты в общежитии института. С точки зрения бытовой жизнь сильно улучшилась.

Важно было и другое. С начала 1930-ых годов в педагогическом институте работал Анатолий Иванович Мальцев, ученик А.Н. Колмогорова, широко известный своими работами по алгебре и математической логике. К тому времени он уже был членом-корреспондентом АН СССР, депутатом Верховного Совета СССР, лауреатом Сталинской премии. Для областного центра в России присутствие ученого такого уровня было исключительным явлением. В результате продолжавшейся "оттепели" в педагогический институт пришли топологи — В.А. Ефремович, освободившийся из мест заключения, и В.А. Рохлин, переехавший из Архангельска. К слову сказать пленарный доклад ведущего в те годы тополога Джона Милнора на Международном математическом конгрессе в 1958 году назывался "Числа Бернулли, гомотопические группы и теорема Рохлина", что тоже было и остается уникальным случаем для профессоров российских педагогических институтов. Все это привело к тому, что в педагогическим институте на мировом уровне активно работали два семинара — по алгебре и математической логике и по алгебраической и дифференциальной топологии. Из топологического семинара вышел А.С. Шварц, ученик В.А. Ефремовича. Он известен прежде всего своими работами по топологическим квантовым теориям поля и написанной в те годы первой статьей по росту конечно-порождённых групп. А.Д. Тайманов ходил на оба семинара. В домашней библиотеке сохранилась книга Н. Стинрода "Топология косых произведений" с многочисленными пометками А.Д. Тайманова на полях.

Для А.Д. Тайманова естественно было использовать свои познания в теоретико-множественной топологии для дальнейшей работы, и так получилось либо на подсознательном уровне, либо вполне определённо. С этой точки зрения семинар Ефремовича–Рохлина казался ближе, но, во-первых, методы алгебраической и дифференциальной топологии очень далеки от теоретико-множественных, во-вторых, А.Д. Тайманову отсоветовал работать в этом направлении П.С. Александров, незаслуженно охарактеризовавший этот раздел топологии как исключительно абстрактный. В математической логике, которая в тот момент была основной темой семинара А.И. Мальцева, методы из теоретико-множественной топологии оказались очень эффективными. Это стало абсолютно ясно позднее, в 1960-70-ые годы, особенно после работ Морли, и хорошо объяснено в предисловии А.Д. Тайманова к переводу книги Дж. Сакса "Теория насыщенных моделей" [23]

В Иваново ему удалось найти необходимые и достаточные условия элементарной эквивалентности теорий. История этого довольно забавна. А.Д. Тайманов сетовал на то, что студенты, учившиеся на вечернем и заочном отделениях, мало времени уделяют изучению математики. В ответ студенты пригласили его на ткацкую фабрику, чтобы показать в каких условиях они работают. Глядя на челноки ткацких станков он пришёл к идее "метода перекидки", который и даёт ответ на вопрос о критерии элементарной эквивалентности. Эти результаты были изложены в статьях [10] и [11], представленных в редакцию 21 марта и 6 июня 1960 г.

[23] Дж. Сакс. *Теория насыщенных моделей.* Мир, Москва, 1976.

Они вошли и в статью [12], опубликованную в одном из первых выпусков трудов семинара "Алгебра и логика', организованного А.И. Мальцевым в Новосибирске, и основанную на докладе на этом семинаре. В ней топологические методы особо подчеркиваются:

1) во введении говорится, что в последнее время проблема характеризации аксиоматизируемых классов моделей была решена с помощью нескольких подходов, в [10, 11] в терминах распространения отображений;

2) §2 начинается следующими словами:

"Возможность топологической характеристики аксиоматизируемых классов моделей неоднократно высказывалась А.И.Мальцевым. ... В этом параграфе даётся топологическая характеристика, применимая для классов с произвольной сигнатурой. Несмотря на свою тривиальность, топологическая характеристика является очень общей, и все другие известные характеристики являются переводом её на другие языки. При этом вся трудность заключается в выборе топологии и в переводе топологического понятия на другие термины".

Обсуждение этих результатов и их связи другими вопросами теории моделей дано в докладе [24] А.И. Мальцева на 4-ом Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде.

Первые работы А.Д. Тайманова по математической логике были продолжением его работ по теоретико-множественной топологии, да и основывались на той же интуиции.

Как оказалось, критерий элементарной эквивалентности ранее был найден Р. Фраиссе [25] и приведен к изящной игровой форме А. Эренфойхтом [26] , в которой и стал популярен.

Различие подходов Р. Фраиссе и А.Д. Тайманова довольно ясно и в фундаментальной монографии У. Ходжеса "Теория моделей", процитировавшего по этому поводу указанные нами работы Фрейссе и Эренфойхта и [12], сказано:

"Конечные игры Фраиссе–Эренфойхта изучались Фраиссе [1955], [1956b], Эренфойхтом [1961] и независимо Таймановым [1962]; формулировка в терминах игр принадлежит Эренфойхту." [27]

---

[24]А.И. Мальцев. *Некоторые вопросы теории классов моделей.* IV Всес. матем. съезд. Ленинград. Труды, т. 1, с. 169–198; см. также: А.И. Мальцев. *Избранные труды.* Т. 2. Москва, Наука, 1976, с. 239–274.

[25]R. Fraïssé. *Sur quelques classifications des relations, basées sur des isomorphismes restreints. II. Application aux relations d'ordre, et construction d'exemples montrant que ces classifications sont distinctes.* Publ. Sci. Univ. Alger. Sér. A2, 1955, 273–295.

R. Fraïssé. *Etude de certains opérateurs dans les classes de relations, définis à partir d'isomorphismes restreints.* Z. Math. Logik Grundlagen Math. 2 (1956), 59–75.

[26]A. Ehrenfeucht. *An application of games to the completeness problem for formalized theories.* Fund. Math. 49 (1961), 129–141.

[27]W. Hodges, *Model Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

В Стэнфордской Энциклопедии Философии про этот критерий говорится следующее:

"В 1930 году Альфред Тарский сформулировал понятие элементарной эквивалентности двух структур $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, означающей то, что в $\mathcal{A}$ истинны одни и те же предложения первого порядка, что и в $\mathcal{B}$. На конференции в Принстоне в 1946 г. он описал это понятие и выразил надежду, что можно будет разработать его теорию, которая будет "столь же глубока, как используемые сейчас понятия изоморфизма и т. д."

Одной из естественных частей такой теории было бы чисто структурное необходимое и достаточное условие элементарной эквивалентности двух структур. Ролан Фраиссе, франко-алжирец, первым нашёл применимое необходимое и достаточное условие. Через несколько лет его заново открыл казахский логик А. Д. Тайманов, а переформулировал в терминах игр польский логик Анджей Эренфойхт. Эти игры теперь известны как игры Эренфойхта–Фраиссе, а иногда и как "back-and-forth" игры. Они оказались одной из самых универсальных идей в логике двадцатого века. Они плодотворно адаптируются к широкому спектру логик и структур." [28] .

7 Новосибирск: 1960-80-ые

В мае 1957 года было принято решение об основании Сибирского отделения Академии наук СССР с центром в Новосибирске и в начале 1960-ых годов А.И. Мальцев, избранный в 1958 г. академиком, переехал в Новосибирск. С ним последовали А.Д. Тайманов и аспиранты И.А. Лавров и М.А. Тайцлин.

А.Д. Тайманов приступил к работе в Институте математики в Новосибирске с января 1961 года. Вместо двух комнат в общежитии семья

---

p. 128: "The finite Ehrenfeucht–Fraïsse games were studied in Fraïsse [1955], [1956b], Ehrenfeucht [1961] and independently Taimanov [1962]; the formulation in terms of games is due to Ehrenfeucht".

[28] *Logic and Games*, in: *Stanford Encylopedya of Philosophy*, https://plato.stanford.edu/entries/logic-games/.

"In 1930 Alfred Tarski formulated the notion of two structures $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ being elementarily equivalent, i.e., that exactly the same first-order sentences are true in $\mathcal{A}$ as are true in $\mathcal{B}$. At a conference in Princeton in 1946 he described this notion and expressed the hope that it would be possible to develop a theory of it that would be "as deep as the notions of isomorphism, etc. now in use".

One natural part of such a theory would be a purely structural necessary and sufficient condition for two structures to be elementarily equivalent. Roland Fraïssé, a French-Algerian, was the first to find a usable necessary and sufficient condition. It was rediscovered a few years later by the Kazakh logician A. D. Taimanov, and it was reformulated in terms of games by the Polish logician Andrzej Ehrenfeucht. The games are now known as Ehrenfeucht–Fraissé games, or sometimes as back-and-forth games. They have turned out to be one of the most versatile ideas in twentieth-century logic. They adapt fruitfully to a wide range of logics and structures."

получила трёхкомнатную квартиру, основной работой стала исследовательская, а преподавание в основанном в 1959 г. Новосибирском университете не отнимало столько времени, сколько в Иваново.

В Новосибирске в 1961 г. А.Д. Тайманов защитил докторскую диссертацию "Некоторые вопросы распространения отображений". 15 сентября этого же года основанная А.И. Мальцевым кафедра алгебры и геометрии Новосибирского университета была разделена на две — кафедру алгебры и математической логики, которую возглавил сам А.И. Мальцев, и кафедру геометрии и топологии, заведующим которой стал А.Д. Тайманов (и был им до отъезда в Казахстан в 1968 г.).

В конце 1961 г. в семье Таймановых родился младший сын. По предложению детей его назвали Искандером, как и их старшего брата, о котором родители им много рассказывали.

В 1962 г. А.Д. Тайманов впервые побывал за границей, если не считать Восточной Пруссии в конце войны. Он принял участие в Международном математическом конгрессе в Стокгольме (и также участвовал в последующих конгрессах в Москве в 1966 г. и в Ницце в 1970 г.).

В 1962 г. он был избран действительным членом (академиком) Академии наук Казахской ССР. Перед этим у него была беседа с президентом академии К.И. Сатпаевым, на которой А.Д. Тайманов сказал, что в Казахстан переезжать не хочет, поскольку впервые за столько лет у него возникли хорошие условия для научной работы. Сатпаев с ним согласился, и избрание в академию состоялось.

В начале 1960-ых годов А.И. Мальцев впервые в Советском Союзе прочел обязательный курс математической логики. Со следующего года до отъезда в Казахстан этот курс читал А.Д. Тайманов, отдавая его разработке много времени. Коллеги предлагали ему записать курс и издать его в качестве книжки, но он не хотел терять время на такую работу, о чем впоследствии иногда сожалел.

В 1965 г. он опубликовал в соавторстве с тремя молодыми учениками А.И. Мальцева ставший широко известным обзор, который, по мнению многих специалистов, мог на тот момент служить лучшим введением в элементарные теории и до сих пор регулярно цитируется [29] .

В середине 1960-ых годов его друг член-корреспондент АН СССР А.И. Ширшов уговорил его вступить в партию и дал ему рекомендацию. Во-первых, А.Д. Тайманов уже показал свои убеждения, уйдя добровольцем на фронт, во-вторых, как объяснил А.И. Ширшов, прием в партию станет для него формой реабилитации, так как последствия плена продолжали сказываться.

По крайней мере медалью "За победу в Великой Отечественной войне" А.Д. Тайманов был награждён только в августе 1966 г., а медалью "За взятие Кёнигсберга" — в мае 1967 г.

[29]Ю.Л. Ершов, И.А. Лавров, А.Д. Тайманов, М.А. Тайцлин. *Элементарные теории*, Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 4, 37–108.

В те же годы он был приглашен с лекциями в США, где работали ведущие зарубежные специалисты по математической логике. У него сохранялось недоуменное письмо тогда молодого, а впоследствии знаменитого логика Д. Скотта, удивлявшегося почему адресат ничего не отвечает. Но "компетентными органами" ему было предложено отказаться от этой поездки. Второе приглашение в США он получил в середине 1970-ых годов и должен был поехать с лекциями вместе с С.И. Адяном. Поездка почти состоялась, но фактически накануне выезда им обоим было предложено отказаться от неё. Конечно же, это не было связано, как объяснялось, с международной ситуацией, а было типичным проявлением недобросовестной конкуренции в научной среде.

В 1967 г. А.Д. Тайманову исполнилось 50 лет. В апреле этого года в связи с 10-летием Сибирского отделения АН СССР он был награждён орденом Трудового Красного Знамени, а летом его дочь Надежда закончила ФМШ (физико-математическую школу) в Новосибирске и поступила на механико-математический факультет Новосибирского университета.

В 1961 г. в Ленинграде прошёл 4-ый (всесоюзный) математический съезд, который оказался последним. После этого стали возникать серии традиционных тематических всесоюзных конференций. А.И. Мальцев выступил инициатором проведения первой Всесоюзной топологической конференции в Новосибирске в июле 1967 г. Эта конференция запомнилась исключительно высоким научным уровнем. К сожалению во время её работы, 7 июля, А.И. Мальцев скончался.

В рамках наступивших потом организационных перестроек А.Д. Тайманову было "предложено" переехать в Алма-Ату. К слову сказать, у него с начала 1960-ых годов занималось много аспирантов из Казахстана, из их числа вышли впоследствии крупные специалисты по математической логике. Но переезжать в Казахстан А.Д. Тайманов не хотел, да и аспирантам из Казахстана было полезнее учиться в Новосибирске, где было много семинаров и по логике, и по другим разделам математики. Больше всего в тот момент А.Д. Тайманов ценил наконец-то возникшие в Новосибирске условия для научной исследовательской работы.

В 1968-70 гг. А.Д. Тайманов работал в Алма-Ате, был директором Института математики и механики и академиком-секретарем отделения физико-математических наук АН Казахской ССР.

Ему удалось там сделать много полезного. В середине 1960-ых годов А.Д. Тайманов выступил одним из инициатором создания Республиканской физико-математической школы по аналогии с ФМШ в Новосибирске и водил младшего сына показывать начальный этап ее строительства. Им была создана кафедра математической логики в Казахском государственном университете.

В 1969 г. в Алма-Ате А.Д. Таймановым был организован 1-ый всесоюзный симпозиум по математической логике, давшей начало серии традиционных конференций. Последняя из них, 10-ая, прошла в 1990 г. тоже в Алма-Ате и была посвящена его памяти.

Поменялись и планы семьи: дочь в 1968 г. перевелась на механико-математический факультет Московского университета. На этот же факультет в 1970 г. после окончания ФМШ в Новосибирске поступил и сын Владимир.

В ноябре 1970 г. А.Д. Тайманов смог вернуться в Новосибирск, к работе в университете не приступил, а стал старшим научным сотрудником Института математики. В середине 1980-ых годов, когда вместо деления на старших и младших сотрудников ввели разделение на пять категорий, он стал главным научным сотрудником и оставался им до своей смерти.

В 1978 г. после окончания школы его младший сын Искандер уехал учиться на механико-математический факультет Московского университета. Про этот факультет А.Д. Тайманов говорил, что по всем показателям он является лучшим математическим факультетом в мире, а "учиться надо в лучших местах".

В 1985 г. он был награждён орденом Отечественной войны 1-ой степени, а в 1986 г., по представлению из Казахстана, — орденом Трудового Красного Знамени.

В Новосибирске у него появились аспиранты. Представители "первой волны" учеников и организовали известный семинар по математической логике. Среди студентов он назывался НОМ. С одной стороны по первым буквам слова "гомоморфизм" (homomorphism), а с другой — по первым (латинским) буквам фамилий руководителей семинара Н.Г. Хисамиева, А.И. Омарова и Т.Г. Мустафина.

Ученики "второй волны" приезжали в Новосибирск уже хорошо подготовленными в Алма-Ате, имели солидный запас знаний по математической логике. Тематика исследований научной группы расширилась: например, в начале 1970-ых годов А.Т. Нуртазин [30] получил основополагающие результаты в теории конструктивных моделей, а в монографии [31] ведущего специалиста по теории моделей С. Шелаха была единственная ссылка на работу советских математиков — на статью М.М. Еримбетова [32] по теории моделей. Эти работы Еримбетова и Нуртазина легли в основы их кандидатских диссертаций.

Условно можно выделить и "третью" волну: учеников, защитивших диссертации в 1980-90-ых годах.

Всего под руководством А.Д. Тайманова было подготовлено 12 кандидатских диссертаций (Ж. Алмагамбетов, Е. Байсалов, Б. Байжанов,

---

[30]А. Т. Нуртазин. *Сильные и слабые конструктивизации и вычислимые семейства.* Алгебра и логика, 1974, т. 13, №3, 311–323.

[31]S. Shelah. *Classification Theory and the Number of Non-Isomorphic Models.* North-Holland, Amsterdam, 1978; 2nd edition: 1990.

[32]М. М. Еримбетов. *О полных теориях с 1-кардинальными формулами.* Алгебра и логика, 1975, т. 14, №3, 245–257.

М. Бекенов, М. Еримбетов, Т. Мустафин, Т. Нурмагамбетов, А. Нуртазин, А. Омаров, Б. Омаров, Н. Хисамиев, Т. Шаяхметов). У двух аспирантов, приехавших тоже из Казахстана и заинтересовавшихся в Новосибирске смежными разделами математической логики, А.Д. Тайманов был соруководителем (А. Викентьев, Б. Дроботун).

Б.С. Байжанов, Т.Г. Мустафин, А.И. Омаров и Н.Г. Хисамиев стали впоследствии докторами наук по математике. Докторские диссертации также защитили В.В. Вербовский и Б.Ш. Кулпешов (ученики Б.С. Байжанова), В.П. Добрица (ученик Н.Г. Хисамиева) и А.Р. Ешкеев (ученик Т.Г. Мустафина).

В Национальную академию наук Республики Казахстан были избраны два специалиста по математической логике — члены-корреспонденты Б.С. Байжанов и Б.Ш. Кулпешов.

Т.Г. Мустафин создал в Караганде школу теории моделей, которая успешно развивается, и в 1990-ом году организовал в Караганде 1-ый советско-французский коллоквиум по теории моделей, который в дальнейшем стал традиционным и казахско-французским. Последний из серии этих коллоквиумов прошёл в 2022 г. в Лионе (Франция).

Очень хорошо о научной школе А.Д. Тайманова написано в книге "Теория моделей в Казахстане" [33] и в статье Б.С. Байжанова, Б.Ш. Кулпешова и Т.С. Замбарной [34] .

В этих текстах обсуждаются и научные работы А.Д. Тайманова, выполненные в 1960-80-ые гг. Автору, далекому от математической логики, говорить о них сложно. Однако о научных интересах можно рассказать, не уходя в технические детали.

Конечно и в 1940-50-ые гг. А.Д. Тайманов, кроме решённых задач, имел и более высокие цели. Это было для него свойственно .

Замечательные научные условия и среда, которые были в Новосибирске при А.И. Мальцеве, ориентировали математиков на исследование самых серьезных проблем алгебры и логики. Интерес А.Д. Тайманова к десятой проблеме Гильберта не был секретом для его коллег по Новосибирску. Формулировка этой проблемы понятна неспециалистам:

" Задача о разрешимости диофантова уравнения. Пусть задано диофантово уравнение с произвольными неизвестными и целыми рациональными числовыми коэффициентами. Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых рациональных числах".

Однажды, когда кем-то было объявлено решение этой проблемы, он выступил с очень ярким (по воспоминаниям слушателей) докладом о его следствиях. Любой, положительный или отрицательный ответ, на вопрос, поставленный Гильбертом, приводил к глубоким следствиям в

[33] *Теория моделей в Казахстане. Сборник научных работ, посвящённый памяти А.Д. Тайманова.* ECO Study, Алматы, 2006. 448 стр.

[34] B.S. Baizhanov, B. Sh. Kulpeshov, T. S. Zambarnaya. *A. D. Taimanov and model theory in Kazakhstan.* Сибирские Электронные Матем. Известия, 2020, т. 17, A.1–A.58.

теории диофантовых уравнений. Достаточно распространенным мнением было то, что ответ положительный и такой алгоритм существует. Этой точки зрения придерживался и А.Д. Тайманов.

В 1970 г. в изумившей всех работе 23-летнего ленинградского математика Ю.В. Матиясевича [35] было доказано, что любое перечислимое множество диофантово, и это влекло отрицательный ответ на вопрос Гильберта.

Заметим, что в алгебраической теории чисел чаще рассматриваются уравнения над полями. Например, для диофантовых уравнений решения ищутся в поле рациональных чисел. Если бы 10-ая проблема Гильберта имела положительное решение, то, очевидно, существовал бы алгоритм распознавания разрешимости диофантовых уравнений в рациональных числах. Обратное неверно и вопрос о существовании такого алгоритма до сих пор является открытым.

В 1970-ые А.Д. Тайманов активно занимался топологической алгеброй. В эти годы его настольной книгой были "Непрерывные группы" Л.С. Понтрягина, которую он подробно изучал ещё 1950-ые гг. Основным объектом этого смежного раздела алгебры и топологии являются алгебры (в широком смысле слова), на которых задана топология, в которой все алгебраические операции непрерывны. Например, в 1930-ые годы Понтрягин доказал, что, если на группе задана хаусдорфова топология, то эта топологическая группа вполне регулярна как топологическое пространство. Мальцев поставил вопрос, сохранится ли это свойство, если ослабить требование ассоциативности умножения (такие объекты называются лупами). Этот вопрос был вполне в духе теории неассоциативных алгебр, в которой новосибирская группа в те годы была одним из мировых лидеров. Легко показать, что, если топологическая лупа хаусдорфова как пространство, то она и регулярна. Вопрос о вполне регулярности остаётся до сих пор открытым.

Прежде всего А.Д. Тайманова интересовал вопрос о топологизируемости групп. Группа называется топологизируемой, если на ней задана топология, в которой операции умножения и обращения элементов непрерывны, и эта топология нетривиальна, т.е. отлична от слабейшей, когда существуют только два открытых подмножества — пустое и сама группа, и сильнейшей, когда все подмножества открытые. В 1940-ые гг. А.А. Марков поставил проблему о том, существует ли нетопологизируемая группа. Этот же вопрос можно было поставить по отношению к полугруппам к другим алгебрам. В начале 1970-ых молдавскими математиками были построены примеры нетопологизируемых неассоциативных алгебр (кольца (В.И. Арнаутов) и квазигруппы (Н.М. Суворов, Т.П. Уфнаровская)).

[35] Ю. В. Матиясевич. *Диофантовость перечислимых множеств.* Докл. АН СССР, 1970, т.191, №2, 278–282.

В [14] А.Д. Тайманов построил первый пример нетопологизируемой полугруппы. Позже А.Д. Тайманов нашёл ряд критериев топологизируемости групп и доказал, что класс топологизируемых групп замкнут относительно ультрапроизведений [15]. В этой же работе он заметил, что один из старых вопросов А.А. Маркова переформулируется следующим образом: замкнут ли класс топологизируемых групп относительно элементарной эквивалентности. Вопрос об этом, насколько мы знаем, до сих пор открыт.

В предположении континуум-гипотезы существование нетопологизируемых групп было установлено С. Шелахом [36] . В общем случае это было сделано А.Ю. Ольшанским [37] . Статья Ольшанского состоит в аннотации (строк на десять) его доклада на семинаре в МГУ. В работе [38] , продолжающей знаменитые работы П.С. Новикова и С.И. Адяна по проблеме Бернсайда и содержащей в технических деталях многочисленные отсылки к ним, С.И. Адян построил серию групп $A(m,n)$, которые давали ответ на один открытый вопрос. При этом фактор-группа $A(m,n)/C$ по центру C — бесконечная группа нечётного периода m при $m \geq 665$. Ольшанский показал в этой краткой заметке, что группы $A(m,n)/C^m$ нетопологизируемы. Прямое построение с помощью геометрической диаграммной техники других примеров нетопологизируемых групп, дающих ответ на один вопрос А.Д. Тайманова, было дано А.В. Трофимовым [39] .

Доказательство критерия А.Д. Тайманова топологизации счётных алгебр было опубликовано через много лет после его кончины в работе [40] , выдержку из которой мы приведем:

“А. Д. Тайманов [16] анонсировал аналогичный [41] критерий для произвольной счётной алгебры счётного языка. Но автору не удалось найти в математической литературе доказательства этого утверждения. И.А. Тайманов любезно предоставил автору возможность ознакомиться с черновыми набросками статьи А. Д. Тайманова “О топологизации алгебр” [42] , но в них рассмотрен полностью только случай одной бинарной операции,

[36] S. Shelah. *On a problem of Kurosh, Jónsson groups, and applications.* Word problems, II (Conf. on Decision Problems in Algebra, Oxford, 1976), pp 373–394. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics , 95 North-Holland, Amsterdam-New York, 1980.

[37] А.Ю. Ольшанский. *Замечание о счётных нетопологизируемых группах.* Вестник Моск. ун-та, Сер. 1, матем., мех., 1980, №3, 103.

[38] С. И. Адян. *О некоторых группах без кручения.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 1971, т. 35, вып. 3, 459–468.

[39] А.В. Трофимов. *Совершенная нетопологизируемая группа.* Вест. Моск. ун-та, сер. 1, матем., мех., 2007, №1, 7–13.

[40] М.В. Котов. *О топологизируемости счётных нётеровых по уравнениям алгебр.* Алгебра и логика, 2013, т. 52, №2, 155–171.

[41] Подразумевается критерий В.И. Арнаутова топологизируемости счётных ассоциативных колец. — И.А.Т.

[42] В тексте А.Д. Тайманова, который мы передали М.В. Котову, в предисловии написано, что “в данной статье дается подробное доказательство теорем из (13) и

поэтому в §3 приведено доказательство этого критерия. В этой работе критерий А. Д. Тайманова переформулируется с использованием понятия топологии Зарисского.

Теорема 3 (критерий Тайманова [16]). *Счётная алгебра $A = \langle A, L_A\rangle$ счётного языка топологизируема тогда и только тогда, когда топология Зарисского $\mathfrak{Z}_A$ не является дискретной.* ”

В 1980 г. М.Г. Перетятькин [43] построил первый пример конечно-аксиоматизируемой полной теории, которая категорична во всех несчётных мощностях, но имеет несколько неизоморфных счётных моделей. В этом случае, число таких счётных моделей должно быть счётно. Вскоре после этого А.Д. Тайманов построил очень простой пример такой теории, который, к сожалению, не смог опубликовать в журнале, и только в конце 1980-ых годов с помощью его учеников статья с этим примером была опубликована в малодоступном сборнике [17]. С помощью идей из [17] в работе Е.С. Байсалова пример такой теории, причём с дополнительными интересными свойствами, был построен совсем кратко [44] .

В 1980-ые годы А.Д. Тайманов много занимался проблемой Тарского об элементарной эквивалентности свободных групп F_n с $n \geq 2$ образующими. К ней он уже обращался в начале 1960-ых, когда пытался использовать для её решения полученный им критерий элементарной эквивалентности. Через двадцать лет интерес к этому вопросу возобновился после работ Г.С. Маканина [45] и А.А. Разборова [46] об алгоритмическом распознавании разрешимости произвольного уравнения в свободной группе.

достаточные условия топологизируемости несчетных алгебр”. Под (13) очевидно следует понимать [16]. Основные результаты сформулированы в теоремах 1 и 2. Теорема 1 утверждает, что

“*Если A счётная алгебра конечной сигнатуры, то следующие условия эквивалентны:*

1) алгебра A допускает нетривиальную T_1-топологию;

2) алгебра A содержит хотя бы один элемент, не являющийся T_1-изолированным.”

Теорема 2 формулируется аналогично с заменой T_1 на T_2. После изложения их доказательств текст прерывается и несчётные алгебры не обсуждаются. Список литературы также отсутствует. Понятия T_i-изолированности элементов алгебры были введены в [16]. — И.А.Т.

[43] М. Г. Перетятькин. *Пример ω_1-категоричной полной конечно-аксиоматизируемой теории.* Алгебра и логика, 1980, т. 19, №3, 314–347.

[44] Е.Р. Байсалов. *Пример теории, отвечающий на вопрос Б. С. Байжанова.* Алгебра и логика, 1991, т. 30, №1, 15–16.

[45] Г.С. Маканин. *Уравнения в свободной группе.* Изв. АН СССР, сер. матем., 1982, т. 46, вып. 6, 1199–1273.

[46] А. А. Разборов. *О системах уравнений в свободной группе.* Изв. АН СССР, сер. матем., 1984, т. 48, вып. 4, 779–832.

Применявшаяся А.Д. Таймановым комбинаторная техника к успеху не приводила. Регулярно приезжавший в Новосибирск его бывший ученик А.Т. Нуртазин находил пробелы в конструкциях, основанных на “методе перекидки”.

К концу 1989 г. им был закончен большой текст с доказательством элементарной эквивалентности групп F_n при $n \geq 2$, но с учётом его предшествующих вариантов специалисты отнеслись к нему скептически, и текст остался непроверенным. Положительное решение проблемы Тарского было получено в середине 2000-ых годов независимо З. Селой и О. Харлампович–А. Мясниковым. Каждое из этих решений излагалось в цикле больших и технически сложных работ, использовавших, в частности, идеи геометрической теории групп.

В начале июня 1988 г. у А.Д. Тайманова был установлен рак в терминальной стадии. Болезнь была обнаружена при операции, но врачи не стали проводить удаление опухоли и курсы химиотерапии, ссылаясь на многочисленные метастазы и нагрузку на сердце. К осени А.Д. Тайманов вернулся к рабочей форме и стал, как обычно, с утра до вечера проводить дни на работе, приходя домой на обед.

В конце декабря 1989 г. здоровье А.Д. Тайманова сильно ухудшилось, он перестал ходить в институт, а после “старого Нового года” (13 января 1990 г.) лег в больницу, в которой скончался 1 февраля 1990 г.

3 февраля А.Д. Тайманов, согласно его завещанию, был похоронен в одной нише со старшим сыном, Искандером, на Донском кладбище г. Москвы.

Список литературы

[1] А. Д. Тайманов. *О квазикомпонентах несвязных множеств.* Матем. сб., 1949, т. 25(67), №3, 367–386.

[2] А. Д. Тайманов. *О квазикомпонентах несвязных множеств. II.* Матем. сб., 1952, т. 30(72), №3, 465–482.

[3] А. Д. Тайманов. *О распространении непрерывных отображений.* Матем. сб., 1952, т. 31 (73), №2, 459–463.

[4] А. Д. Тайманов. *Об одной задаче Н. Н. Лузина.* Успехи матем. наук, 1953, т. 8, вып. 5(57), 169–171.

[5] А. Д. Тайманов. *О замкнутых отображениях. I.* Матем. сб., 1955, т. 36(78), №2, 349–352.

[6] А. Д. Тайманов. *Об универсальных множествах.* Матем. сб., 1955, т. 37(79), №1, 117–120.

[7] А. Д. Тайманов. *Об открытых образах борелевских множеств.* Матем. сб., 1955, т. 37(79), №2, 293–300.

[8] А. Д. Тайманов. *Продолжение отображений компактов.* Изв. вузов. Матем., 1958, №3, 198–202.

[9] А. Д. Тайманов. *О замкнутых отображениях. II.* Матем. сб., 1960, т. 52(94), №1, 579–588.

[10] А. Д. Тайманов. *Характеристика аксиоматизируемых классов моделей. I*, Изв. АН СССР, сер. матем., 1961, т. 25, вып. 4, 601–620.

[11] А. Д. Тайманов. *Характеристика аксиоматизируемых классов моделей. II*, Изв. АН СССР, сер. матем., 1961, т. 25, вып. 6, 755–764.

[12] А. Д. Тайманов. *Характеристики аксиоматизируемых классов моделей*, Алгебра и логика. Семинар, 1962, т. 1, №4, 5–31.

[13] А. Д. Тайманов. *О некоторых работах, связанных с дескриптивной теорией множеств и топологией*, Тр. МИАН СССР, 1973, т. 133, 203–213.

[14] А. Д. Тайманов. *Пример полугруппы, допускающей только дискретную топологию*, Алгебра и логика, 1973, т. 12, №1, 114–116.

[15] А. Д. Тайманов. *О топологизируемых группах. II.* Сиб. матем. журн., 1978, т. 19, №5, 1201–1203.

[16] А. Д. Тайманов. *О топологизации счётных алгебр*, ДАН СССР, 1978, т. 243, №2 284–286.

[17] А. Д. Тайманов. *Новый пример полной конечно-аксиоматизируемой несчетно категоричной теории.* В сб. "Теоретико-модельная алгебра", КазГУ, Алма-Ата, 1989, 124–129.

Iskander Asanovich Taimanov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. akad. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: taimanov@math.nsc.ru