S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 1200–1210 (2023) УДК 512.55
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.074 MSC 16P10,16W20

О КЛАССАХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МАТРИЦ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ НЕЧЕТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Е.В. ЖУРАВЛЁВ

Представлено В.В. Пржиялковским

Abstract: In this article we classified up to isomorphism all finite local rings R with Jacobson radical J and conditions:

$$\mathrm{char} R \neq 2,\ R/J = F \subseteq Z(R),\ \dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2 = 3,\ J^3 = 0.$$

Keywords: finite rings, local rings.

1 Введение

Квадратные матрицы M и M' над конечным полем F называются конгруэнтными, если существует невырожденная матрица P над F, такая, что $M' = P^T MP$, где P^T – транспонированная матрица. Причем, если P – ортогональная матрица, $P^T = P^{-1}$, то M и M' называются ортогонально подобными ([1, 2]). В работе [3] М. Ньюман нашел все классы конгруэнтности для симметрических матриц. В. Уотерхаус (см. [4]) для произвольных матриц вычислил количество классов конгруэнтности без указания их представителей. Случай для матриц порядка два был изучен в работах [5, 6], а для матриц порядка три в работах [7, 8, 9].

Пусть $M_1, M_2, \dots, M_m, M'_1, M'_2, \dots, M'_m \in M_n(F)$, $F = GF(p^r)$ – конечное поле, p – простое число, $m, n, r \in \mathbb{N}$. Упорядоченные последовательности матриц $(M_1, M_2, \dots, M_m)$ и $(M'_1, M'_2, \dots, M'_m)$ назовем эквивалентными, если существуют невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{n\times n}$ и $Q = (q_{ij})_{m\times m}$ над полем F такие, что

$$M'_k = \sum_{i=1}^{m} q_{ki} P^T M_i P,\ k = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Zhuravlev, E.V., On equivalence classes of matrices over a finite field of odd characteristic.

Поступила 14 июля 2023 г., опубликована 7 декабря 2023 г.

В частности, при $m = 1$ получаем:

$$M_1' = q_{11} P^T M_1 P. \tag{2}$$

Очевидно, что в этом случае из конгруэнтности матриц следует их эквивалентность. В работах [6, 10, 11, 12] авторы, используя полученные ранее классы конгруэнтности матриц порядка два и три над простым полем, нашли их представители классов эквивалентности.

Для двоек матриц порядка два ($m = 2$ и $n = 2$) эквивалентность определяется равенствами

$$\begin{cases} P^T (q_{11} M_1 + q_{12} M_2) P = M_1'; \\ P^T (q_{21} M_1 + q_{22} M_2) P = M_2'. \end{cases} \tag{3}$$

Б. Горбас и Г. Уильямс полностью изучили этот случай при $p \neq 2$ в работе [13] и при $p = 2$ в работе [14].

При $m = 3$ и $n = 2$ получаем, что тройки (M_1, M_2, M_3), (M_1', M_2', M_3') матриц второго порядка эквивалентны, если существуют невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{2\times 2}$ и $Q = (q_{ij})_{3\times 3}$ такие, что

$$\begin{cases} P^T (q_{11} M_1 + q_{12} M_2 + q_{13} M_3) P = M_1'; \\ P^T (q_{21} M_1 + q_{22} M_2 + q_{23} M_3) P = M_2'; \\ P^T (q_{31} M_1 + q_{32} M_2 + q_{33} M_3) P = M_3'. \end{cases} \tag{4}$$

Цель данной работы – найти представители классов эквивалентности для данного случая, при $p \neq 2$, и применить полученный результат для классификации конечных локальных колец.

2 Эквивалентность матриц

Далее будем полагать, что $F = GF(p^r)$ – конечное поле нечетной характеристики ($p \neq 2$), δ – некоторый фиксированный элемент из F^*, такой, что $\delta \notin F^{*2}$, $\delta \neq 1$. Пусть $\varepsilon \in \{1, \delta\}$, то есть ε пробегает множество представителей смежных классов F^*/F^{*2}. Если $\varepsilon = 1$ (соотв. $\varepsilon = \delta$), то для каждого $f \in F$ (соотв. $f \in F^*$) найдем ненулевое решение (x, y) уравнения $x^2 - \varepsilon y^2 = f$. Обозначим Ω_ε множество найденных таким образом элементов из $F \times F$. Кроме того, пусть σ пробегает множество представителей смежных классов $F^*/\{\pm 1\}$.

Лемма 1. *Всякая квадратная матрица M над полем F представима в виде суммы симметрической матрицы A и антисимметрической матрицы B (т.е. такой, что $B^T = -B$). Причем матрицы, эквивалентные симметрическим матрицам, являются также симметрическими, а матрицы, эквивалентные антисимметрическим матрицам, являются также антисимметрическими.*

Основываясь на результатах работ [3, 13] приведем в таблице 1 последовательности матриц, являющихся представителями классов эквивалентности, определяемой соотношениями (2) и (3), у которых соответствующие симметрические матрицы являются линейно независимыми.

таблица 1

симметрические матрицы	несимметрические матрицы
1. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1+\beta\\ 1-\beta & 0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, где $\beta \in F^*$;
2. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ -\alpha & \varepsilon\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1+\beta\\ 1-\beta & 0\end{pmatrix}$, где $(\alpha, \beta) \in \Omega_\varepsilon$;
3. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1 & \sigma\\ -\sigma & \varepsilon\end{pmatrix}$.

Всюду далее мы будем рассматривать тройки матриц порядка два над полем F и отношение эквивалентности, определяемое равенствами (4). Сначала укажем представителей классов эквивалентности симметрических матриц. Для этого разделим их на группы в соответствии с рангом. Так как симметрические матрицы это подпространство размерности три, то все тройки линейно независимых матриц образуют один класс эквивалентности и тройку матриц ранга три, представителя этого класса, мы можем выбрать, например, e_{11}, $e_{12} + e_{21}$, e_{22}. Тройки матриц ранга два это двойки линейно независимых матриц – представителей классов эквивалентности, определяемой соотношением (3), с добавленной нулевой матрицей. Тройки матриц ранга один это ненулевые матрицы – представители классов эквивалентности, определяемой соотношением (2), с добавленными нулевыми матрицами (см. таблицу 1).

Итак, пусть S – множество, состоящее из следующих троек матриц:

(1) $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

(2) $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\zeta \in \{0, 1, \delta\}$;

(3) $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\zeta \in \{0, 1, \delta\}$;

(4) $A_1 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Если при некоторых P и Q последовательность матриц $(M_1, M_2, \dots, M_m)$ эквивалентна самой себе, то будем говорить, что пара матриц (P, Q) стабилизирует $(M_1, M_2, \dots, M_m)$. Кроме того, определим на тройках матриц покоординатное сложение

$$(A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3) = (A_1, A_2, A_3) + (B_1, B_2, B_3),$$

где $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 \in M_2(F)$

Лемма 2.

(1) *Всякий класс эквивалентности содержит тройку*

$$(M_1, M_2, M_3) = (A_1, A_2, A_3) + (B_1, B_2, B_3),$$

где $(A_1, A_2, A_3) \in S$ *и* (B_1, B_2, B_3) *– тройка антисимметрических матриц. Причем каждый класс определяется* $(A_1, A_2, A_3) \in S$ *единственным образом.*

(2) *Пусть* $(A_1, A_2, A_3) \in S$ *и* (B_1, B_2, B_3), (B'_1, B'_2, B'_3) *– тройки антисимметрических матриц.*

$$(A_1, A_2, A_3) + (B_1, B_2, B_3) \sim (A_1, A_2, A_3) + (B'_1, B'_2, B'_3)$$

тогда и только тогда, когда существуют P *и* Q *такие, что*

(a) (P, Q) *стабилизирует* (A_1, A_2, A_3)*;*

(b) $(B_1, B_2, B_3) \sim (B'_1, B'_2, B'_3)$ *посредством* P *и* Q*.*

Лемма 3. *Если* $(A_1, A_2, 0) \in S$, $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, *то стабилизирующие матрицы* P *и* Q *для тройки* $(A_1, A_2, 0)$ *имеют вид*

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & q_{33} \end{pmatrix},$$

причем матрицы

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

являются стабилизирующими для двойки (A_1, A_2) *в смысле эквивалентности, определяемой равенствами* (3).

Доказательство. Так как матрицы A_1, A_2 линейно независимы, то равенство $P^T\,(q_{31}A_1 + q_{32}A_2)\,P = 0$ (см. (4)) возможно только при $q_{31} = 0$ и $q_{32} = 0$. □

Лемма 4. *Если* $(A_1, A_2, 0) \in S$, $A_1 \neq 0$, *то стабилизирующие матрицы* P *и* Q *для тройки* $(A_1, 0, 0)$ *имеют вид*

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix},$$

причем матрицы

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \; (q_{11})$$

являются стабилизирующими для матрицы A_1 *в смысле эквивалентности, определяемой равенствами* (2).

Доказательство. В этом случае система (4) принимает вид

$$\begin{cases} P^T\left(q_{11}A_1\right)P = A_1; \\ P^T\left(q_{21}A_1\right)P = 0; \\ P^T\left(q_{31}A_1\right)P = 0. \end{cases}$$

Так как $\det(P) \neq 0$, то $P^T A_1 P \neq 0$ и, следовательно, $q_{21} = 0$ и $q_{31} = 0$. □

Пусть далее $\Delta = \det(P)$,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \end{pmatrix},$$

$$B'_1 = \begin{pmatrix} 0 & x' \\ -x' & 0 \end{pmatrix},\ B'_2 = \begin{pmatrix} 0 & y' \\ -y' & 0 \end{pmatrix},\ B'_3 = \begin{pmatrix} 0 & z' \\ -z' & 0 \end{pmatrix},$$

где $x, y, z, x', y', z' \in F$. Если $\Pi_B = (B_1, B_2, B_3) \sim \Pi_{B'} = (B'_1, B'_2, B'_3)$, то

$$\begin{cases} (q_{11}x + q_{12}y + q_{13}z)\Delta = x'; \\ (q_{21}x + q_{22}y + q_{23}z)\Delta = y'; \\ (q_{31}x + q_{32}y + q_{33}z)\Delta = z'. \end{cases} \tag{5}$$

Лемма 5. *Если* $\Pi_A = (A_1, A_2, 0) \in S$ *и* $\Pi_B = (B_1, B_2, B_3)$, $\Pi_{B'} = (B'_1, B'_2, 0)$, *причем* $B_3 \neq 0$, *то* $\Pi_M = \Pi_A + \Pi_B \nsim \Pi_{M'} = \Pi_A + \Pi_{B'}$.

Доказательство. Если $\Pi_M \sim \Pi_{M'}$, для некоторых P и Q, то в силу леммы 3 равенство $(q_{31}x + q_{32}y + q_{33}z)\Delta = z'$ системы (5) принимает вид $q_{33}z\Delta = 0$. Так как $z \neq 0$ и $\Delta \neq 0$, то $q_{33} = 0$, что противоречит условию $\det(Q) \neq 0$. □

Лемма 6. *Если* $\Pi_A = (A_1, 0, 0) \in S$ *и* $\Pi_B = (B_1, B_2, B_3)$, $\Pi_{B'} = (B'_1, 0, 0)$, *причем* $B_2 \neq 0$ *или* $B_3 \neq 0$, *то* $\Pi_M = \Pi_A + \Pi_B \nsim \Pi_{M'} = \Pi_A + \Pi_{B'}$.

Доказательство. Если $\Pi_M \sim \Pi_{M'}$, для некоторых P и Q, то в силу леммы 4 система (5) имеет вид

$$\begin{cases} (q_{11}x + q_{12}y + q_{13}z)\Delta = x'; \\ \qquad (q_{22}y + q_{23}z)\Delta = 0; \\ \qquad (q_{32}y + q_{33}z)\Delta = 0. \end{cases}$$

Если $y \neq 0$ или $z \neq 0$, то $\det(Q) = 0$. Противоречие. □

Далее, следуя вышеуказанному списку симметрических матриц S, рассмотрим каждый из четырех случаев в отдельности. Для конкретных симметрических матриц $(A_1, A_2, A_3) \in S$, используя стабилизирующие их P и Q, мы найдем неэквивалентные между собой, посредством этих P и Q, тройки антисимметрических матриц (B_1, B_2, B_3). Затем, складывая тройки симметрических и антисимметрических матриц, мы получим необходимые представители классов эквивалентности.

Случай 1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Определим стабилизирующие матрицы $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $Q = (q_{ij})_{3\times 3}$ для тройки (A_1, A_2, A_3), $a, b, c, d, q_{ij} \in F$. Система (4), при $A_1 = A'_1$, $A_2 = A'_2$,

$A_3 = A_3'$, дает нам три системы линейных неоднородных уравнений:

$$\begin{cases} a^2q_{11} + 2acq_{12} + c^2q_{13} = 1; \\ abq_{11} + (ad+bc)q_{12} + cdq_{13} = 0; \\ b^2q_{11} + 2bdq_{12} + d^2q_{13} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2q_{21} + 2acq_{22} + c^2q_{23} = 0; \\ abq_{21} + (ad+bc)q_{22} + cdq_{23} = 1; \\ b^2q_{21} + 2bdq_{22} + d^2q_{23} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2q_{31} + 2acq_{32} + c^2q_{33} = 0; \\ abq_{31} + (ad+bc)q_{32} + cdq_{33} = 0; \\ b^2q_{31} + 2bdq_{32} + d^2q_{33} = 1. \end{cases}$$

Определитель матрицы каждой из систем равен $\Delta^3 \neq 0$. Решая их, получаем

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ Q = \frac{1}{\Delta^2} \begin{pmatrix} d^2 & -bd & b^2 \\ -2cd & ad+bc & -2ab \\ c^2 & -ac & a^2 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = ad - bc$, $a, b, c, d \in F$.

Если $x \neq 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y/(2x) & 1/x \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y & x & 0 \\ y^2/4 & -xy/2 & x^2 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z' \\ -z' & 0 \end{pmatrix} \right),$$

где $z' = (-y^2 + 4xz)/4$.

Если $x = 0$, $y = 0$, $z \neq 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ z & 0 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/z^2 \\ 0 & -1/z & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Если $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, то

$$\Pi_B \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Если $x = 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2/y \\ 0 & -4z/y^2 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 1 & -y/(2z) & y^2/(4z^2) \\ 0 & -y^2/(4z) & y^3/(4z^2) \\ 0 & 0 & y^4/(16z^2) \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -y^2/4 \\ y^2/4 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Если $x = 0$, $y \neq 0$, $z = 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2/y \\ 1 & 2/y \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -y/4 & 0 & y/4 \\ y^2/16 & -y^2/16 & y^2/16 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -y^2/4 \\ y^2/4 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Рассмотрим тройки вида

$$\Pi_B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \end{pmatrix} \right), \text{ где } z \in F,$$

и докажем, что каждая тройка является представителем класса эквивалентности. Если

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \end{pmatrix} \right) \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z' \\ -z' & 0 \end{pmatrix} \right),$$

при некоторых $z, z' \in F$, $z \neq z'$, то

$$\begin{cases} (d^2 + b^2 z)/\Delta = 1; \\ -2(cd + abz)/\Delta = 0; \\ (c^2 + a^2 z)/\Delta = z' \end{cases}$$

Отсюда $d\Delta = ad^2 - bcd = ad^2 + ab^2 z = a(d^2 + b^2 z) = a\Delta$. Следовательно, $a = d$ и $cd = ca = -abz$. Если $a \neq 0$, то $c = -bz$, $\Delta = ad - bc = a^2 - bc$, $z' = (za^2 - cbz)/\Delta = z(a^2 - bc)/\Delta = z$. Если $a = d = 0$, то $b \neq 0$, $c \neq 0$, $zb^2 = \Delta = -bc$, $c^2 = -bcz'$, а значит, $zb = -c$, $c = -bz'$ и $z = z'$. Противоречие.

Случай 2. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\zeta \in \{0, 1, \delta\}$.

Если $z \neq 0$, то, полагая

$$P = E, \ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x/z \\ 0 & 1 & -y/z \\ 0 & 0 & 1/z \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Если $z = 0$ ($B_3 = 0$), то, в силу леммы 5, задача сводится к классификации пар $(A_1, A_2) + (B_1, B_2)$ (см. таблицу 1, строки 1,2).

Случай 3. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\zeta \in \{0, 1, \delta\}$.

Полагая

$$P = E, \ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

заметим, что $(B_1, B_2, B_3) \sim (B_1, B_3, B_2)$. Если $y \neq 0$ или $z \neq 0$, то, без потери общности, полагаем $y \neq 0$,

$$P = E, \ Q = \begin{pmatrix} 1 & -x/y & 0 \\ 0 & 1/y & 0 \\ 0 & -z/y & 1 \end{pmatrix},$$

и получаем

$$\Pi_B \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Если $x = 0$ и $y = 0$, то, в силу леммы 6, задача сводится к классификации матриц вида $A_1 + B_1$ (см. таблицу 1, строки 3, 4).

Случай 4. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Стабилизирующими матрицами являются любые невырожденные матрицы P и Q. Если Π_B содержит ненулевые матрицы, то, без потери общности, полагая $x \neq 0$,

$$P = E,\ Q = \begin{pmatrix} 1/x & 0 & 0 \\ -y/x & 1 & 0 \\ -z/x & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Таким образом, рассмотрены все возможные случаи и мы можем сформулировать полученный результат.

Теорема 1. *В следующем списке перечислены представители всех классов эквивалентности, определенной на тройках матриц порядка два посредством соотношения (4):*

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 1 \end{pmatrix}, z \in F;$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta \in F^*;$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon \in \{1, \delta\}, (\alpha, \beta) \in \Omega_\varepsilon;$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$

(9) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

(11) $\begin{pmatrix} 1 & \sigma \\ -\sigma & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon \in \{1, \delta\};$

(12) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

$$(13)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где δ – некоторый фиксированный элемент из F^*, $\delta \notin F^{*2}$, $\delta \neq 1$, и σ пробегает множество представителей смежных классов $F^*/\{\pm 1\}$.

В работе [15] Ч. Чикунджи с помощью пакета прикладных программ Matlab вычислил количество линейно независимых матриц, являющихся представителями классов эквивалентности в смысле равенств (4), при конкретных значениях $p = 2, 3, \ldots$. Им было сделано предположение о том, что при всяком значении p их количество равно $p^r + 4$. Теорема 1 подтверждает это предположение при $p \neq 2$. Линейно независимые тройки матриц указаны в пунктах 1, 2 и 4.

3 Классификация конечных колец

Всюду далее мы будем рассматривать только конечные ассоциативные кольца с единицей. Всякое конечное кольцо единственным образом представимо в виде прямой суммы колец, порядки которых есть степени некоторых простых чисел, то есть $R = \bigoplus\sum\limits_{p} R_p$, $R_p = \{x \in R \mid p^n x = 0$ для некоторого $n \geq 1\}$ (см. [16], стр. 29). Поэтому при классификации колец достаточно рассматривать только кольца порядка p^n. В.Г. Антипкин и В.П. Елизаров описали кольца порядка p^n для $n \leq 3$ (см. [17, 18]). Д. Дерр, Г. Орр, П. Пек впервые указали исчерпывающий список некоммутативных колец порядка p^4 (см. [19]). Б. Горбас и Г. Уильямс в работах [10, 11] классифицировали с точностью до изоморфизма все кольца порядка не более p^5. Кольца порядка p^6, с некоторыми ограничениями на радикал Джекобсона J, классифицированы в работах [20, 21]. Важно заметить, что классификация колец сводится к классификации локальных колец (см. [10]), то есть таких колец R, что R/J – поле. Известно, что всякое коммутативное кольцо является прямой суммой локальных колец (см. [16], стр. 36).

В работе [22] Ч. Чикунджи описал строение локальных колец с радикалом J индекса нильпотентности три и сформулировал необходимые и достаточные условия их изоморфности. Далее рассмотрим один из типов таких колец. Пусть R – локальное кольцо характеристики p, $J^3 = 0$, $Z(R)$ – центр кольца и $R/J = GF(p^r) = F \subseteq Z(R)$. Тогда R – конечномерное векторное пространство над F и

$$R = F \oplus J,\ \ J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus \ldots \oplus Fu_n \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus \ldots \oplus Fv_m,$$

где $\dim_F J/J^2 = n$, $\dim_F J^2 = m$ и $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ – базис J над F, $u_1, u_2, \ldots, u_n \in J \setminus J^2$, $v_1, v_2, \ldots, v_m \in J^2$, $n, m \in \mathbb{N}$. (см. [22, 23]) . Пусть

$$u_i u_j = m_{ij}^{(1)} v_1 + m_{ij}^{(2)} v_2 + \ldots + m_{ij}^{(m)} v_m \tag{6}$$

для некоторых $m_{ij}^{(k)} \in F$, $i, j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$. Рассмотрим матрицы умножения из структурных констант: $M_k = \left(m_{ij}^{(k)}\right)_{n \times n}$, $i, j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$. Такие матрицы линейно независимы и, если R – коммутативно, то матрицы являются симметрическими. По всякой последовательности $M_k = \left(m_{ij}^{(k)}\right)_{n \times n}$, $i, j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$, линейно независимых матриц однозначно определяется рассмотренное выше кольцо с умножением (6).

Пусть R и R' – произвольные кольца, указанного выше типа, с матрицами умножения $M_1, M_2, \ldots, M_m$ и $M'_1, M'_2, \ldots M'_m$, соответственно.

Теорема 2. [22] *$R \cong R'$ тогда и только тогда, когда существуют невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{n\times n}$, $Q = (q_{ij})_{m\times m}$ над полем F и автоморфизм ρ поля F такие, что*

$$M'_k = \sum_{i=1}^{m} q_{ki} P^T M_i^{\rho} P,\ k = \overline{1,m}, \tag{7}$$

где $M_k^{\rho} = \left(\left(m_{ij}^{(k)}\right)^{\rho}\right)$, $k = \overline{1,m}$.

Равенства (7) при $n = 2$, $m = 3$ отличаются от (4) только наличием автоморфизма ρ поля F. Пусть Σ – множество всех таких элементов поля $F = GF(p^r)$, что для любых $a, b \in \Sigma$ не существует изоморфизма ρ поля F при котором $a^{\rho} = b$ (равносильно – для любых $a, b \in \Sigma$ не существует такого натурального числа k, что $a^{p^k} = b$). Используя линейно независимые тройки матриц из теоремы 1 и учитывая действие ρ мы получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Тройки матриц, представленные ниже, с точностью до изоморфизма определяют все конечные локальные кольца с единицей и условиями:*

$$\mathrm{char} R \neq 2,\ R/J = F \subseteq Z(R),\ \dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2 = 3,\ J^3 = 0.$$

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 1 \end{pmatrix}$, $z \in \Sigma$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\zeta \in \{0, 1, \delta\}$.

Автор выражает благодарность профессору Ю.Н. Мальцеву за внимание, проявленное к данной работе.

References

[1] A.D. Porter, *Orthogonal similarity in a finite field*, Math. Nachr., **40** (1969), 327–331. Zbl 0186.05904

[2] A.D. Porter, J. Adams, *Similarity and orthogonal similarity in a finite field*, Duke Math. J., **35** (1968), 519–524. Zbl 0181.04102

[3] M. Newman, *Integral Matrices*, Academic Press, New York-London, 1972. Zbl 0254.15009

[4] W.C. Waterhouse, *The number of congruence classes in $M_n(F_q)$*, Finite Fields and Their Applications, **1**:1 (1995), 57–63.

[5] P.S. Bremser, *Congruence classes of matrices in $GL_2(F_q)$*, Discrete Math., **118**:1-3 (1993), 243–249. Zbl 0781.15007

[6] G.D. Williams, *Congruence of (2×2) matrices*, Discrete Math., **224**:1-3 (2000), 293–297. Zbl 0999.15022

[7] B. Gorbas, G.D. Williams, *Matrix representatives for three-dimensional bilinear forms over finite fields*, Discrete Math., **185**:1-3 (1998), 51–61. Zbl 0951.11014

[8] B. Gorbas, G.D. Williams, *Congruence classes in $M_3(F_q)$ (q odd)*, Discrete Math., **219**:1-3 (2000), 37–47. Zbl 0957.15007

[9] B. Gorbas, G.D. Williams, *Congruence classes in $M_3(F_q)$ (q even)*, Discrete Math., **257**:1 (2002), 15–27. Zbl 1014.15010

[10] B. Gorbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5. I: Nonlocal rings*, J. Algebra, **231**:2 (2000), 677–690. Zbl 1017.16014

[11] B. Gorbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5. II: Local rings*, J. Algebra, **231**:2 (2000), 691–704. Zbl 1017.16015

[12] C.J. Chikunji, *On a class of rings of order* p^5, Math. J. Okayama Univ., **45** (2003), 59–71. Zbl 1055.16023
[13] B. Gorbas, G.D. Williams, *Gongruence of two-dimensional subspaces in* $M_2(K)$ *(characteristic* $\neq 2$*)*, Pac. J. Math., **188**:2 (1999), 225–235. Zbl 0929.16029
[14] B. Gorbas, G.D. Williams, *Gongruence of two-dimensional subspaces in* $M_2(K)$ *(characteristic 2)*, Pac. J. Math., **188**:2 (1999), 237–249. Zbl 0929.16030
[15] C.J. Chikunji, *Using Matlab to solve a classification problem in finite rings*, 2^{nd} international conference on the teaching of mathematic (Greece), 2002.
[16] V.P. Elizarov, *Finite rings*, Gelios ARV, Moscow, 2006.
[17] V.G. Antipkin, V.P. Elizarov, *Rings of order* p^3, Sib. Math. J., **23** (1982), 457–464. Zbl 0507.16016
[18] V.P. Elizarov, *Nonnilpotent finite rings*, The manuscript of the dep. in the SB of the USSR Academy of Sciences (editorial board of the Siberian Mathematical Journal), **1472**, 1985.
[19] J.B. Derr, G.F. Orr, P.S. Peck, *Noncommutative rings of order* p^4, J. Pure Appl. Algebra, **97**:2 (1994), 109–116. Zbl 0821.16024
[20] E.V. Zhuravlev, *Local rings of order* p^6 *with 4-nilpotent Jacobson radical*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **3** (2006), 15–59. Zbl 1117.16009
[21] E.V. Zhuravlev, *On the classification of finite commutative local rings*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **12** (2015), 625–638. Zbl 1383.13002
[22] C.J. Chikunji, *On a class of finite rings*, Commun. Algebra, **27**:10 (1999), 5049–5081. Zbl 0942.16027
[23] R. Raghavendran, *Finite associative rings*, Compos. Math., **21** (1969), 195–229. Zbl 0179.33602

Evgeniy Vladimirovich Zhuravlev
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
Email address: evzhuravlev@mail.ru