S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

*Том 20, №2, стр. 1320–1340 (2023)* УДК 517.923; 517.965; 517.983; 519.218.7
DOI 10.33048/semi.2023.20.080 MSC 20M20; 28C20; 34G20; 39B42

# ГАУССОВСКИЕ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ БОРЕЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ НА СЕПАРАБЕЛЬНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

О.Е. ГАЛКИН[1], С.Ю. ГАЛКИНА[1], И.Ю. ЯСТРЕБОВА

Abstract. The concept of a Gaussian family of Borel measures on a separable Hilbert space is introduced in the paper. Necessary and sufficient conditions are found under which a Gaussian family of measures generates a semigroup of operators on the space of complex bounded Borel functions. These conditions are expressed in the form of a system of functional equations and initial conditions for operator-valued functions on the real semi-axis. A system of differential equations is derived from the system of functional equations and it is proved that the Cauchy problem has a unique solution for it. Several examples of Gaussian semigroups of operators are given.

**Keywords:** gaussian semigroup of operators, Gaussian family of Borel measures, operator Riccati differential equation, determinant of infinite order, system of functional equations

## 1. Введение

Работа посвящена изучению условий, при которых гауссовское семейство мер на сепарабельном гильбертовом пространстве порождает полугруппу операторов на пространстве комплекснозначных ограниченных борелевских функций. Под гауссовским семейством мер мы понимаем (точное определение 12 см.

---

Galkin, O.E., Galkina, S.Yu., Yastrebova, I.Yu., Gaussian semigroups of operators in the space of Borel functions on a separable Hilbert space.



[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2022-1101.

*Поступила 7 октября 2023 г., опубликована 7 декабря 2023 г.*

ниже) семейство $\{\mu_{t,x} \bigm| t \geqslant 0, x \in \mathscr{H}\}$ борелевских мер на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, имеющее вид

$$\mu_{t,x} = h(t)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\big\langle P(t)x,x\big\rangle\Big\}\Gamma_{Q(t),R(t)x},$$

где числовая функция $h(t)$ и оператор-функции $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ заданы на полуоси $t \geqslant 0$, и через $\Gamma_{Q(t),R(t)x}$ обозначена гауссовская мера с корреляционным оператором $Q(t)$ и средним значением $R(t)x$ (см. п. 2.6). Операторы порождаемой этим семейством полугруппы $(G_t)_{t\geqslant 0}$ (также называемой гауссовской — см. определение 13) должны задаваться формулой

$$\begin{aligned}(1)\quad (G_tf)(x) &= \int_{\mathscr{H}} f(y)\,\mu_{t,x}(dy) = \\ &= \int_{\mathscr{H}} f(y)\,h(t)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\big\langle P(t)x,x\big\rangle\Big\}\Gamma_{Q(t),R(t)x}(dy) = \\ &= h(t)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\big\langle P(t)x,x\big\rangle\Big\}\int_{\mathscr{H}} f\big(z+R(t)x\big)\,\Gamma_{Q(t),0}(dz)\end{aligned}$$

для любой борелевской ограниченной функции $f\colon \mathscr{H}\to\mathbb{C}$.

В статье найдены необходимые и достаточные условия на $h(t)$, $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$, при выполнении которых семейство операторов $(G_t)_{t\geqslant 0}$, задаваемое равенством (1), действительно образует полугруппу. Эти условия в теореме 3 (первой из трёх основных теорем работы) выражены в виде системы функциональных уравнений и начальных условий на функции $h(t)$, $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$. В следующей теореме 4 из упомянутой системы функциональных уравнений выведена система обыкновенных дифференциальных уравнений для $h(t)$, $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$, а в теореме 5 доказано, что задача Коши для последней системы имеет единственное решение. При этом оказалось, что дифференциальное уравнение для $P(t)$ относится к классу операторных уравнений Риккати (см. определение 4), которые играют важную роль в линейной теории оптимального управления и теории дифференциальных игр (см., например, [3]). В четырех частных случаях на основе решений указанной задачи Коши, найденных в явном виде, приведено несколько примеров гауссовских полугрупп операторов (см. п. 3.2). На наш взгляд, интерес представляет также предложение 13, в котором вычислен интеграл по гауссовской мере от функции вида $\exp\bigl\{i\langle y,b\rangle - \frac{1}{2}\langle Ay,y\rangle\bigr\}$, где $b\in\mathscr{H}$ и $A$ — линейный ограниченный оператор на $\mathscr{H}$.

Наше внимание к гауссовским полугруппам, определяемым формулой (1), обусловлено, в частности, тем, что с помощью аналогичных формул могут быть представлены решения задачи Коши с начальным условием $f$ для некоторых параболических уравнений, как в конечномерном случае (например, для уравнения теплопроводности — см. [22, п. 3 §40]), так и в бесконечномерном случае (см. [9, теор. 1.4 гл. V]). Развиваемое нами направление исследований интересно и тем, что оно затрагивает такие популярные математические объекты, как полугруппы операторов, гауссовские меры и уравнения Риккати, которым посвящена обширнейшая литература (см., например, [11], [24], [14], [6], [13], [3], [1], а также библиографию в них). Тесные связи, существующие между операторным дифференциальным уравнением Риккати и полугруппой симплектических гамильтоновых операторов, изучены в работе [18].

Отметим, что частным случаем гауссовских полугрупп являются полугруппы Орнштейна–Уленбека, рассмотренные в [6, §2.8] (см. пример 3). Гауссовские обобщённые мёлеровские полугруппы, изученные в [5, §4], также представляют собой частный случай гауссовских полугрупп, поскольку они могут быть заданы с помощью формул вида (1).

В параграфе 2 нашей работы для удобства собраны основные обозначения, определения и вспомогательные утверждения, которые нам понадобятся. В параграфе 3 помещены основные результаты статьи (теоремы 3, 4, 5 и примеры 4, 5, 6, 7). План дальнейших исследований изложен в последнем параграфе 4.

## 2. Предварительные сведения

В данном параграфе мы вводим обозначения, напоминаем ряд определений и известных фактов, а также приводим несколько утверждений, полезных для дальнейшего изложения. В предложении 13 мы вычисляем интеграл по гауссовской мере от функции вида $\exp\left\{i\langle y,b\rangle - \frac{1}{2}\langle Ay,y\rangle\right\}$ для любого вектора $b\in\mathscr{H}$ и любого линейного ограниченного оператора $A$ на $\mathscr{H}$.

### 2.1. Линейные ограниченные операторы на гильбертовом пространстве.

Всюду далее через $\mathscr{H}$ будем обозначать вещественное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x,y\rangle$, полное относительно евклидовой нормы $|x|_{\mathscr{H}} = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, где $x\in\mathscr{H}$. Мы будем называть $\mathscr{H}$ *гильбертовым пространством* независимо от его размерности, конечной или бесконечной. Результаты, если не указано другое, будем приводить в предположении, что $\mathscr{H}$ *сепарабельно*. Некоторые приведённые результаты, тем не менее, будут верны и без этого предположения.

Как известно (см., например, [8, Теорема 6.5.1]), пространство $\mathscr{H}^*$, сопряжённое к $\mathscr{H}$, изоморфно $\mathscr{H}$ в силу теоремы Рисса.

Символом $\mathcal{L}(\mathscr{H})$ будем далее обозначать пространство всех линейных ограниченных операторов на $\mathscr{H}$, наделенное равномерной операторной нормой $\|A\| = \sup\left\{|Ax|_{\mathscr{H}} \;\middle|\; x\in\mathscr{H}, |x|_{\mathscr{H}} < 1\right\}$. Через $\mathcal{L}^+(\mathscr{H})$ обозначим множество всех неотрицательных операторов, принадлежащих $\mathcal{L}(\mathscr{H})$, а через $\mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$ — подмножество в $\mathcal{L}^+(\mathscr{H})$, состоящее из самосопряжённых операторов.

Символом $I$ обозначим единичный оператор на $\mathscr{H}$.

Факты, приведенные в следующей лемме, наверняка известны.

**Лемма 1.** *Пусть даны операторы $A_1, A_2\in\mathcal{L}(\mathscr{H})$ и существует обратный оператор $(I+A_1A_2)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathscr{H})$. Тогда*

*1) существует обратный оператор $(I+A_2A_1)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathscr{H})$, причем выполняются равенства*

$$(I+A_2A_1)^{-1} = I - A_2(I+A_1A_2)^{-1}A_1 \quad \text{и} \quad A_1(I+A_2A_1)^{-1} = (I+A_1A_2)^{-1}A_1;$$

*2) если операторы $A_1$ и $A_2$ самосопряжены, то самосопряженными являются и операторы $A_1(I+A_2A_1)^{-1}$ и $(I+A_1A_2)^{-1}A_1$ (которые равны между собой в силу первой части леммы).*

*Доказательство.* 1) Верна следующая цепочка равенств:

$$\left(I - A_2(I+A_1A_2)^{-1}A_1\right)\cdot(I+A_2A_1) = I + A_2A_1 - A_2(I+A_1A_2)^{-1}A_1 -$$
$$-A_2(I+A_1A_2)^{-1}A_1A_2A_1 = I + A_2A_1 - A_2(I+A_1A_2)^{-1}(I+A_1A_2)A_1 = I.$$

Поэтому оператор $\big(I - A_2(I + A_1A_2)^{-1}A_1\big)$ является для $(I + A_2A_1)$ обратным слева. Аналогично доказывается, что он будет оператором, обратным справа.

Равенство $A_1(I + A_2A_1)^{-1} = (I + A_1A_2)^{-1}A_1$ легко следует из равенства $(I + A_1A_2)A_1 = A_1(I + A_2A_1)$.

2) Если $A_1 = A_1^*$ и $A_2 = A_2^*$, то, в силу первого пункта леммы, имеем:

$$\big(A_1(I + A_2A_1)^{-1}\big)^* = \big((I + A_1A_2)^{-1}A_1\big)^* = A_1(I + A_2A_1)^{-1} = (I + A_1A_2)^{-1}A_1.$$

Лемма доказана. □

Далее нам понадобится понятие функции от самосопряжённого оператора.

*Замечание* 1. Напомним (см. [8, теор. 7.7.2]), что для любого линейного ограниченного самосопряженного оператора $A$ на $\mathscr{H} \neq \{0\}$ и для любой непрерывной функции $f\colon \sigma(A) \to \mathbb{R}$ определен оператор $f(A)$, который тоже является самосопряженным. При этом (см. [8, следст. 7.7.3]) если $f \geqslant 0$, то и $f(A) \geqslant 0$. В частности (см. [8, следст. 7.7.3]), для любого $A \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$ определен оператор $A^{1/2} = \sqrt{A} \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$.

### 2.2. **Ядерные операторы на сепарабельном гильбертовом пространстве.**

**Определение 1** (см. [15, §8 гл. III], [4, п. 1 §2 гл. 11]). Компактный линейный оператор $K$ на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ называется *ядерным*, если конечна его *ядерная норма* $\|K\|_1 = \sum_{n=1}^\infty s_n(K)$, где $\{s_1(K), s_2(K), \dots\}$ — это последовательность всех собственных чисел оператора $(K^*K)^{1/2}$, взятых с учётом кратности. Множество всех ядерных операторов на $\mathscr{H}$ будем обозначать через $\mathcal{L}_1(\mathscr{H})$, множество всех самосопряжённых ядерных операторов — через $\mathcal{LS}_1(\mathscr{H})$, множество всех самосопряжённых неотрицательных ядерных операторов — через $\mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$.

Следующее предложение показывает, что $\|\cdot\|_1$ — это действительно норма.

**Предложение 1** (см. [4, теор. 6 §8 гл. 11]). *На множестве $\mathcal{L}_1(\mathscr{H})$ функционал $\|A\|_1 = \sum_{n=1}^\infty s_n(A)$ задает норму, относительно которой $\mathcal{L}_1(\mathscr{H})$ является банаховым пространством.*

Известно, что пространство $\mathcal{L}_1(\mathscr{H})$ является двусторонним идеалом в $\mathcal{L}(\mathscr{H})$:

**Предложение 2** (см. [4, п. 1 § 2 гл. 11]). *Если $B \in \mathcal{L}_1(\mathscr{H})$ и $A, C \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$, то $ABC \in \mathcal{L}_1(\mathscr{H})$, причём верно неравенство $\|ABC\|_1 \leqslant \|A\| \cdot \|B\|_1 \cdot \|C\|$.*

Верен следующий критерий ядерного оператора:

**Предложение 3** (см. [15, теор. 8.1 гл. III]). *Оператор $A \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ является ядерным тогда и только тогда, когда для любого ортонормированного базиса $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ в $\mathscr{H}$ ряд $\sum_{n=1}^\infty \langle A\varphi_n, \varphi_n\rangle$ сходится к одному и тому же числу.*

В силу этого утверждения является корректным следующее определение следа, который иногда называют *матричным следом*.

**Определение 2** (см. [15, п. 1 §8 гл. III], [4, п. 3 §2 гл. 11]). *Следом* ядерного оператора $A$ на $\mathscr{H}$ называется величина $\operatorname{tr} A = \sum_{n=1}^\infty \langle A\varphi_n, \varphi_n\rangle$, где $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — это произвольный ортонормированный базис в $\mathscr{H}$.

Оказывается, матричный след ядерного оператора совпадает с так называемым *спектральным следом*:

**Предложение 4** (см. [19], [15, теор. 8.4 гл. III]). *Пусть* $\{\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ldots\}$ *— это последовательность всех собственных чисел произвольного оператора* $A \in \mathcal{L}_1(\mathscr{H})$*, взятых с учётом кратности. Тогда выполняется равенство* $\operatorname{tr} A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A)$.

Отображение $\mathcal{L}_1(\mathscr{H}) \ni A \mapsto \operatorname{tr} A \in \mathbb{R}$, как вытекает из следующего утверждения, является непрерывным:

**Предложение 5** (см. [15, теор. 8.5 гл. III]). *Для произвольного оператора* $A \in \mathcal{L}_1(\mathscr{H})$ *выполняется неравенство* $|\operatorname{tr} A| \leqslant \|A\|_1$.

2.3. **Определители бесконечного порядка.**

**Определение 3** (см. [15, п. 1 §1 гл. IV]). Пусть $A \in \mathcal{L}_1(\mathscr{H})$. Тогда *определитель* $\det(I + A)$ задаётся формулой $\det(I + A) = \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + \lambda_n(A)\big)$, где $\{\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ldots\}$ — это последовательность всех собственных чисел оператора $A$, взятых с учётом кратности.

*Замечание* 2. Можно показать (см. [15], формула (1.2) в §1 гл. IV при $\mu = 1$), что для любого оператора $A \in \mathcal{L}_1(\mathscr{H})$ верна оценка $\big|\det(I + A)\big| \leqslant e^{\|A\|_1}$.

Понятия определителя и следа оператора связаны между собой:

**Предложение 6** (см. [15, формула (1.17) §1 гл. IV]). *Для любого оператора* $A \in \mathcal{L}_1(\mathscr{H})$*, такого что* $\|A\|_1 < 1$*, выполняется равенство*

$$\ln \det(I + A) = \operatorname{tr} \ln(I + A). \tag{2}$$

Следующее утверждение говорит о непрерывной зависимости детерминанта $\det(I + A)$ от оператора $A \in \mathcal{L}_1(\mathscr{H})$ по ядерной норме:

**Предложение 7** (см. [15, сл. 1.1 гл. IV]). *Пусть* $A_0 \in \mathcal{L}_1(\mathscr{H})$*. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся такое* $\delta > 0$*, что для каждого оператора* $A \in \mathcal{L}_1(\mathscr{H})$*, удовлетворяющего неравенству* $\|A - A_0\|_1 < \delta$*, будет выполняться оценка* $\big|\det(I + A) - \det(I + A_0)\big| < \varepsilon$.

Нам понадобится ещё одно свойство определителя:

**Предложение 8** (см. [15, свойство $5^0$ §1 гл. IV]). *Пусть* $A_1 \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ *и* $A_2$ *— компактный оператор на* $\mathscr{H}$*, причем* $A_1 A_2 \in \mathcal{L}_1(\mathscr{H})$ *и* $A_2 A_1 \in \mathcal{L}_1(\mathscr{H})$*. Тогда выполняется равенство* $\det(I + A_1 A_2) = \det(I + A_2 A_1)$.

Следующее полезное утверждение можно обосновать, практически повторив аргументы из доказательства леммы 3 в §6 главы I книги Диксмье [10], заменив при этом $\mathfrak{A}$ на $\mathcal{L}_1(\mathscr{H})$ и $\varphi$ на tr:

**Лемма 2** (ср. [10, lemme 3 §6 ch. I], [15, формула (1.16) §1 гл. IV]). *Пусть функция* $f(\lambda)$ *аналитична в некотором открытом односвязном множестве комплексной плоскости, содержащем точку* 0*,* $J$ *— замкнутая жорданова кривая, лежащая в этом множестве, и* $f(0) = 0$*. Пусть, кроме того, отображение* $t \mapsto S(t)$ *полуинтервала* $[\alpha, \beta)$ *вещественной прямой в пространство* $\mathcal{L}_1(\mathscr{H})$ *дифференцируемо в смысле ядерной нормы* $\|\cdot\|_1$ *(под дифференцируемостью в точке* $\alpha$ *понимается наличие ней правой производной). Предположим также, что для любого* $t \in [\alpha, \beta)$ *спектр оператора* $S(t)$ *лежит внутри* $J$*. Тогда отображение* $[\alpha, \beta) \ni t \mapsto f\big(S(t)\big) = (f \circ S)(t) \in \mathcal{L}_1(\mathscr{H})$ *также дифференцируемо в смысле нормы* $\|\cdot\|_1$*, и для любого* $t \in [\alpha, \beta)$ *верно равенство*

$$\operatorname{tr}\big((f \circ S)'(t)\big) = \operatorname{tr}\Big(f'\big(S(t)\big) \cdot S'(t)\Big). \tag{3}$$

Из этой леммы вытекает утверждение, которое нам тоже будет нужно:

**Предложение 9** (ср. [15, формула (1.14) §1 гл. IV]). *Пусть отображение $t \mapsto S(t)$ полуинтервала $[\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ в пространство $\mathcal{L}_1(\mathscr{H})$ дифференцируемо в смысле нормы $\|\cdot\|_1$ (под дифференцируемостью в точке $\alpha$ понимается наличие в ней правой производной). Предположим, что $\|S(t)\|_1 < 1$ при любом $t \in [\alpha, \beta)$. Тогда числовая функция $t \mapsto \det\big(I + S(t)\big)$ также дифференцируема на $[\alpha, \beta)$, и для любого $t \in [\alpha, \beta)$ выполняется равенство*

$$\frac{d}{dt}\det\big(I + S(t)\big) = \det\big(I + S(t)\big) \cdot \operatorname{tr}\Big(\big(I + S(t)\big)^{-1} S'(t)\Big). \tag{4}$$

*Доказательство.* Используя формулу (2), получим:

$$\frac{d}{dt}\det\big(I + S(t)\big) = \det\big(I + S(t)\big) \cdot \frac{d}{dt}\ln\det\big(I + S(t)\big) =$$

$$= \det\big(I + S(t)\big) \cdot \frac{d}{dt}\operatorname{tr}\ln\big(I + S(t)\big). \tag{5}$$

Докажем равенство (4) для точки $t = \alpha$. Положим $\varepsilon = (1 - \|S(\alpha)\|_1)/3 > 0$. Так как $S(t)$ дифференцируемо в точке $\alpha$ справа, то можно выбрать $\delta > 0$ настолько малым, что при всех $t \in [\alpha, \alpha + \delta)$ будем иметь $\|S(t)\|_1 < 1 - 2\varepsilon$. Применим лемму 2 для промежутка $[\alpha, \alpha + \delta)$ в случае, когда $J = \{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| = 1 - \delta\}$ и $f(\lambda) = \ln(1 + \lambda)$ . При этом $f(0) = 0$ и $f'(\lambda) = 1/(1 + \lambda)$. Тогда, в силу этой леммы, отображение $t \mapsto \ln\big(I + S(t)\big)$ также дифференцируемо в смысле нормы $\|\cdot\|_1$ в точке $\alpha$ справа, и выполняется равенство

$$\operatorname{tr}\frac{d}{dt}\ln\big(I + S(t)\big)\Big|_{t=\alpha+0} = \operatorname{tr}\Big(\big(I + S(t)\big)^{-1} \cdot S'(\alpha + 0)\Big).$$

Кроме того, поскольку отображение $A \mapsto \operatorname{tr} A$ линейно и непрерывно на $\mathcal{L}_1(\mathscr{H})$, то верно равенство

$$\frac{d}{dt}\operatorname{tr}\ln\big(I + S(t)\big)\Big|_{t=\alpha+0} = \operatorname{tr}\frac{d}{dt}\ln\big(I + S(t)\big)\Big|_{t=\alpha+0}.$$

Подставив последние два равенства в формулу (5), мы убедимся в истинности доказываемого соотношения (4) в точке $\alpha$. Для остальных точек $t \in [\alpha, \beta)$ оно доказывается аналогично. □

### 2.4. **Операторное дифференциальное уравнение Риккати.**

**Определение 4** (ср. [3, §1 chapt. 1 part IV], [18, def. 3.1]). *Операторным дифференциальным уравнением Риккати* будем называть дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$P'(t) = C + D^* P(t) + P(t) D - P(t) B P(t) \tag{6}$$

относительно оператор-функции $[0, +\infty) \ni t \mapsto P(t) \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$, где заданные операторы $B, C \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$ и $D \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ не зависят от $t$. При этом в точке $t = 0$ берется правая производная $P'(+0) = \lim_{t \to +0}\big(P(t) - P(0)\big)/t$.

Операторное дифференциальное уравнение Риккати

$$Q'(t) = B + D Q(t) + Q(t) D^* - Q(t) C Q(t)$$

называется *двойственным к уравнению* (6) (см. [3, p. 7.3 chapt. 1 part IV]).

Уравнениям Риккати и их аналогам посвящено большое число публикаций. Некоторыми авторами уравнения, аналогичные уравнению (6), изучались в случае неограниченных операторов $B$ или $D$ (см., например, работы [3], [1] и библиографию к ним), а также в случае, когда операторные коэффициенты $B$, $C$, $D$ зависят от $t$ (например, [18]). Хорошо известен следующий результат:

**Теорема 1** (см. [3, theor. 2.1 part IV], [18, theor. 8.5], [16, теор. 5.21 п. 3.5]). *Для любых операторов $B, C \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$ и $D \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ операторное дифференциальное уравнение Риккати* (6)*, где производная берется в равномерной операторной норме, имеет единственное решение $[0, +\infty) \ni t \mapsto P(t) \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$ при любом начальном условии $P_0 \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$.*

2.5. **Борелевские меры на гильбертовом пространстве и их преобразование Фурье.**

Через $\mathcal{B}_{\mathscr{H}}$ будем обозначать $\sigma$–алгебру всех борелевских подмножеств гильбертова пространства $\mathscr{H}$, через $\mathcal{M}(\mathscr{H})$ — множество всех борелевских мер в $\mathscr{H}$ (то есть счётно-аддитивных, конечных и неотрицательных мер на $\mathcal{B}_{\mathscr{H}}$).

В качестве примера напомним конструкцию меры Дирака.

*Пример* 1. Зафиксируем произвольный элемент $z \in \mathscr{H}$. Для каждого $M \in \mathcal{B}_{\mathscr{H}}$ положим: если $z \in M$, то $\delta_z(M) = 1$, иначе $\delta_z(M) = 0$. Тогда $\delta_z$ является борелевской мерой, и называется *мерой Дирака, сосредоточенной в точке $z$.*

Символом $\mathscr{B}_b(\mathscr{H}, \mathbb{C})$ обозначим пространство всех комплекснозначных борелевских ограниченных функций $f$ на $\mathscr{H}$. Это пространство является банаховым относительно нормы $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathscr{H}} |f(x)|$.

Напомним также определения среднего значения и корреляционного оператора меры.

**Определение 5** (см. [14, опр. 2.3 гл. 1], [23, §3 гл. 1]). Пусть $\mu \in \mathcal{M}(\mathscr{H})$ и для любого $x \in \mathscr{H}$ существует интеграл $\int_{\mathscr{H}} \langle y, x \rangle \, d\mu(y)$. Тогда *средним значением* меры $\mu$ будем называть такой элемент $m_\mu \in \mathscr{H}$, что $\langle m_\mu, x \rangle = \int_{\mathscr{H}} \langle y, x \rangle \, d\mu(y)$ при всех $x \in \mathscr{H}$.

**Определение 6** (см. [23, §3 гл. 1]). Пусть $\mu \in \mathcal{M}(\mathscr{H})$ и для любых $x, y \in \mathscr{H}$ существует интеграл $\int_{\mathscr{H}} \langle z - m_\mu, x \rangle \langle z - m_\mu, y \rangle \, d\mu(z)$. Тогда *корреляционным оператором* меры $\mu$ будем называть такой оператор $K_\mu \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$, что при всех $x, y \in \mathscr{H}$ верно равенство $\langle K_\mu x, y \rangle = \int_{\mathscr{H}} \langle z - m_\mu, x \rangle \langle z - m_\mu, y \rangle \, d\mu(z)$.

Нам понадобится также понятие образа меры при отображении:

**Определение 7** (ср. [7, п. 3.6]). Пусть $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_1$ — гильбертовы пространства и отображение $F\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}_1$ является борелевским. Тогда для всякой меры $\mu \in \mathcal{M}(\mathscr{H})$ формула

$$\big(\mu \circ F^{-1}\big)(M) = \mu\big(F^{-1}(M)\big), \quad M \in \mathcal{B}(\mathscr{H}_1)$$

задает борелевскую меру $\mu \circ F^{-1}$ в $\mathscr{H}_1$, называемую *образом меры $\mu$ при отображении $F$*, а также *индуцированной мерой.*

Верно следующее утверждение о замене переменных в интеграле:

**Предложение 10** (см. [7, теор. 3.6.1]). *Пусть $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_1$ — гильбертовы пространства, $\mu$ — борелевская мера в $\mathscr{H}$, и отображение $F\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}_1$ является борелевским. Тогда функция $g\colon \mathscr{H}_1 \to \mathbb{C}$ интегрируема на $\mathscr{H}_1$ относительно* *меры $\mu \circ F^{-1}$ в точности тогда, когда функция $g \circ F\colon \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ интегрируема на $\mathscr{H}$ относительно меры $\mu$. При этом верна следующая формула замены переменных:*

$$\int_{\mathscr{H}_1} g(y)\big(\mu \circ F^{-1}\big)(dy) = \int_{\mathscr{H}} g(F(x))\mu(dx). \tag{7}$$

Переходя к определению преобразования Фурье меры (см., например, [2, п. 6.2]), заметим, что иногда его называют характеристическим функционалом меры (например, в книгах [14] и [23]).

**Определение 8** (см. [14, опр. 2.5 гл. 1], [23, §3 гл. 1])**.** *Преобразованием Фурье* меры $\mu \in \mathcal{M}(\mathscr{H})$ будем называть функцию $\mathscr{F}[\mu] = \widetilde{\mu}\colon \mathscr{H} \to \mathbb{C}$, для каждого $y \in \mathscr{H}$ задаваемую равенством $\mathscr{F}[\mu](y) = \widetilde{\mu}(y) = \int_{\mathscr{H}} e^{i\langle x,y\rangle} d\mu(x)$.

*Пример* 2. В частном случае, когда $\mathscr{H} = \mathbb{R}^n$ и мера $\mu$ имеет плотность $\rho$ относительно $n$–мерной меры Лебега $\lambda_n$, преобразование Фурье $\widetilde{\mu}(y)$ в точке $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ можно записать в виде

$$\widetilde{\mu}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,y\rangle} \rho(x)\, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)} \rho(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

**Предложение 11** (см. [23, §3 гл. 1])**.** *Любая борелевская мера в гильбертовом пространстве однозначно определяется своим преобразованием Фурье.*

2.6. **Гауссовские меры в гильбертовом пространстве.**

Имеются различные эквивалентные варианты определения гауссовских мер в гильбертовом пространстве (см., например, [23, §5 гл. 1], [14, опр. 2.6 гл. 1]). Мы введем понятие гауссовской меры в два этапа, как это сделано в книге [6]: сначала для вещественной прямой, затем для гильбертового пространства.

**Определение 9** (ср. [6, опр. 1.1.1])**.** Борелевская мера $\gamma$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$ называется *гауссовской мерой с параметрами $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma \in [0, +\infty)$*, если либо $\sigma = 0$ и $\gamma$ является мерой Дирака $\delta_a$, сосредоточенной в точке $a$ (см. пример 1), либо $\sigma > 0$ и $\gamma$ имеет относительно меры Лебега плотность

$$\rho_\gamma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\Big\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \Big\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Определение 10** (ср. [6, опр. 2.1.5 (ii)], [14, опр. 2.6 гл. 1])**.** Борелевская мера $\mu$ на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ называется *гауссовской мерой*, если для всякого функционала $\varphi \in \mathscr{H}^*$ индуцированная мера $\mu \circ \varphi^{-1}$ на $\mathbb{R}$ является гауссовской (в смысле определения 9).

Свойство меры быть гауссовской можно также выразить в терминах её преобразования Фурье:

**Теорема 2** (см. [6, теор. 2.2.1], [14, опр. 2.3 гл. 1])**.** *Борелевская мера $\mu$ на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ является гауссовской тогда и только тогда, когда её преобразование Фурье имеет вид*

$$\widetilde{\mu}(y) = \exp\Big\{ i\langle m, y\rangle - \frac{1}{2}\langle Ky, y\rangle \Big\}, \quad y \in \mathscr{H}, \tag{8}$$

*где $m \in \mathscr{H}$, $K \in \mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$. При этом $m$ является средним значением меры $\mu$, и $K$ является её корреляционным оператором.*

Всюду далее гауссовскую меру с корреляционным оператором $K \in \mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$ и средним значением $m \in \mathscr{H}$ будем обозначать символом $\Gamma_{K,m}$.

Хотя результат, содержащийся в следующем предложении, наверняка известен, для полноты изложения приводим его с полным доказательством.

**Предложение 12** (ср. [9, п. $2^0$ §2 гл. 2], [6, лемма 2.1.6])**.** *Пусть $F \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ и $\Gamma_{K,m}$ — гауссовская мера на $\mathscr{H}$. Тогда мера $\Gamma_{K,m} \circ F^{-1}$ также является гауссовской и имеет корреляционный оператор $FKF^*$ и среднее значение $Fm$, то есть $\Gamma_{K,m} \circ F^{-1} = \Gamma_{FKF^*,Fm}$.*

*Доказательство.* В силу предложения 11 достаточно вычислить преобразование Фурье меры $\Gamma_{K,m} \circ F^{-1}$ и показать, что оно совпадает с преобразованием Фурье меры $\Gamma_{FKF^*,Fm}$. Согласно определению 8 и формуле замены переменных (7) при любом $y \in \mathscr{H}$ имеем:

$$\mathscr{F}\big[\Gamma_{K,m} \circ F^{-1}\big](y) = \int_{\mathscr{H}} e^{i\langle x,y\rangle}\big(\Gamma_{K,m} \circ F^{-1}\big)(dx) =$$
$$= \int_{\mathscr{H}} e^{i\langle Fz,y\rangle}\Gamma_{K,m}(dz) = \int_{\mathscr{H}} e^{i\langle z,F^*y\rangle}\Gamma_{K,m}(dz) = \mathscr{F}[\Gamma_{K,m}](F^*y).$$

Отсюда, применяя формулу (8) из теоремы 2 в случае $\mu = \Gamma_{K,m}$, получаем:

$$\mathscr{F}\big[\Gamma_{K,m} \circ F^{-1}\big](y) = \exp\Big\{i\langle m, F^*y\rangle - \frac{1}{2}\langle KF^*y, F^*y\rangle\Big\} =$$
$$= \exp\Big\{i\langle Fm, y\rangle - \frac{1}{2}\langle FKF^*y, y\rangle\Big\} = \mathscr{F}[\Gamma_{FKF^*,Fm}](y).$$

Итак, преобразования Фурье мер $\Gamma_{K,m} \circ F^{-1}$ и $\Gamma_{FKF^*,Fm}$ равны. Поэтому, в силу предложения 11, и сами эти меры равны. □

Следующее предложение понадобится нам для доказательства теоремы 3.

**Предложение 13.** *Пусть даны произвольные вектора $b, m \in \mathscr{H}$ и операторы $A \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$, $K \in \mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$. Тогда имеет место равенство*

$$(9) \quad \int_{\mathscr{H}} \exp\Big\{i\langle y,b\rangle - \frac{1}{2}\langle Ay,y\rangle\Big\}\Gamma_{K,m}(dy) = \det{}^{-1/2}(I + KA)\cdot$$
$$\cdot \exp\Big\{i\big\langle (I+KA)^{-1}m, b\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle (I+KA)^{-1}Kb, b\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle A(I+KA)^{-1}m, m\big\rangle\Big\}.$$

*Доказательство.* Доказательство проведем в три этапа: сначала для случая $A = I$, затем для обратимого оператора $A$, и далее в общем случае.

1) В случае $A = I$, взяв $\varepsilon = 1$, проведём рассуждения, аналогичные приведенным А.В. Скороходом [23, §5] в примере вычисления при $\varepsilon > 0$ интеграла вида $\int_{\mathscr{H}} \exp\{\langle y,b\rangle - \varepsilon\langle y,y\rangle\}\Gamma_{K,m}(dy)$.

Так как $K \in \mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$, то, в силу теоремы Гильберта–Шмидта (см., например, [8, теор. 7.5.1]), в $\mathscr{H}$ существует ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, состоящий из собственных векторов оператора $K$, соответствующих неотрицательным собственным значениям $\{\varkappa_n\}_{n=1}^\infty$. При каждом $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathscr{H}_n$ одномерное подпространство в $\mathscr{H}$, натянутое на $e_n$, через $\gamma_n$ — проекцию меры $\Gamma_{K,m}$ на $\mathscr{H}_n$, и через $x_n$, $y_n$, $m_n$ — проекции на $\mathscr{H}_n$ векторов $x$, $y$, $m$ соответственно. Тогда $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$, $y = \sum_{n=1}^\infty y_n e_n$, $m = \sum_{n=1}^\infty m_n e_n$. Поэтому верно равенство

$$\int_{\mathscr{H}} \exp\Big\{i\langle y, b\rangle - \frac{1}{2}\langle y, y\rangle\Big\}\Gamma_{K,m}(dy) = \prod_{n=1}^{\infty}\int_{\mathscr{H}_n} \exp\Big\{iy_n b_n - \frac{1}{2}y_n^2\Big\}\gamma_n(dy_n). \tag{10}$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ мера $\gamma_n$ на прямой $\mathscr{H}_n$ является гауссовской со средним значением $m_n$ и корреляцией $\varkappa_n$. Поэтому при $\varkappa_n > 0$ по определению 9 имеем:

$$\int_{\mathscr{H}_n} \exp\Big\{iy_n b_n - \frac{1}{2}y_n^2\Big\}\gamma_n(dy_n) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varkappa_n}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{iy_n b_n - \frac{1}{2}y_n^2 - \frac{(y_n - m_n)^2}{2\varkappa_n}\Big\}\, dy_n = \\ = \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa_n}} \exp\Big\{\frac{im_n b_n}{1+\varkappa_n} - \frac{m_n^2}{2(1+\varkappa_n)} - \frac{\varkappa_n b_n^2}{2(1+\varkappa_n)}\Big\}.$$

Если же $\varkappa_n = 0$, то $\gamma_n = \delta_{m_n}$. Следовательно, в этом случае равенство

$$\int_{\mathscr{H}_n} \exp\Big\{iy_n b_n - \frac{1}{2}y_n^2\Big\}\gamma_n(dy_n) = \\ = \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa_n}} \exp\Big\{\frac{im_n b_n}{1+\varkappa_n} - \frac{m_n^2}{2(1+\varkappa_n)} - \frac{\varkappa_n b_n^2}{2(1+\varkappa_n)}\Big\}$$

также верно при каждом $n \in \mathbb{N}$. Подставляя все эти равенства в правую часть формулы (10), получим:

$$\int_{\mathscr{H}} \exp\Big\{i\langle y, b\rangle - \frac{1}{2}\langle y, y\rangle\Big\}\Gamma_{K,m}(dy) = \\ = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa_n}} \exp\Big\{\frac{im_n b_n}{1+\varkappa_n} - \frac{m_n^2}{2(1+\varkappa_n)} - \frac{\varkappa_n b_n^2}{2(1+\varkappa_n)}\Big\} = \frac{1}{\sqrt{\det(I+K)}}\cdot \\ \cdot \exp\Big\{i\big\langle (I+K)^{-1}m, b\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle (I+K)^{-1}m, m\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle (I+K)^{-1}Kb, b\big\rangle\Big\}. \tag{11}$$

2) В случае, когда $A$ имеет ограниченный обратный $A^{-1} \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$, в силу замечания 1 определены операторы $A^{1/2}$ и $A^{-1/2} = (A^{-1})^{1/2}$ из класса $\mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$. Сделаем в интеграле $\int_{\mathscr{H}} \exp\big\{i\langle y, b\rangle - \frac{1}{2}\langle Ay, y\rangle\big\}\Gamma_{K,m}(dy)$ замену переменных (см. предложение 10), положив $y = A^{-1/2}x$, а затем применим предложение 12. В итоге получим:

$$\int_{\mathscr{H}} \exp\Big\{i\langle y, b\rangle - \frac{1}{2}\langle Ay, y\rangle\Big\}\Gamma_{K,m}(dy) = \\ = \int_{\mathscr{H}} \exp\Big\{i\langle A^{-1/2}x, b\rangle - \frac{1}{2}\langle x, x\rangle\Big\}\big(\Gamma_{K,m}\circ A^{-1/2}\big)(dx) = \\ = \int_{\mathscr{H}} \exp\Big\{i\langle A^{-1/2}b, x\rangle - \frac{1}{2}\langle x, x\rangle\Big\}\Gamma_{A^{1/2}KA^{1/2}, A^{1/2}m}(dx). \tag{12}$$

Отсюда, с учетом формулы (11), находим искомое значение интеграла:

$$(13)\quad \int_{\mathscr{H}} \exp\Big\{i\langle y,b\rangle - \frac{1}{2}\langle Ay,y\rangle\Big\}\Gamma_{K,m}(dy) =$$

$$= \det{}^{-1/2}\left(I + A^{1/2}KA^{1/2}\right)\cdot \exp\Big\{i\big\langle (I + A^{1/2}KA^{1/2})^{-1}A^{1/2}m, A^{-1/2}b\big\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\big\langle (I+A^{1/2}KA^{1/2})^{-1}A^{1/2}m, A^{1/2}m\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle (I+A^{1/2}KA^{1/2})^{-1}A^{1/2}Kb, A^{-1/2}b\big\rangle\Big\}.$$

Несколько упростим полученное выражение. Если в предложении 8 положить $A_1 = A^{1/2}$ и $A_2 = KA^{1/2}$, то из него получим равенство

$$\det(I + A^{1/2}KA^{1/2}) = \det(I + A_1A_2) = \det(I + A_2A_1) = \det(I + KA).$$

При этом из пункта 1 леммы 1 следует, что

$$\left(I + A^{1/2}KA^{1/2}\right)^{-1}A^{1/2} = (I + A_1A_2)^{-1}A = A(I + A_2A_1)^{-1} = A^{1/2}(I + KA)^{-1}.$$

Учитывая эти результаты и равенство $(A^{1/2})^* = A^{1/2}$, формулу (13) можно упростить следующим образом:

$$\int_{\mathscr{H}} \exp\Big\{i\langle y,b\rangle - \frac{1}{2}\langle Ay,y\rangle\Big\}\Gamma_{K,m}(dy) = \det{}^{-1/2}(I + KA)\cdot$$

$$\cdot \exp\Big\{i\big\langle A^{1/2}(I + KA)^{-1}m, A^{-1/2}b\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle A^{1/2}(I + KA)^{-1}m, A^{1/2}m\big\rangle -$$

$$- \frac{1}{2}\big\langle A^{1/2}(I + KA)^{-1}Kb, A^{-1/2}b\big\rangle\Big\} = \det{}^{-1/2}(I + KA)\cdot$$

$$\cdot \exp\Big\{i\big\langle (I + KA)^{-1}m, b\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle A(I + KA)^{-1}m, m\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle (I + KA)^{-1}Kb, b\big\rangle\Big\}.$$

3) В общем случае, когда оператор $A \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$ не обязательно обратим, для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $A_n = A + I/n$. Тогда операторы $A_n \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$ имеют ограниченные обратные, и верны формулы, доказанные в пункте 2):

$$(14)\quad \int_{\mathscr{H}} \exp\Big\{i\langle y,b\rangle - \frac{1}{2}\langle A_ny,y\rangle\Big\}\Gamma_{K,m}(dy) = \det{}^{-1/2}(I + KA_n)\cdot$$

$$\cdot \exp\Big\{i\big\langle (I+KA_n)^{-1}m, b\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle A_n(I+KA_n)^{-1}m, m\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle (I+KA_n)^{-1}Kb, b\big\rangle\Big\}.$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} KA_n = KA$ в ядерной операторной норме, то верны равенства $\lim_{n\to\infty}(I+KA_n)^{-1} = (I+KA)^{-1}$ в равномерной операторной норме, и, в силу предложения 7, $\lim_{n\to\infty}\det(I+KA_n) = \det(I+KA)$. Поэтому, переходя в формуле (14) к пределу при $n \to \infty$, получим доказываемое равенство (9). $\square$

## 3. Гауссовские полугруппы и их связь с уравнением Риккати

В данном параграфе содержатся основные результаты нашей работы (теоремы 3, 4, 5 и примеры 4, 5, 6, 7). В его первой части мы сначала даём определения гауссовского семейства мер (определение 12) и гауссовской полугруппы операторов на $\mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$ (определение 13 и равенство (17)). Затем в теореме 3 находим необходимые и достаточные условия на функции $h(t)$, $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$, при выполнении которых семейство операторов $(G_t)_{t\geqslant 0}$, задаваемое формулой (17), действительно образует полугруппу. Эти условия представлены в виде системы функциональных уравнений (20) и начальных условий (21) для $h(t)$, $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$. Далее в теореме 4 из функциональных уравнений (20) выведена система обыкновенных дифференциальных уравнений (28). В теореме 5 доказано, что задача Коши для этой системы имеет единственное решение. В примерах 4, 5, 6, 7 эта задача Коши решена для четырех частных случаев ($\dim \mathscr{H} = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$), что даёт четыре примера гауссовских полугрупп.

### 3.1. Гауссовские полугруппы операторов на пространстве ограниченных борелевских функций.

**Определение 11** (ср. [6, опр. A.2.17], [8, опр. 10.5.1])**.** Напомним, что семейство $(G_t)_{t\geqslant 0}$ ограниченных операторов на пространстве $\mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$ называется *полугруппой*, если выполнены следующие два условия:

(S0) $G_0 f = f$ для любой $f \in \mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$, то есть $G_0 = I$ — единичный оператор на $\mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$;

(S1) имеет место полугрупповое свойство $G_s(G_t f) = G_{t+s} f$, то есть выполняется равенство $G_s \circ G_t = G_{t+s}$, каковы бы ни были $t, s \geqslant 0$ и $f \in \mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$.

**Определение 12.** Семейство $\{\mu_{t,x} \mid t \geqslant 0, x \in \mathscr{H}\}$ борелевских мер в $\mathscr{H}$ назовём *гауссовским*, если при любых $t \geqslant 0$ и $x \in \mathscr{H}$ мера $\mu_{t,x}$ имеет вид

$$\mu_{t,x} = h(t) \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\big\langle P(t)x, x\big\rangle\Big\}\Gamma_{Q(t),R(t)x}, \tag{15}$$

где $h(t) \in [0, +\infty)$, $P(t) \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$, $Q(t) \in \mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$ и $R(t) \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$.

**Определение 13.** Будем говорить, что некоторое гауссовское семейство мер $\{\mu_{t,x} \mid t \geqslant 0, x \in \mathscr{H}\}$ задаёт полугруппу $(G_t)_{t\geqslant 0}$ операторов на пространстве $\mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$, если для любых $t \geqslant 0$ и $f \in \mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$ выполняется равенство

$$(G_t f)(x) = \int_{\mathscr{H}} f(y)\, \mu_{t,x}(dy). \tag{16}$$

Полугруппу $(G_t)_{t\geqslant 0}$ при этом тоже будем называть *гауссовской*.

*Замечание* 3. Пусть при каждом $t \geqslant 0$ отображение $G_t$ на $\mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$ задаётся равенством (16), где меры $\mu_{t,x}$ удовлетворяют условиям определения 12. Тогда при любом $f \in \mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$ верно включение $G_t f \in \mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$ и выполняется неравенство $\|G_t f\|_\infty \leqslant h(t)\|f\|_\infty$, поэтому $G_t$ является ограниченным оператором на пространстве $\mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$. Это вытекает из цепочки равенств

$$\begin{aligned}(G_t f)(x) &= \int_{\mathscr{H}} f(y)\, \mu_{t,x}(dy) = \\ &= \int_{\mathscr{H}} f(y)\, h(t) \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\big\langle P(t)x, x\big\rangle\Big\}\Gamma_{Q(t),R(t)x}(dy) = \\ &= h(t) \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\big\langle P(t)x, x\big\rangle\Big\} \int_{\mathscr{H}} f\big(z + R(t)x\big)\, \Gamma_{Q(t),0}(dz),\end{aligned} \tag{17}$$

а также из неравенства

$$\big|(G_t f)(x)\big| \leqslant h(t) \int_{\mathscr{H}} \big|f\big(z + R(t)x\big)\big|\, \Gamma_{Q(t),0}(dz) \leqslant h(t) \sup_{y\in\mathscr{H}} |f(y)| = h(t)\|f\|_\infty.$$

*Пример* 3. Частным случаем гауссовских полугрупп являются, например, полугруппы Орнштейна–Уленбека $(T_t)_{t\geqslant 0}$, заданные в [6, формула (2.8.29)] при каждом $t \geqslant 0$ с помощью равенства

$$(T_t f)(x) = \int_{\mathscr{H}} f\Big(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}\,y\Big)\Gamma_{K,0}(dy),$$

где $K \in \mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$. Действительно, сделаем в данном интеграле замену переменных $z = F(y) = \sqrt{1-e^{-2t}}y$ (см. предложение 10). Поскольку при этом $F^* = F = \sqrt{1-e^{-2t}}I$, то, в силу предложения 12, получим:

(18)
$$(T_t f)(x) = \int_{\mathscr{H}} f\big(e^{-t}x + F(y)\big)\Gamma_{K,0}(dy) = \int_{\mathscr{H}} f(e^{-t}x + z)\big(\Gamma_{K,0}\circ F^{-1}\big)(dz) = \\ = \int_{\mathscr{H}} f(e^{-t}x+z)\Gamma_{FKF^*,0}(dz) = \int_{\mathscr{H}} f(y)\Gamma_{Q(t),R(t)x}(dy),$$

где $Q(t) = (1-e^{-2t})K$ и $R(t) = e^{-t}I$ при всех $t \geqslant 0$.

Следующая теорема показывает, при каких условиях на $h(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ и $R(t)$ гауссовское семейство мер (15) задает полугруппу:

**Теорема 3.** *Гауссовское семейство мер*

$$\mu_{t,x} = h(t)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\big\langle P(t)x,x\big\rangle\Big\}\Gamma_{Q(t),R(t)x}, \quad t \geqslant 0, x \in \mathscr{H} \tag{19}$$

*задает полугруппу операторов на пространстве* $\mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$ *тогда и только тогда, когда* $h(t)$ *и* $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ *при всех* $t,s \geqslant 0$ *удовлетворяют системе функциональных уравнений*

$$\begin{cases} h(t+s) = h(t)h(s)\det{}^{-1/2}\big(I+Q(s)P(t)\big) \\ P(t+s) = P(s) + R^*(s)P(t)\big(I+Q(s)P(t)\big)^{-1}R(s) \\ Q(t+s) = Q(t) + R(t)\big(I+Q(s)P(t)\big)^{-1}Q(s)R^*(t) \\ R(t+s) = R(t)\big(I+Q(s)P(t)\big)^{-1}R(s), \end{cases} \tag{20}$$

*а также системе начальных условий*

$$\big\{h(0)=1,\ P(0)=0,\ Q(0)=0,\ R(0)=I\big\}. \tag{21}$$

*Доказательство.* В силу определений 11 и 13 нужно доказать, что операторы

$$\begin{aligned}(G_t f)(x) &= \int_{\mathscr{H}} f(y)\,\mu_{t,x}(dy) = \\ &= h(t)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\big\langle P(t)x,x\big\rangle\Big\}\int_{\mathscr{H}} f(y)\Gamma_{Q(t),R(t)x}(dy)\end{aligned} \tag{22}$$

на пространстве $\mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$ удовлетворяют условиям (S0) и (S1) из определения 11 тогда и только тогда, когда $h(t)$, $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ удовлетворяют системе (20) и начальным условиям (21).

1) Покажем, что условие (S0) равносильно набору условий (21).

При $t=0$ в силу формулы (22) имеем: $(G_0 f)(x) = \int_{\mathscr{H}} f(y)\,\mu_{0,x}(dy)$. Поэтому условие (S0) равносильно равенству $\int_{\mathscr{H}} f(y)\,\mu_{0,x}(dy) = f(x) = \int_{\mathscr{H}} f(y)\,\delta_x(dy)$ при всех $f \in \mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$, $x \in \mathscr{H}$. Это равенство, в силу предложения 11, эквивалентно тому, что $\int_{\mathscr{H}} e^{i\langle z,y\rangle}\mu_{0,x}(dy) = e^{i\langle z,x\rangle} = \int_{\mathscr{H}} e^{i\langle z,y\rangle}\,\delta_x(dy)$ при всех $x,z \in \mathscr{H}$. Последнее условие, согласно формулам (19) и (8), можно записать в виде равенства

$$h(0)\exp\Big\{i\langle R(0)x,z\rangle - \frac{1}{2}\langle P(0)x,x\rangle - \frac{1}{2}\langle Q(0)z,z\rangle\Big\} = \exp\{i\langle x,z\rangle\}.$$

Поскольку в этом равенстве операторы $P(0)$ и $Q(0)$ симметричны, а вектора $x,z\in\mathscr{H}$ произвольны, то оно, а значит и условие (S0), равносильно набору начальных условий (21).

2) Покажем, что условие (S1) равносильно системе функциональных уравнений (20). Сначала при любых $t,s\geqslant 0$ вычислим композицию $G_s\circ G_t$. В силу формулы (22) при всех $f\in\mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$, $x\in\mathscr{H}$ имеем:

$$\begin{aligned}\big(G_s(G_tf)\big)(x)&=\int_{\mathscr{H}}\Big(\int_{\mathscr{H}}f(z)\,\mu_{t,y}(dz)\Big)\mu_{s,x}(dy)=\\&=\int_{\mathscr{H}}\Big(\int_{\mathscr{H}}f(z)h(t)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\big\langle P(t)y,y\big\rangle\Big\}\Gamma_{Q(t),R(t)y}(dz)\Big)\cdot\\&\quad\cdot h(s)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\big\langle P(s)x,x\big\rangle\Big\}\Gamma_{Q(s),R(s)x}(dy)=\int_{\mathscr{H}}f(z)\nu_{t,s,x}(dz),\end{aligned}$$

где $\nu_{t,s,x}$ — борелевская мера в $\mathscr{H}$, на каждом множестве $M\in\mathcal{B}_{\mathscr{H}}$ задаваемая равенством

$$\begin{aligned}\nu_{t,s,x}(M)=\big(G_s(G_tI_M)\big)(x)&=\int_{\mathscr{H}}\mu_{t,y}(M)\mu_{s,x}(dy)=\\&=\int_{\mathscr{H}}h(t)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\big\langle P(t)y,y\big\rangle\Big\}\Gamma_{Q(t),R(t)y}(M)\cdot\\&\quad\cdot h(s)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\big\langle P(s)x,x\big\rangle\Big\}\Gamma_{Q(s),R(s)x}(dy),\end{aligned}$$

где через $I_M$ обозначена индикаторная функция множества $M$: если $x\in M$, то $I_M(x)=1$, иначе $I_M(x)=0$.

С другой стороны, из формулы (22) вытекает равенство

$$(G_{t+s}f)(x)=\int_{\mathscr{H}}f(z)\,\mu_{t+s,x}(dz).$$

Таким образом, истинность равенства $G_s(G_tf)=G_{t+s}f$ при любых $t,s\geqslant 0$ и $f\in\mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$ равносильна тому, что при всех $t,s\geqslant 0$ и $x\in\mathscr{H}$ верно равенство $\nu_{t,s,x}=\mu_{t+s,x}$. В свою очередь это равенство, поскольку мера однозначно определяется своим преобразованием Фурье (см. предложение 11), эквивалентно тому, что $\widetilde{\nu_{t,s,x}}(\varphi)=\widetilde{\mu_{t+s,x}}(\varphi)$ при всех $t,s\geqslant 0$ и $x,\varphi\in\mathscr{H}$. Поэтому далее вычислим сначала функцию $\widetilde{\mu_{t+s,x}}(\varphi)$, потом $\widetilde{\nu_{t,s,x}}(\varphi)$, и затем приравняем их.

Для $\widetilde{\mu_{t+s,x}}(\varphi)$, в силу формул (19) и (8), имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu_{t+s,x}}(\varphi)&=h(t+s)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\big\langle P(t+s)x,x\big\rangle\Big\}\mathscr{F}[\Gamma_{Q(t+s),R(t+s)x}](\varphi)=\\&=h(t+s)\exp\Big\{i\big\langle R(t+s)x,\varphi\big\rangle-\frac{1}{2}\big\langle P(t+s)x,x\big\rangle-\frac{1}{2}\big\langle Q(t+s)\varphi,\varphi\big\rangle\Big\}.\end{aligned}\tag{23}$$

Для $\widetilde{\nu_{t,s,x}}(\varphi)$, согласно формулам (19) и (8), получаем такое выражение:

$$\begin{aligned}(24)\quad \widetilde{\nu_{t,s,x}}(\varphi) &= \int_{\mathscr{H}} \Big( \int_{\mathscr{H}} \exp\{i\langle z,\varphi\rangle\} h(t) \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\big\langle P(t)y,y\big\rangle\Big\} \cdot \\ &\cdot \Gamma_{Q(t),R(t)y}(dz)\Big) h(s) \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\big\langle P(s)x,x\big\rangle\Big\} \Gamma_{Q(s),R(s)x}(dy) = \\ &= \int_{\mathscr{H}} h(t) \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\big\langle P(t)y,y\big\rangle\Big\} \mathscr{F}[\Gamma_{Q(t),R(t)y}](\varphi) \cdot \\ &\cdot h(s) \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\big\langle P(s)x,x\big\rangle\Big\} \Gamma_{Q(s),R(s)x}(dy).\end{aligned}$$

Так как $\mathscr{F}[\Gamma_{Q(t),R(t)y}](\varphi) = \exp\Big\{ i\langle R(t)y,\varphi\rangle - \frac{1}{2}\big\langle Q(t)\varphi,\varphi\big\rangle\Big\}$ по теореме 2, то

$$\begin{aligned}(25)\quad \widetilde{\nu_{t,s,x}}(\varphi) &= \int_{\mathscr{H}} h(t) \exp\Big\{ i\langle R(t)y,\varphi\rangle - \frac{1}{2}\big\langle P(t)y,y\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle Q(t)\varphi,\varphi\big\rangle\Big\} \cdot \\ &\cdot h(s) \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\big\langle P(s)x,x\big\rangle\Big\} \Gamma_{Q(s),R(s)x}(dy) = \\ &= h(t)h(s) \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\big\langle P(s)x,x\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle Q(t)\varphi,\varphi\big\rangle\Big\} \cdot \\ &\cdot \int_{\mathscr{H}} \exp\Big\{ i\langle y, R^*(t)\varphi\rangle - \frac{1}{2}\big\langle P(t)y,y\big\rangle\Big\} \Gamma_{Q(t),R(t)x}(dy).\end{aligned}$$

Далее для вычисления оставшегося интеграла воспользуемся равенством (9) из предложения 13 в случае, когда $A = P(t)$, $b = R^*(t)\varphi$, $K = Q(s)$, $m = R(s)x$. Введя для краткости обозначение $V(s,t) = \big(I + Q(s)P(t)\big)^{-1}$, получим:

$$\begin{aligned}(26)\quad & \int_{\mathscr{H}} \exp\{ i\langle y, R^*(t)\varphi\rangle - \frac{1}{2}\big\langle P(t)y,y\big\rangle\Big\} \Gamma_{Q(s),R(s)x}(dy) = \\ &= \det{}^{-1/2}(I + Q(s)P(t)) \cdot \exp\Big\{ i\big\langle V(s,t)R(s)x, R^*(t)\varphi\big\rangle - \\ &- \frac{1}{2}\big\langle V(s,t)Q(s)R^*(t)\varphi, R^*(t)\varphi\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle P(t)V(s,t)R(s)x, R(s)x\big\rangle\Big\}.\end{aligned}$$

Подставляя эту формулу в (25), приходим к окончательному выражению для функции $\widetilde{\nu_{t,s,x}}(\varphi)$:

$$\begin{aligned}(27)\quad \widetilde{\nu_{t,s,x}}(\varphi) &= h(t)h(s)\det{}^{1/2} V(s,t) \cdot \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\big\langle P(s)x,x\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle Q(t)\varphi,\varphi\big\rangle + \\ &+ i\big\langle R(t)V(s,t)R(s)x,\varphi\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle R(t)V(s,t)Q(s)R^*(t)\varphi,\varphi\big\rangle - \\ &- \frac{1}{2}\big\langle R^*(s)P(t)V(s,t)R(s)x,x\big\rangle\Big\} = \\ &= h(t)h(s)\det{}^{1/2} V(s,t) \cdot \exp\Big\{ i\big\langle R(t)V(s,t)R(s)x,\varphi\big\rangle - \\ &- \frac{1}{2}\big\langle \big(Q(t) + R(t)V(s,t)Q(s)R^*(t)\big)\varphi,\varphi\big\rangle\Big\}.\end{aligned}$$

Заметим, что операторы $R^*(s)P(t)V(s,t)R(s)$ и $R(t)V(s,t)Q(s)R^*(t)$, в силу леммы 1, являются самосопряженными. Учитывая это и приравнивая выражения в правых частях формул (23) и (27), приходим к выводу, что равенство $\widetilde{\mu_{t+s,x}}(\varphi) = \widetilde{\nu_{t,s,x}}(\varphi)$, а значит и равенство $G_{t+s} = G_s \circ G_t$, равносильно системе (20). Теорема доказана. □

**Теорема 4.** *Пусть гауссовское семейство мер*

$$\mu_{t,x} = h(t)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\big\langle P(t)x,x\big\rangle\Big\}\Gamma_{Q(t),R(t)x}, \quad t \geqslant 0, x \in \mathscr{H}$$

*задает полугруппу операторов на $\mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$. Предположим, что функция $h(t)$ дифференцируема при $t > 0$ и имеет конечную правую производную $a = h'(+0)$. Предположим также, что в ядерной норме оператор-функция $Q(t)$ дифференцируема при $t > 0$ и имеет ограниченную правую производную $B = Q'(+0)$, и в равномерной операторной норме оператор–функции $P(t)$, $R(t)$ дифференцируемы при $t > 0$ и имеют ограниченные правые производные $C = P'(+0)$, $D = R'(+0)$ соответственно. Тогда $a \in \mathbb{R}$, $B \in LS_1^+(\mathscr{H})$, $C \in LS^+(\mathscr{H})$, $D \in L(\mathscr{H})$ и функции $h(t)$, $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ при всех $t \geqslant 0$ дают решение задачи Коши*

$$\begin{cases} h'(t) = \Big(a - \dfrac{1}{2}\operatorname{tr}\big(BP(t)\big)\Big)h(t) \\ P'(t) = C + D^*P(t) + P(t)D - P(t)BP(t) \\ Q'(t) = R(t)BR^*(t) \\ R'(t) = R(t)\big(D - BP(t)\big), \end{cases} \qquad \begin{cases} h(0) = 1 \\ P(0) = 0 \\ Q(0) = 0 \\ R(0) = I. \end{cases} \tag{28}$$

*Доказательство.* Из предложения 9 и начальных условий (21) следует, что

$$\Big(\det\big(I + Q(s)P(t)\big)\Big)'_s\Big|_{s=+0} = \det\big(I + Q(0)P(t)\big)\cdot\operatorname{tr}\big(Q'(+0)P(t)\big) = \operatorname{tr}\big(BP(t)\big).$$

Отсюда, дифференцируя равенство $h(t+s) = h(t)h(s)\det^{-1/2}\big(I + Q(s)P(t)\big)$, первое в системе (20), и учитывая (21), находим:

$$h'(t) = \big(h(t+s)\big)'_s\big|_{s=+0} = h(t)h'(+0)\det^{-1/2}\big(I + Q(0)P(t)\big) -$$
$$-h(t)h(0)\cdot\frac{1}{2}\det^{-3/2}\big(I + Q(0)P(t)\big)\cdot\Big(\det\big(I + Q(s)P(t)\big)\Big)'_s\Big|_{s=+0} =$$
$$= h(t)\Big(a - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\big(BP(t)\big)\Big).$$

Снова введём обозначение $V(s,t) = \big(I + Q(s)P(t)\big)^{-1}$. Тогда $V(0,t) = I$ при всех $t \geqslant 0$. Кроме того, из пункта 1 леммы 1 при $A_1 = P(t)$, $A_2 = Q(s)$ получим:

$$V(s,t) = \big(I + Q(s)P(t)\big)^{-1} = I - Q(s)\big(I + P(t)Q(s)\big)^{-1}P(t).$$

Поэтому, учитывая начальное условие $Q(0) = 0$, найдём:

$$\big(V(s,t)\big)'_s\big|_{s=+0} = -\lim_{s\to+0}\frac{Q(s)}{s}\big(I + P(t)Q(s)\big)^{-1}P(t) = -Q'(+0)P(t) = -BP(t).$$

Далее, записав в виде $P(t+s) = P(s) + R^*(s)P(t)V(s,t)R(s)$ второе равенство системы (20), находим:

$$P'(t) = \big(P(t+s)\big)'_s\big|_{s=+0} = P'(+0) + \big(R'(+0)\big)^*P(t)V(0,t)R(0) +$$
$$+R(0)^*P(t)\big(V(s,t)\big)'_s\big|_{s=+0}R(0) + R(0)^*P(t)V(0,t)R'(+0) =$$
$$= C + D^*P(t) + P(t)D - P(t)BP(t).$$

Из третьего равенства системы (20), заменив в нём $\big(I + Q(s)P(t)\big)^{-1}$ на $V(s,t)$, получим:

$$Q'(t) = \lim_{s\to+0}R(t)V(s,t)\frac{Q(s)}{s}R^*(t) = R(t)Q'(+0)R^*(t) = R(t)BR^*(t).$$

Аналогично, записав виде $R(t+s) = R(t)V(s,t)R(s)$ последнее равенство системы (20), придём к соотношению

$$R'(t) = R(t)\Big(\big(V(s,t)\big)'_s\big|_{s=+0}R(0) + V(0,t)R'(+0)\Big) = R(t)\big(D - BP(t)\big).$$

Теорема доказана. □

*Замечание* 4. Исходя из системы (20), можно следующим образом получить систему дифференциальных уравнений, отличающуюся от (28). Сначала в (20) меняем местами $t$ и $s$:

$$\begin{cases} h(s+t) = h(s)h(t)\det^{-1/2}\big(I + Q(t)P(s)\big) \\ P(s+t) = P(t) + R^*(t)P(s)\big(I + Q(t)P(s)\big)^{-1}R(t) \\ Q(s+t) = Q(s) + R(s)\big(I + Q(t)P(s)\big)^{-1}Q(t)R^*(s) \\ R(s+t) = R(s)\big(I + Q(t)P(s)\big)^{-1}R(t). \end{cases}$$

Далее, дифференцируя каждое равенство по $s$ в нуле справа (аналогично тому, как это делается в теореме 4), придем к системе

$$\begin{cases} h'(t) = \Big(a - \dfrac{1}{2}\operatorname{tr}\big(Q(t)C\big)\Big)h(t) \\ P'(t) = R^*(t)CR(t) \\ Q'(t) = B + DQ(t) + Q(t)D^* - Q(t)CQ(t) \\ R'(t) = \big(D - Q(t)C\big)R(t). \end{cases}$$

Входящее в неё дифференциальное уравнение Риккати для $Q(t)$ является двойственным к уравнению для $P(t)$ из системы (20) (см. определение 4).

**Теорема 5.** *При любых $a \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$, $C \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$, $D \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ задача Коши (28) имеет единственное решение на полуоси $[0,+\infty)$ (при $t=0$ берется производная справа) в классе дифференцируемых функций $h\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $P\colon [0,+\infty) \to \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$, $Q\colon [0,+\infty) \to \mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$, $R\colon [0,+\infty) \to \mathcal{L}(\mathscr{H})$.*

*Доказательство.* Начнем с уравнения $P'(t) = C + D^*P(t) + P(t)D - P(t)BP(t)$. В силу теоремы 1 данное операторное дифференциальное уравнение Риккати имеет единственное решение $P(t) \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$ с начальным условием $P(0) = 0$ на полуоси $t \geqslant 0$.

Далее, в силу предложений 5 и 2, при всех $t, s \geqslant 0$ верна оценка

$$\big|\operatorname{tr}\big(BP(t)\big) - \operatorname{tr}\big(BP(s)\big)\big| = \Big|\operatorname{tr}\Big(B\big(P(t) - P(s)\big)\Big)\Big| \leqslant \|B\|_1 \cdot \|P(t) - P(s)\|.$$

Отсюда, ввиду непрерывности отображения $t \mapsto P(t)$, следует непрерывность функции $t \mapsto \operatorname{tr}\big(BP(t)\big)$. Поэтому уравнение $h'(t) = \Big(a - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\big(BP(t)\big)\Big)h(t)$ с начальным условием $h(0) = 1$ имеет единственное решение при $t \geqslant 0$. Очевидно, это решение можно записать в виде $h(t) = \exp\Big\{\int\limits_0^t \Big(a - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\big(BP(s)\big)\Big)ds\Big\}$.

Уравнение $R'(t) = R(t)\big(D - BP(t)\big)$, последнее в (28), в силу непрерывности отображения $t \mapsto \big(D - BP(t)\big)$ также имеет при $t \geqslant 0$ единственное решение с начальным условием $R(0) = I$ (см., например, [17, п. 1 § 2 гл. 2], [21, п. 31 гл. 3], [12, п. 1.1]).

Остаётся найти решение уравнения $Q'(t) = R(t)BR^*(t)$ с начальным условием $Q(0) = 0$. Это решение также единственно и выражается через интеграл Бохнера: $Q(t) = \int_0^t R(\tau)BR^*(\tau)\,d\tau$ (см., например, [20, теор. 6 § 7 гл. VI]). Так как $B \in \mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$, то $R(\tau)BR^*(\tau) \in \mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$ при любом $\tau \in [0,t]$. Поэтому $Q(t) \in \mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$ при любом $t \geqslant 0$. Теорема доказана. $\square$

3.2. **Несколько примеров гауссовских полугрупп.**

Здесь мы решаем задачу Коши (28) в четырёх частных случаях: в одномерном случае $\dim \mathscr{H} = 1$ (пример 4) и в случаях, когда $B = 0$, $C = 0$ или $D = 0$ (примеры 5, 6 и 7). Это даёт четыре примера гауссовских полугрупп.

*Пример* 4. Пусть $\dim \mathscr{H} = 1$, то есть $\mathscr{H} \cong \mathbb{R}$. Тогда операторы $B$, $C$ и $D = D^*$ можно отождествить с некоторыми вещественными числами $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ и $d$ соответственно, а оператор–функции $P(t)$, $Q(t)$ и $R(t)$ можно считать вещественными функциями на луче $[0,+\infty)$. Введём обозначение $k = \sqrt{bc + d^2}$.

Сначала предположим, что $k \neq 0$. Решая в (28) последовательно уравнения для $P$, $R$, $Q$ и $h$, при всех $t \geqslant 0$ придём к формулам

$$\begin{cases} h(t) = \dfrac{\sqrt{k}e^{(a-d/2)t}}{\sqrt{k\operatorname{ch}(kt) - d\operatorname{sh}(kt)}}; \qquad P(t) = \dfrac{c\operatorname{sh}(kt)}{k\operatorname{ch}(kt) - d\operatorname{sh}(kt)}; \\ Q(t) = \dfrac{b\operatorname{sh}(kt)}{k\operatorname{ch}(kt) - d\operatorname{sh}(kt)}; \qquad R(t) = \dfrac{k}{k\operatorname{ch}(kt) - d\operatorname{sh}(kt)}. \end{cases}$$

Если же $k = \sqrt{bc + d^2} = 0$, то $d = 0$, а также $b = 0$ или $c = 0$. Поэтому система уравнений в (28) упрощается, и решение при всех $t \geqslant 0$ имеет вид $h(t) = e^{at}$, $P(t) = ct$, $Q(t) = 0$, $R(t) = 1$ в случае $b = d = 0$, и, соответственно, $h(t) = e^{at}$, $P(t) = 0$, $Q(t) = bt$, $R(t) = 1$ в случае $c = d = 0$.

Проверка показывает, что найденные функции $h(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ и $R(t)$ удовлетворяют условиям (20) как в случае $k = 0$, так и в случае $k \neq 0$. В силу теоремы 3 это означает, что для $t \geqslant 0$ семейство операторов вида

$$(G_t f)(x) = h(t) \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\big\langle P(t)x, x\big\rangle\Big\} \int_{\mathscr{H}} f(y)\Gamma_{Q(t),R(t)x}(dy)$$

с такими функциями $h, P, Q$ и $R$ задает гауссовскую полугруппу на $\mathscr{B}_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

*Пример* 5. Пусть $B = 0$. Решая задачу Коши (28) для этого случая, при всех $t \geqslant 0$ находим: $h(t) = e^{at}$, $P(t) = \int_0^t e^{\tau D^*}Ce^{\tau D}d\tau$, $Q(t) = 0$, $R(t) = e^{tD}$. Проверяя условия (20) и применяя теорему 3 убеждаемся, что на $\mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$ семейство гауссовских мер с такими параметрами действительно задает гауссовскую полугруппу.

*Пример* 6. Пусть $C = 0$. Тогда, аналогично предыдущему, получаем из (28) при всех $t \geqslant 0$: $h(t) = e^{at}$, $P(t) = 0$, $Q(t) = \int_0^t e^{\tau D}Be^{\tau D^*}d\tau$, $R(t) = e^{tD}$. Так как $B \in \mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$, то $Q(t) \in \mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$ при всех $t \geqslant 0$ в силу предложения 2.

В частности, если $a = 0$, то, подставляя найденные выражения для $h(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ и $R(t)$ в равенство (17), для любых $f \in \mathscr{B}_b(\mathscr{H},\mathbb{C})$, $x \in \mathscr{H}$ и $t \geqslant 0$ получим формулу, аналогичную формуле (2.1) из [5]:

$$(G_t f)(x) = \int_{\mathscr{H}} f\big(z + R(t)x\big)\,\Gamma_{Q(t),0}(dz) = \int_{\mathscr{H}} f\big(R(t)x - y\big)\,\Gamma_{Q(t),0}(dy).$$

Таким образом, при $C = 0$ и $a = 0$ гауссовская полугруппа $(G_t)_{t\geqslant 0}$ является обобщенной мелеровской полугруппой на пространстве $\mathscr{B}_b(\mathscr{H}, \mathbb{C})$ (см. определение 2.4 и параграф 4 в [5]).

*Пример* 7. Пусть $D = 0$. Для того, чтобы записать решение задачи Коши (28) в этом случае, применим к операторам $B \in \mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$ и $C \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$ замечание 1. Тогда получим, что определены операторы $\sqrt{C}B\sqrt{C}, \sqrt{B}C\sqrt{B} \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$ и $\sqrt{\sqrt{C}B\sqrt{C}}, \sqrt{\sqrt{B}C\sqrt{B}} \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$.

Пусть теперь $t \geqslant 0$ фиксировано. Для любого $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ зададим функции $f_t(x) = \big(\operatorname{th}(tx)\big)/x$ и $g_t(x) = \big(\operatorname{ch}(tx) - 1\big)/\big(x^2 \operatorname{ch}(tx)\big)$. Тогда $f_t(x) \geqslant 0$ и $g_t(x) \geqslant 0$. Доопределив $f_t$ и $g_t$ в точке $x = 0$ по непрерывности, получим, что $f_t, g_t \in C(\mathbb{R})$. Поэтому, в силу замечания 1, для любого оператора $K \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$ определены операторы $f_t(K), g_t(K) \in \mathcal{LS}^+(\mathscr{H})$, которые мы обозначим через $\big(\operatorname{th}(tK)\big)/K$ и $\big(\operatorname{ch}(tK) - I\big)/\big(K^2 \operatorname{ch}(tK)\big)$ соответственно.

Далее, используя свойства определителя (см. предложение 9) и проводя необходимые вычисления, приходим к выводу, что в случае $D = 0$ решение задачи Коши (28) при любом $t \geqslant 0$ можно записать в виде

$$
\begin{cases}
h(t) = e^{at} \cdot \det{}^{-1/2}\left(\operatorname{ch}\left(t\sqrt{\sqrt{C}B\sqrt{C}}\right)\right) \\[2mm]
P(t) = \sqrt{C} \cdot \dfrac{\operatorname{th}\left(t\sqrt{\sqrt{C}B\sqrt{C}}\right)}{\sqrt{\sqrt{C}B\sqrt{C}}} \cdot \sqrt{C} \\[2mm]
Q(t) = \sqrt{B} \cdot \dfrac{\operatorname{th}\left(t\sqrt{\sqrt{B}C\sqrt{B}}\right)}{\sqrt{\sqrt{B}C\sqrt{B}}} \cdot \sqrt{B} \\[2mm]
R(t) = I - B\sqrt{C} \cdot \dfrac{\operatorname{ch}\left(t\sqrt{\sqrt{C}B\sqrt{C}}\right) - I}{\sqrt{C}B\sqrt{C}\operatorname{ch}\left(t\sqrt{\sqrt{C}B\sqrt{C}}\right)} \cdot \sqrt{C}.
\end{cases}
\tag{29}
$$

При этом, поскольку $B \in \mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$, то $Q(t) \in \mathcal{LS}_1^+(\mathscr{H})$ для любого $t \geqslant 0$.

Используя разложения функций sh, ch и th в степенные ряды, можно показать, что при $0 \leqslant t < \pi/\big(2\sqrt{\|B\| \cdot \|C\|}\big)$ решение (29) задачи Коши (28) можно переписать в несколько ином виде:

$$
\begin{cases}
s(t) = e^{at} \cdot \det{}^{-1/2}\left(\operatorname{ch}\left(t\sqrt{BC}\right)\right) \\[2mm]
P(t) = C \cdot \dfrac{\operatorname{th}\left(t\sqrt{BC}\right)}{\sqrt{BC}} \\[2mm]
Q(t) = \dfrac{\operatorname{th}\left(t\sqrt{BC}\right)}{\sqrt{BC}} \cdot B \\[2mm]
R(t) = \left(\operatorname{ch}\left(t\sqrt{BC}\right)\right)^{-1},
\end{cases}
$$

где операторы $\operatorname{th}\left(t\sqrt{BC}\right)/\sqrt{BC}$ и $\left(\operatorname{ch}\left(t\sqrt{BC}\right)\right)^{-1}$ определяются с помощью рядов Маклорена для функций $x \mapsto \operatorname{th}(tx)/x$ и $x \mapsto 1/\operatorname{ch}(tx)$ соответственно. Эти ряды, ввиду четности указанных функций, будут содержать переменную $x$

лишь в четных степенях $(x^2)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Подставляя вместо каждого выражения $(x^2)^n$ оператор $(BC)^n$, получим ряды для операторов $\operatorname{th}\bigl(t\sqrt{BC}\bigr)/\sqrt{BC}$ и $\bigl(\operatorname{ch}\bigl(t\sqrt{BC}\bigr)\bigr)^{-1}$.

## 4. Планы на будущее

В наших следующих работах мы планируем:

1) выяснить, при каких условиях и на каких подпространствах пространства $\mathscr{B}_b(\mathscr{H}, \mathbb{C})$ гауссовская полугруппа, задаваемая формулой (17), будет сильно непрерывной, а также найти ее генератор;
2) ввести понятие гауссовской полугруппы операторов на пространстве борелевских мер $\mathcal{M}(\mathscr{H})$ и изучить такие полугруппы;
3) усилить результат теоремы 4, получив из системы (20) как следствие систему (28) при более слабых условиях на оператор-функции $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ (например, предполагая лишь их непрерывность);
4) доказать теорему, обратную теореме 4, то есть показать, что все решения задачи Коши (28) будут решениями системы функциональных уравнений (20);
5) результаты, полученные в работе для полугрупп операторов, определяемых счётно-аддитивными гауссовскими мерами, распространить также на случай полугрупп, определяемых цилиндрическими гауссовскими мерами.

## References


[1] P. Acquistapace, F. Bucci, *Uniqueness for Riccati equations with application to the optimal boundary control of composite systems of evolutionary partial differential equations*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **202**:4 (2023), 1611–1642. Zbl 1516.49033

[2] V.I. Averbukh, O.G. Smolyanov, S.V. Fomin, *Generalized functions and differential equations in linear spaces. I. Differentiable measures*, Tr. Mosk. Mat. Obs., **24** (1971), 133–174. Zbl 0234.28005

[3] A. Bensoussan, G. Da Prato, M.C. Delfour, S.K. Mitter, *Representation and control of infinite dimensional systems*, Birkhäuser, Boston, 2007. Zbl 1117.93002

[4] M.S. Birman, M.Z. Solomjak, *Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space*, Kluwer, Dordrecht etc., 1987. Zbl 0744.47017

[5] V.I. Bogachev, M. Röckner, B. Schmuland, *Generalized Mehler semigroups and applications*, Probab. Theory Relat. Fields, **105**:2 (1996), 193–225. Zbl 0849.60066

[6] V.I. Bogachev, *Gaussian measures*, American Mathematical Soc., Providence, 1998. Zbl 0913.60035

[7] V.I. Bogachev, *Measure Theory. Vol. I*, Springer-Verlag, Berlin, 2007. Zbl 1120.28001

[8] V.I. Bogachev, O.G. Smolyanov, *Real and functional analysis*, Springer, Cham, 2020. Zbl 1466.26002

[9] Yu.L. Dalecky, S.V. Fomin, *Measures and differential equations in infinite-dimensional space*, Kluwer, Dordrecht etc., 1991. Zbl 0753.46027

[10] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (algèbres de von Neumann)*, Gauthier-Villars, Paris, 1957. Zbl 0088.32304

[11] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer, Berlin, 2000. Zbl 0952.47036

[12] O.E. Galkin, S.Yu. Galkina, *On the invertibility of solutions of first order linear homogeneous differential equations in Banach algebras*, Zhurnal SVMO, **21**:4 (2019), 430–442.

[13] G. Genovese, R. Lucà, N. Tzvetkov, *Quasi-invariance of Gaussian measures for the periodic Benjamin-Ono-BBM equation*, Stoch PDE: Anal. Comp., **11**:2 (2023), 651–684. Zbl 1518.35704

[14] H.-H. Kuo, *Gaussian measures in Banach spaces*, Springer, Berlin etc., 1975. Zbl 0306.28010

[15] I.C. Gohberg, M.G. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, American Mathematical Society, Providence, 1969. Zbl 0181.13503

[16] R.E. Kalman, P.L. Falb, M.A. Arbib, *Topics in mathematical system theory*, McGraw-Hill Book Company, New York etc., 1969. Zbl 0231.49001

[17] S.G. Krein, *Linear differential equations in Banach space*, American Mathematical Society, Providence, 1972. Zbl 0229.34050

[18] J.D. Lawson, Y. Lim, *The symplectic semigroup and Riccati differential equations*, J. Dyn. Control Syst., **12**:1 (2006), 49–77. Zbl 1118.49029

[19] V.B. Lidsky, *Nonselfadjoint operators with a trace*, Am. Math. Soc., Transl., II. Ser., **47** (1965), 43–46. Zbl 0158.14702

[20] L.A. Lusternik, V.J. Sobolev, *Elements of functional analysis*, Constable and Co., London, 1961. Zbl 0096.07802

[21] J.L. Massera, J.J. Schäffer, *Linear differential equations and function spaces*, Academic Press, New York-London, 1966. Zbl 0243.34107

[22] I.G. Petrovsky, *Lectures on partial differential equations*, Dover Publications Inc., New York, 1991. MR1160355

[23] A.V. Skorohod, *Integration in Hilbert space*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974. Zbl 0307.28010

[24] G. Xu, *Some problems of linear differential equations on abstract spaces and unbounded perturbations of linear operator semigroup*, Front. Math. China, **17**:1 (2022), 47–77. Zbl 1496.93063

Oleg Evgenievich Galkin, Svetlana Yurievna Galkina
National Research University «Higher School of Economics»,
B. Pecherskaya St., 25/12,
603155, Nizhny Novgorod, Russia
*Email address*: olegegalkin@ya.ru, svetlana.u.galkina@mail.ru

Irina Yurievna Yastrebova
National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Gagarin Av., 23,
603022, Nizhny Novgorod, Russia
*Email address*: irina_yastrebova@rambler.ru