S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 1374–1380 (2023) УДК 519.716
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.083 MSC 08A99

О СУБМАКСИМАЛЬНЫХ УЛЬТРАКЛОНАХ САМОДВОЙСТВЕННЫХ ГИПЕРФУНКЦИЙ РАНГА 2

С.А. Бадмаев, И.К. Шаранхаев

Представлено С.В. Судоплатовым

Abstract: In article the elements of the lattice of ultraclones are considered. We proved the criterion of completeness in the maximal ultraclone of self-dual hyperfunctions. Thus, all submaximal ultraclones of self-dual hyperfunctions are described.

Keywords: hyperfunction, Boolean function, self-dual function, superposition, closed set, ultraclone, lattice.

1 Введение

В теории дискретных функций классической проблемой является описание структуры или решетки замкнутых классов (клонов) функций. Как известно, только для булевых функций решетка замкнутых классов полностью описана и является счетной [1]. Для остальных функций k-значной логики данная задача далека от своего завершения.

Badmaev, S.A., Sharankhaev, I.K. On submaximal ultraclones of self-dual hyperfunctions of rank 2.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22–21–20013, https://rscf.ru/project/22-21-20013/ и Правительства Республики Бурятия.

Поступила 20 мая 2023 г., опубликована 30 ноября 2023 г.

В данной работе исследуется решетка замкнутых классов гиперфункций ранга 2, так называемых ультраклонов ранга 2. Так как все максимальные ультраклоны ранга 2 найдены В.И. Пантелеевым в [2], актуальной задачей является описание следующего яруса в решетке ультраклонов, т. е. субмаксимальных ультраклонов. В статье найден критерий полноты в максимальном ультраклоне самодвойственных гиперфункций, как следствие, получено описание всех субмаксимальных ультраклонов самодвойственных гиперфункций.

Заметим, что описание всех субмаксимальных клонов помимо булевых функций получено лишь для функций трехзначной логики [3].

2 Основные понятия и определения

Пусть $E = \{0, 1\}$ и $F = \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$P_{2,n} = \{f | f : E^n \to E\}$, $P_2 = \bigcup\limits_n P_{2,n}$;

$P^-_{2,n} = \{f | f : E^n \to F\}$, $P^-_2 = \bigcup\limits_n P^-_{2,n}$;

Функции из P_2 называют булевыми функциями, из P^-_2 – гиперфункциями на E (гиперфункциями ранга 2).

Для того, чтобы суперпозиция

$$f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)),$$

где $f, f_1, \dots, f_n \in P^-_2$, определяла гиперфункцию $g(x_1, \dots, x_m)$ определим значения гиперфункции f на наборах из множества F следующим образом: если $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E^m$, то

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее гиперфункцию будем называть просто функцией, если это не вызывает недоразумений.

Для любого натурального n и любого i, где $1 \le i \le n$, обозначим через $e^n_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ функцию, значения которой совпадают со значениями переменной x_i. Функции e^n_i называются проекциями или селекторными функциями.

Замыканием множества функций K называется множество всех функций, полученных из функций множества K с помощью суперпозиции, добавления и удаления фиктивных переменных. Замыкание множества K обозначается через $[K]$. Множество функций K называется замкнутым (замкнутым классом), если $K = [K]$.

Ультраклоном ранга 2 (клоном) называется замкнутое множество гиперфункций ранга 2 (булевых функций), содержащее все проекции. Далее для краткости любой ультраклон ранга 2 будем называть просто ультраклоном. Заметим, что любой клон является ультраклоном.

Ультраклон K называется максимальным, если не существует ультраклона K' такого, что $K \subset K' \subset P_2^-$.

Ультраклон K называется субмаксимальным, если не существует ультраклона K' такого, что $K \subset K' \subset M$, где M – некоторый максимальный ультраклон.

Через S обозначим клон всех булевых самодвойственных функций.

Пусть R^s – s-местный предикат, заданный на множестве F. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на множестве F, сохраняет предикат R^s, если для любых наборов

$$(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{s1}), \ldots, (\alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{sn}),$$

принадлежащих предикату R^s, набор

$$(f(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}), \ldots, f(\alpha_{s1}, \ldots, \alpha_{sn}))$$

принадлежит R^s.

Для упрощения записи используется кодировка: $\{0\} \leftrightarrow 0$, $\{1\} \leftrightarrow 1$, $\{0,1\} \leftrightarrow -$, тогда $F = \{0, 1, -\}$.

Гиперфункцию, которая на всех наборах принимает значение $-$, будем обозначать просто $-$.

В [2] доказано, что максимальными ультраклонами ранга 2 являются только следующие 11 множеств:

1) P_2 – множество всех булевых функций;

2) T_0^- – множество функций, которые сохраняют нуль, т. е. на наборе из всех нулей функции принимают значение 0;

3) T_1^- – множество функций, которые сохраняют единицу, т. е. на наборе из всех единиц функции принимают значение 1;

4) S^- – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix};$$

5) L^- – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & - \end{pmatrix};$$

6) M^- – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 1 & - & 1 & - \end{pmatrix};$$

7) A_1 – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & - & 1 & - \\ 1 & 0 & 1 & 1 & - & - \end{pmatrix};$$

8) A_2 – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 0 & - & 0 & - \end{pmatrix};$$

9) A_3 – множество функций, сохраняющих предикат R_3, определяемый матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & 0 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & - & 1 & - & 0 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 0 & - & 1 & 1 & 0 & - & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - \end{pmatrix};$$

10) A_4 – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & - & 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & - & 0 & - & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & - & 0 & 0 & - & - & 0 & - \end{pmatrix};$$

11) A_5 – множество, состоящее из всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной, а также из функций, принимающих два значения, одно из которых есть $-$.

Множество S^- будем называть множеством всех самодвойственных гиперфункций ранга 2.

Через d_3 обозначим функцию, задаваемую вектором (00010111).

Множество B называется полным в S^-, если $[B] = S^-$.

Через K_1 обозначим множество $S^- \cap T_0^-$, через K_2 – множество $S^- \cap L^-$, через K_3 – множество $S^- \cap M^-$.

Все определения, которые отсутствуют здесь, необходимые для понимания статьи, можно найти в [2, 4].

3 Критерий полноты и описание субмаксимальных ультраклонов в множестве всех самодвойственных гиперфункций

В этом разделе доказывается критерий полноты в S^-, как следствие, описаны все субмаксимальные ультраклоны, содержащиеся в S^-.

Лемма 1. [4] *Множество S является замкнутым.*

Лемма 2. *Множества K_1, K_2, K_3 являются замкнутыми.*

Доказательство. Очевидно, в силу замкнутости множеств S^-, T_0^-, L^-, M^-, что доказано в [2].

□

В [5] доказана следующая

Лемма 3. *Верно, что* $S^- = [\{d_3, \bar{x}, -\}]$.

Лемма 4. [2] *Гиперфункция* $f \in L^-$ *тогда и только тогда, когда* f *– линейная булева функция или константа* $-$.

Лемма 5. *Булева функция* $f(x_1, \dots, x_n)$ *является линейной тогда и только тогда, когда для любой существенной переменной* x_i *при любых значениях* $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ *для переменных* $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Доказательство. Необходимость. Очевидно, в силу

$$f = c_1x_1 \oplus \dots \oplus c_{i-1}x_{i-1} \oplus x_i \oplus c_{i+1}x_{i+1} \oplus \dots \oplus c_nx_n \oplus c_0,$$

где $c_j \in \{0, 1\}$.

Достаточность. От противного. Пусть f не является линейной. Тогда, не умаляя общности, можно считать, что

$$f = x_1x_2p_0(x_3, \dots, x_n) \oplus x_1p_1(x_3, \dots, x_n) \oplus x_2p_2(x_3, \dots, x_n) \oplus p_3(x_3, \dots, x_n),$$

где найдется набор $(b_3, \dots, b_n)$ такой, что $p_0(b_3, \dots, b_n) = 1$. Тогда

$f(0, 0, b_3, \dots, b_n) = p_3(b_3, \dots, b_n)$,

$f(0, 1, b_3, \dots, b_n) = p_2(b_3, \dots, b_n) \oplus p_3(b_3, \dots, b_n)$,

$f(1, 0, b_3, \dots, b_n) = p_1(b_3, \dots, b_n) \oplus p_3(b_3, \dots, b_n)$,

$f(1, 1, b_3, \dots, b_n) = p_0(b_3, \dots, b_n) \oplus p_1(b_3, \dots, b_n) \oplus p_2(b_3, \dots, b_n) \oplus p_3(b_3, \dots, b_n)$.

Отсюда $p_1(b_3, \dots, b_n) = p_2(b_3, \dots, b_n) = 1$, а значит $p_0(b_3, \dots, b_n) = 0$. Противоречие.

□

Теорема 1. *Множество* $B \subseteq S^-$ *является полным в* S^- *тогда и только тогда, когда* $B \not\subseteq S$, $B \not\subseteq K_1$, $B \not\subseteq K_2$, $B \not\subseteq K_3$.

Доказательство. Необходимость. От противного. Пусть $B \subseteq S$. В случаях $B \subseteq K_1$, $B \subseteq K2$, $B \subseteq K_3$ доказывается аналогично с помощью леммы 2. Тогда $[B] \subseteq S$. Противоречие лемме 1.

Достаточность. Так как $B \not\subseteq K_1$ найдется $f_1 \notin K_1$. Возможны 2 случая:

Случай 1. Пусть $f_1(0, \dots, 0) = 1$. Тогда $f(x) = f_1(x, \dots, x) = (10)$. Так как $B \not\subseteq S$ найдется $f_2 \notin S$. Из f_2 отождествлением переменных и подстановкой отрицаний получим $f_3 = (--)$.

Случай 2. Пусть $f_1(0, \dots, 0) = -$. Из f_1 отождествлением переменных получим $f_3 = (--)$.

Таким образом, имеем константу $-$.

Покажем, что всегда получим функцию d_3.

Так как $B \not\subseteq K_2$ найдется $g_1 \notin K_2$. В силу леммы 4 возможны 3 случая:

Случай 1. Отождествлением переменных из g_1 получим $g_2 = (0--1)$ или $(1--0)$. Но так как во втором варианте сразу имеем отрицание, поэтому достаточно рассмотреть только первый вариант. Добавив фиктивную переменную получим $g_3 = (0--10--1)$. Далее построим

$g_4 = g_3(e_1^3, e_1^3, g_3) = (000--111)$. С помощью g_4 получим функцию $d_3 = g_3(e_1^3, g_3, g_4) = (00010111)$.

Случай 2. Отождествлением переменных из g_1 получим $g_5 = (-10-)$ или $(-01-)$. Так как первая функция получается из второй перестановкой переменных, достаточно рассмотреть только первый вариант. Далее получим $g_6 = g_5(e_1^2, g_5) = (1100)$, т. е. отрицание. С помощью отрицания из g_5 получаем g_2, т. е. эта ситуация сводится к случаю 1.

Случай 3. Функция g_1 является булевой нелинейной самодвойственной. По лемме 5 найдутся существенная переменная x_i и значения

$$a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$$

для переменных $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ такие, что

$$g_1(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) = g_1(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Поскольку x_i является существенной, то существуют значения

$$b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n$$

для переменных $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ такие, что

$$g_1(b_1, \dots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \dots, b_n) \neq g_1(b_1, \dots, b_{i-1}, 1, b_{i+1}, \dots, b_n).$$

Следовательно,

$$g_1(a_1, \dots, a_{i-1}, -, a_{i+1}, \dots, a_n) = c,$$

где $c \in \{0, 1\}$ и

$$g_1(b_1, \dots, b_{i-1}, -, b_{i+1}, \dots, b_n) = -.$$

Отождествлением переменных из

$$g_1(x_1, \dots, x_{i-1}, -, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

получим одну из функций $(0--1)$, $(1--0)$, $(-10-)$, $(-01-)$, т. е. ситуация сводится к случаям 1 и 2.

Итак, получили функцию d_3.

Покажем, что всегда получим отрицание (10).

Так как $B \not\subseteq K_3$ найдется $h_1 \notin K_3$. Очевидно, что отождествлением переменных из h_1 получим самодвойственную гиперфункцию от трех переменных $h \notin K_3$.

Если $h(0,0,0) = 1$, то сразу имеем отрицание.

Если $h(0,0,0) = -$, то отождествлением переменных из h получим $(-10-)$ или $(-01-)$. Как было показано выше, с помощью любой из них получим отрицание.

Если $h(0,0,0) = 0$, то возможны 16 случаев:

Случай 1. $h = (01001101)$. Тогда

$$h_2(x_1, x_2, x_3) = h(h(x_1, x_2, x_3), d_3(x_1, x_2, x_3), -) = (-1-01-0-).$$

С помощью h_2 получим функцию $h_3 = h_2(x_1, x_1, x_3) = (-10-)$. Из h_3 получим отрицание $h_4 = h_3(e_1^2, h_3) = (1100)$.

В остальных случаях лишь запишем суперпозиции, которые дают ранее рассмотренные функции.

Случай 2. $h = (00101011)$, $h(x_1, x_3, x_2) = (01001101)$.

Случай 3. $h = (01110001)$, $h(x_2, x_1, x_3) = (01001101)$.

Случай 4. $h = (01101001)$, $h(e_2^3, e_1^3, d_3) = (00101011)$.

Случай 5. $h = (001 - -011)$, $h(e_1^3, h, e_3^3) = (00101011)$.

Случай 6. $h = (00 - 01 - 11)$, $h(h, e_2^3, e_3^3) = (00101011)$.

Случай 7. $h = (0 - 1010 - 1)$, $h(e_1^3, e_1^3, h) = (00 - 01 - 11)$.

Случай 8. $h = (010 - -101)$, $h(e_1^3, e_2^3, h) = (01001101)$.

Случай 9. $h = (011 - -001)$, $h(e_2^3, e_1^3, h) = (01001101)$.

Случай 10. $h = (01 - 01 - 01)$, $h(e_1^3, e_3^3, e_2^3) = (0 - 1010 - 1)$.

Случай 11. $h = (01 - 10 - 01)$, $h(e_1^3, e_2^3, h) = (01110001)$.

Случай 12. $h = (0 - 1100 - 1)$, $h(e_1^3, h, e_3^3) = (01110001)$.

Случай 13. $h = (0 - 1 - -0 - 1)$, $h(e_1^3, e_1^3, h) = (00 - 01 - 11)$.

Случай 14. $h = (0 - 0011 - 1)$, $h(e_1^3, e_3^3, e_2^3) = (00 - 01 - 11)$.

Случай 15. $h = (0 - -01 - -1)$, $h(e_2^3, e_1^3, e_3^3) = (0 - 1 - -0 - 1)$.

Случай 16. $h = (01 - - - -01)$, $h(e_1^3, e_3^3, e_2^3) = (0 - 1 - -0 - 1)$.

Итак, получили отрицание (10). Заметим, что ранее мы получили d_3 и константу $-$. Следовательно, по лемме 3 множество B полно в S^-.

□

Следствие 1. *Существует ровно 4 субмаксимальных ультраклона S, K_1, K_2, K_3, содержащихся в S^-.*

References

[1] E.L. Post, *Introduction to a general theory of elementary propositions*, American J., **43**:4 (1921), 163–185. JFM 48.1122.01

[2] V.I. Panteleyev, *Criteria of completeness for redefining Boolean functions*, Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser., **2009**:2(68) (2009), 60–79. Zbl 1319.03064

[3] D. Lau, *Function algebras on finite sets. A basic course on many-valued logic and clone theory*, Springer, Berlin, 2006. Zbl 1105.08001

[4] N.A. Peryazev, *Basics of the theory of Boolean functions*, Fizmatlit, Moscow, 2000.

[5] S.A. Badmaev, A.E. Dugarov, I.V. Fomina, I.K. Sharankhaev, *On some intervals in the lattice of ultraclones of rank 2*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **18**:2 (2021), 1210–1218. Zbl 1506.08002

Sergei Alexandrovich Badmaev, Ivan Konstantinovich Sharankhaev
Dorzhi Banzarov Buryat State University,
24a, Smolina str.,
670000, Ulan-Ude, Russia
Email address: badmaevsa@mail.ru, goran5@mail.ru