S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 1381–1395 (2023) УДК 510.67
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.084 MSC 03C07, 03C30, 05C15, 05C65

КОМПЛЕКСЫ ПРЕДИКАТНЫХ СТРУКТУР И ИХ СВОЙСТВА

И.А. Емельяненков

Представлено С.В. Судоплатовым

Abstract: We introduce the notion of a complex of relational structures, which is a new structure satisfying certain conditions with respect to the given finite collection of relation structures. We study some of its model-theoretic properties in relation with base structures, and show that, mostly, in order for the complex to have some property it should be generated by structures having given property. Furthermore, we introduce the notion of finitely equivalent sets of the structure, and based on it introduce properties of regularity, strictness, and properness, that allow us to guarantee that the complex generated by a collection of structures having certain model-theoretic properties will also have these properties. We show that the structure of the complex and its properness and strictness are preserved under expansions of the structure by new relations satisfying certain conditions.

Keywords: complex of structures, composition of structures, relational structure.

Emelianenkov, I.A., Complexes of relational structures and their properties.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект № FWNF-2022-0012.

Поступила 8 октября 2023 г., опубликована 6 декабря 2023 г.

1 Введение

Для изучения теоретико-модельных свойств некоторой алгебраической структуры удобно представлять её в виде образа действия некоторого достаточно хорошего оператора на другие алгебраические структуры и изучать свойства уже этих структур и свойства этого оператора. Наиболее простым примером таких операторов является дизъюнктное объединение структур (см., например, [1]).

В качестве более сложного примера можно рассмотреть композиции и комбинации структур, изучаемые, например, в [2] и [3]. Во всех этих примерах оператор однозначно сопоставляет набору структур новую структуру, сохраняя многие их теоретико-модельные свойства. В этой статье мы введём близкий по духу и, в некотором смысле, обобщающий эти примеры способ представить заданную структуру в виде некоторого объекта, образованного другими структурами, и рассмотрим, как некоторые теоретико-модельные свойства этого объекта зависят от свойств структур.

Статья имеет следующую структуру: в разделе 2 фиксируются обозначения, используемые в статье; в разделе 3 описывается базовая структура комплекса, порождённого парой структур; в предложении 3.8 показывается, что свойство комплекса быть насыщенным, минимальным, иметь малую или стабильную теорию влечёт аналогичные свойства всех структур, которыми он порождён; в разделе 4 вводится вспомогательное понятие финитной эквивалентности множеств; в теореме 4.3 показывается, что, в случае определимых множеств, финитная эквивалентность выдерживает основные логические переходы; в разделе 5 вводятся условия правильности, регулярности и строгости комплекса, позволяющие гарантировать сохранение комплексом теоретико-модельных свойств структур, которыми он порождён; в теореме 5.15 показывается, что свойство строгого комплекса быть атомным влечёт атомность всех структур, которыми он порождён; в теореме 5.19 показывается, что эти свойства сохраняются при некоторых обогащениях комплекса.

2 Соглашения и условные обозначения

Символами $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \ldots$ будут обозначаться структуры. Носители структур будут обозначаться символами $C, M, \ldots$ Соответствующие структурам сигнатуры будут обозначаться $L_{\mathcal{C}}, L_{\mathcal{M}}, \ldots$, а теории, соответственно, $\mathrm{Th}(\mathcal{C}), \mathrm{Th}(\mathcal{M}), \ldots$

Будем говорить, что некоторая формула является $L_{\mathcal{M}}$-формулой, если она написана на языке $L_{\mathcal{M}}$. Если $A \subset M$ — некоторое множество, будем говорить, что некоторая формула является $L_{\mathcal{M}}(A)$-формулой, если она написана на языке $L_{\mathcal{M}}$ с параметрами из множества A. Утверждение о том, что некоторая формула является $L^n_{\mathcal{M}}(A)$-формулой, будет означать, что мы рассматриваем эту формулу как формулу от n свободных переменных.

Пусть $R(x, y)$ — формула, задающая отношение эквивалентности. Для сокращения записи, если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — кортежи длины n, будем писать $R(\bar{x}, \bar{y})$, имея в виду $R(x_i, y_i)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Если $\phi(\bar{x})$ — некоторая формула, введём сокращённое обозначение

$$\exists^n_R \bar{x}\ \phi(\bar{x}) := \exists \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n [\bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \neg R(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \wedge \bigwedge_{1 \leqslant k \leqslant n} \phi(\bar{x}_k)].$$

Запись $\exists^\infty_R \bar{x}\ \phi(\bar{x})$ будет обозначать совокупность формул $\{\exists^n_R \bar{x}\ \phi(\bar{x}) \mid n \in \omega\}$. Если в качестве отношения эквивалентности R выступает равенство, то будем писать просто $\exists^n \bar{x}\ \phi(\bar{x})$ и $\exists^\infty \bar{x}\ \phi(\bar{x})$.

Символом $\sqcup$ будем обозначать оператор дизъюнктного объединения множеств, классически определяемый как $\sqcup_{i \in I} A_i := \{(a, i)\ :\ a \in A_i, i \in I\}$. Рассматриваемые нами свойства не зависят от нумерации I и внутренней структуры множества $\sqcup_{i \in I} A_i$, поэтому мы будем неявно отождествлять множества A_i с ассоциированными подмножествами $A_i^* := \{(a, i)\ :\ a \in A_i\} \subseteq \sqcup_{i \in I} A_i$, а также, не указывая нумерацию, писать $A \sqcup B \sqcup C$ и полагать, что $A \sqcup B \sqcup C = (A \sqcup B) \sqcup C = A \sqcup (B \sqcup C)$.

Говоря, что две структуры эквивалентны, мы будем иметь ввиду, что они взаимно определимы, т.е. их можно обогатить определимыми символами до изоморфных структур.

Нам часто понадобится рассматривать различные объекты в структурах $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$, порождающих комплекс $\mathcal{C}$, вместе со связанными с ними объектами в комплексе. По этой причине, если задан некоторый символ S, описывающий объект в одной из структур $\mathcal{M}_i$ (например, элемент, подмножество или некоторая формула), для обозначения соответствующего ему объекта в комплексе $\mathcal{C}$ мы будем использовать символ S^C. Конкретный смысл символа S^C всегда будет пояснён или понятен из контекста. В теории множеств для обозначения множества функций из Y в X принято использовать похожее обозначение X^Y, тем не менее нигде в статье подобное обозначение не используется, и верхний индекс C всегда свидетельствует о рассмотрении некоторой интерпретации символа S в комплексе.

3 Базовая структура комплекса

3.1. Пусть $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ — пара структур дизъюнктных предикатных языков $L_{\mathcal{M}_1}$ и $L_{\mathcal{M}_2}$ соответственно. Зафиксируем $\delta M_1 \subseteq M_1$ и $\delta M_2 \subseteq M_2$ — некоторые подмножества в соответствующих структурах и некоторое отношение E, заданное на $\delta M_1 \sqcup \delta M_2$, такое, что:

(1) $\forall a, b\ \ E(a, b) \to a \in \delta M_1, b \in \delta M_2$;
(2) $\forall a \in \delta M_1\ \exists b\ \ E(a, b)$;
(3) $\forall b \in \delta M_2\ \exists a\ \ E(a, b)$;
(4) $\forall a_1, a_2, b, b'\ \ [E(a_1, b) \wedge E(a_2, b) \to [E(a_1, b') \to E(a_2, b')]]$;
(5) $\forall b_1, b_2, a, a'\ \ [E(a, b_1) \wedge E(a, b_2) \to [E(a', b_1) \to E(a', b_2)]]$.

Заданное таким образом отношение представляет собой двудольный граф, являющийся несвязным объединением полных двудольных графов. Это отношение также можно представить как пару отношений эквивалентности E_{M_1} и E_{M_2} на множествах δM_1 и δM_2 соответственно, вместе с биекцией между множествами классов эквивалентности по этим отношениям.

Заметим, что условия (1)–(3) позволяют рассматривать E как подмножество $\delta M_1 \times \delta M_2$, накрывающее каждое из множеств δM_i под действием естественных проекций.

Вместе с отношением E будем рассматривать построенную по нему структуру Γ_E, являющуюся рёберным графом графа, заданного структурой E, с рёбрами, окрашенными в два цвета, которые соответствуют долям δM_i.

3.2. Построим структуру $\mathcal{C}$ предикатного языка $L_{\mathcal{C}}$ такую, что:

(a) $L_{\mathcal{C}} = L_{\mathcal{M}_1} \sqcup L_{\mathcal{M}_2} \sqcup \{\delta {M_1}^C, \delta {M_2}^C, {M_1}^C, {M_2}^C\}$;
(b) носитель $\mathcal{C}$ можно отождествить с $(M_1 \setminus \delta M_1) \sqcup (M_2 \setminus \delta M_2) \sqcup E$;
(c) $\delta {M_1}^C$ — отношение эквивалентности на E, отождествляющее все элементы $(a, b) \in E$ с одинаковой первой координатой;
(d) $\delta {M_2}^C$ — отношение эквивалентности на E, отождествляющее все элементы $(a, b) \in E$ с одинаковой второй координатой;
(e) ${M_1}^C$ — одноместный предикат, выделяющий $(M_1 \setminus \delta M_1) \sqcup E$;
(f) ${M_2}^C$ — одноместный предикат, выделяющий $(M_2 \setminus \delta M_2) \sqcup E$.

Заметим, что из условий (b), (e), (f) следует, что множество E можно выделить формулой ${M_1}^C \wedge {M_2}^C$, а условия (c), (d) задают на множестве E структуру, эквивалентную графу Γ_E.

В заданной таким образом структуре $\mathcal{C}$ естественно определяются сюръективные отображения

$$\pi_{M_1} : {M_1}^C \to M_1 \qquad \text{и} \qquad \pi_{M_2} : {M_2}^C \to M_2$$

как фактор-отображения по отношениям $\delta {M_1}^C$ и $\delta {M_2}^C$ соответственно.

Будем говорить, что такая структура $\mathcal{C}$ является *комплексом, порождённым структурами $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ и графом* Γ_E, если:

(g_i) для каждого $R \in L_{\mathcal{M}_i}$ его интерпретация $R_{\mathcal{C}}$ в структуре $\mathcal{C}$ определена только на ${M_i}^C$, причём гомоморфный образ $(\mathcal{C} \restriction L_{\mathcal{M}_i}) \restriction {M_i}^C$ под действием π_{M_i} изоморфен $\mathcal{M}_i$.

Заметим, что это условие означает, что для любой формулы ϕ, написанной на языке $L_{\mathcal{M}_i}$, соответствующей ей формулы ϕ^C и любых $\bar{c} \in {M_i}^C$ выполнено:

$$\mathcal{M}_i \models \phi(\pi_{M_i}(\bar{c})) \iff \mathcal{C} \models \phi^C(\bar{c}),$$

где формула ϕ^C получается из формулы ϕ заменой всех предикатов $R(\bar{x})$ на формулы $\exists \bar{y} [\bigwedge_j \delta {M_i}^C(x_j, y_j) \wedge R(\bar{y})]$, а также всех кванторов $\forall x$ и $\exists x$ на $\forall x \in {M_i}^C$ и $\exists x \in {M_i}^C$, соответственно.

3.3. Пример. Наиболее простой способ задать отношение E, отличное от $\delta M_1 \times \delta M_2$, это зафиксировать некоторое сюръективное отображение $f : M_1 \to M_2$ (или $f : M_2 \to M_1$) и положить $E(a, b) \iff f(a) = b$ (или $f(b) = a$, соответственно). Будем обозначать полученное таким образом отношение через E^f.

Несложно заметить, что, за исключением некоторых случаев, существуют структуры $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, которые одновременно являются комплексами, порождёнными структурами $\mathcal{M}_i$ и графом Γ_E, но для которых $\mathcal{C}_1 \not\equiv \mathcal{C}_2$.

- Пусть $\mathcal{M}_1$ — произвольная структура и $\mathcal{M}_2$ — множество с пустой сигнатурой, $\delta M_1 \subset M_1$ — произвольное подмножество, и $f : \delta M_1 \to M_2$ — сюръекция. Тогда единственная структура, являющаяся комплексом, порождённым этими структурами и отношением E^f, — это структура, эквивалентная структуре $\mathcal{M}_1$, обогащённой отношением эквивалентности $E^f_{M_1}$.
- Пусть $\mathcal{M}_1$ — произвольная структура и $\mathcal{M}_2$ — множество констант, $\delta M_1 \subset M_1$ — произвольное подмножество, и $f : \delta M_1 \to M_2$ — сюръекция. Тогда структуры, являющиеся соответствующими комплексами, получаются с помощью разбиений множества δM_1 на классы эквивалентности и выделения в каждом классе эквивалентности непустого подмножества с помощью отдельного предиката, в частности, такая структура получается при окрашивании всех классов эквивалентности в различные цвета.
- Пусть $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — произвольные структуры с непересекающимися сигнатурами, $\delta M_1 \subset M_1$ и $\delta M_2 \subset M_2$ — некоторые подмножества, и $f : \delta M_1 \to \delta M_2$ — биекция. Единственная структура, являющаяся комплексом, порождённым ими, — это структура, эквивалентная структуре $(\mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2)/E^f$, обогащённой одноместными предикатами, выделяющими образы M_1 и M_2.
- Пусть $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — произвольные структуры с непересекающимися сигнатурами, и отношение E образует полный двудольный граф, т.е. $E = M_1 \times M_2$. Тогда в качестве комплексов можно рассматривать композиции $\mathcal{M}_1[\mathcal{M}_2]$, $\mathcal{M}_2[\mathcal{M}_1]$ (см., например, [3] и [4]), снабжённые недостающими отношениями эквивалентности, отождествляющими элементы (a, b) с одинаковыми координатами.

3.4. Замечание. Основной смысл наличия отношений эквивалентности $\delta M_i{}^C$ в определении комплекса состоит в том, чтобы гарантировать определимость проекций π_{M_i}. Структуру комплекса можно далее обобщать, смягчая условия на отношения $\delta M_i{}^C$. До тех пор, пока проекции π_{M_i} будут определимы, будут иметь место все дальнейшие результаты. Однако, можно ослабить требования ещё сильнее, как, например, в определении композиции структур, где определено лишь одно из отношений

δM_i, и, соответственно, лишь одна из проекций, а вторая заменена возможностью элементарного вложения в ограничение структуры на каждый класс эквивалентности. В большинстве случаев, многие из представленных ниже результатов будут в некотором виде переноситься на такие ослабления.

Также представленную здесь структуру можно обобщать, ослабив требование на дизъюнктность сигнатур. В таком случае будет необходимо изменить требования (g_i). Вероятно, это можно сделать с помощью некоторых условий, которые помогут различать, с какой из структур пришло заданное отношение R, подобно тому, как это делается в композициях структур.

3.5. Описанную выше структуру комплекса можно естественным образом обобщить на произвольные конечные наборы $\overline{\mathcal{M}} := \langle \mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n \rangle$ структур попарно дизъюнктных предикатных языков $L_{\mathcal{M}_i}$, заменив бинарное отношение E на аналогичное n-арное отношение, которое будет представлять собой гиперграф. Несложно заметить, что структуры, являющиеся комплексами в таком обобщённом смысле, эквивалентны структурам, являющимся комплексами, порождёнными комплексом, порождённым меньшим набором структур $\langle \mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{n-1} \rangle$ и структурой $\mathcal{M}_n$. Имея это ввиду, в дальнейшем будем говорить, что структура $\mathcal{C}$ является комплексом, порождённым $\overline{\mathcal{M}}$, если её можно представить как комплекс, аналогичным образом последовательно порождённый структурами из этого набора.

3.6. Предложение. *Пусть $\mathcal{C}$ — комплекс, порождённый $\overline{\mathcal{M}}$.*

1) *Если $s : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ — элементарное вложение, то существуют структуры $\mathcal{M}'_i$ и элементарные вложения $s_i : \mathcal{M}'_i \to \mathcal{M}_i$, такие, что $\mathcal{C}'$ — комплекс, порождённый $\langle \mathcal{M}'_1, \dots, \mathcal{M}'_n \rangle$. Причём для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ имеет место равенство $\pi_{M_i} \circ s = s_i \circ \pi_{M'_i}$.*
2) *Если $s : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ — элементарное вложение, то существуют структуры $\mathcal{M}'_i$ и элементарные вложения $s_i : \mathcal{M}_i \to \mathcal{M}'_i$, такие, что $\mathcal{C}'$ — комплекс, порождённый $\langle \mathcal{M}'_1, \dots, \mathcal{M}'_n \rangle$. Причём для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ имеет место равенство $\pi_{M'_i} \circ s = s_i \circ \pi_{M_i}$.*

Доказательство. Рассмотрим только случай 1), случай 2) доказывается аналогично.

Так как $\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C}$, в структуре $\mathcal{C}'$ также определимы соответствующие подмножества ${M_i}^C$ и отображения факторизации по соответствующим отношениям эквивалентности $\delta {M_i}^C$. Возьмём в качестве $\mathcal{M}'_i$ структуры $((\mathcal{C}' \upharpoonright L_{\mathcal{M}_i}) \upharpoonright {M_i}^C)/\delta {M_i}^C$.

Обозначим факторизации по $\delta {M_i}^C$ в структуре $\mathcal{C}'$ через $\pi_{M'_i}$. Отображения $s_i : M'_i \to M_i$ зададим по правилу $s_i(a) = \pi_{M_i}(s(\pi^{-1}_{M'_i}(a)))$. Такая конструкция корректно определена, так как s является элементарным вложением, а полный прообраз $\pi^{-1}_{M'_i}$ состоит из элементов, эквивалентных по отношению $\delta {M_i}^C$.

Несложно заметить, что построенное таким образом отображение s_i является элементарным вложением, так как для любого элемента $a \in \mathcal{M}'_i$ найдётся $c \in \mathcal{C}'$, такой, что $\pi_{M'_i}(c) = a$ и $\pi_{M_i}(s(c)) = s_i(a)$, а также, из-за того, что для всех $\bar{c} \in \mathcal{C}'$ и любой формулы ϕ языка $L_{\mathcal{M}_i}$ имеет место следующее:

$$\mathcal{M}'_i \models \phi(\pi_{M'_i}(\bar{c})) \iff \mathcal{C}' \models \phi^C(\bar{c}) \iff$$
$$\iff \mathcal{C} \models \phi^C(s(\bar{c})) \iff \mathcal{M}_i \models \phi(\pi_{M_i}(s(\bar{c}))).$$

Из построения структур $\mathcal{M}'_i$ следует, что $\mathcal{C}'$ — порождённый ими комплекс (соответствующее отношение E' восстанавливается по ${M_i}^C$ и $\delta {M_i}^C$). □

3.7. В дальнейшем, пронося какие-то объекты между комплексом $\mathcal{C}$, порождённым $\overline{\mathcal{M}}$, и структурами $\mathcal{M}_i$ с помощью отображений π_{M_i}, будем говорить о подъёмах, если мы сопоставляем объекту из $\mathcal{M}_i$ объект из $\mathcal{C}$, и спусках, если мы сопоставляем объекту из $\mathcal{C}$ объект из $\mathcal{M}_i$. Так, например, если ϕ — $L_{\mathcal{M}_i}$-формула, то её подъёмом мы будем называть соответствующюю ей формулу ϕ^C, или, если элементы $a \in \mathcal{M}_i$ и $b \in \mathcal{C}$ таковы, что $\pi_{M_i}(b) = a$, то будем говорить, что элемент a является спуском элемента b, а элемент b является подъёмом элемента a.

3.8. Предложение. *Пусть $\mathcal{C}$ — комплекс, порождённый $\overline{\mathcal{M}}$, тогда следующие свойства структуры $\mathcal{C}$ спускаются до свойств структур $\mathcal{M}_i$:*

(1) *насыщенность;*

Доказательство. Пусть p — некоторый тип теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_i)$. Его можно поднять до неполного типа p^C теории $\mathrm{Th}(\mathcal{C})$, заменив все формулы $\phi \in p$ на соответствующие им формулы ϕ^C. Из насыщенности $\mathcal{C}$ следует, что этот тип реализуется в $\mathcal{C}$ некоторым кортежем $\bar{c}$, а из свойств π_{M_i} следует, что кортеж $\pi_{M_i}(\bar{c})$ реализует тип p в $\mathcal{M}_i$, что означает насыщенность модели $\mathcal{M}_i$. □

(2) *минимальность;*

Доказательство. Пусть $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ — произвольная $L_{\mathcal{M}_i}$-формула, и $\bar{a} \in \mathcal{M}_i$ — некоторый кортеж. Тогда $\phi(\mathcal{M}_i, \bar{a}) = \pi_{M_i}(\phi^C(\mathcal{C}, \bar{c}))$, где $\bar{c} \in \mathcal{C}$ — произвольный кортеж, такой, что $\pi_{M_i}(\bar{c}) = \bar{a}$. Так как структура $\mathcal{C}$ минимальна, то множество $\phi^C(\mathcal{C}, \bar{c})$ либо конечно, либо коконечно. Так как π_{M_i} — сюръекция, тем же свойством обладает и множество $\phi(\mathcal{M}_i, \bar{a})$. □

(3) *сильная минимальность;*

Доказательство. Сильная минимальность эквивалентна минимальности каждой достаточно насыщенной структуры, что легко следует из пунктов (1) и (2). □

(4) *малость теории;*

Доказательство. Очевидно, что для любой $L_{\mathcal{M}_i}$-формулы ϕ множества $(\neg\phi)^C(\mathcal{C})$ и $\neg\phi^C(\mathcal{C})$ совпадают, а значит, если теория $\mathcal{M}_i$ не является малой, т.е. имеет несчётное множество типов, то теория $\mathrm{Th}(\mathcal{C})$ имеет несчётное множество попарно несовместных неполных типов, поднимающих типы теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_i)$, и, как следствие, также не является малой. □

(5) *κ-стабильность*

Доказательство. Пусть некоторая $\mathcal{M}_i$ не является κ-стабильной. Тогда найдётся множество $A \subseteq M_i$ такое, что $|A| < \kappa$ и $S_{\mathcal{M}_i}(A) > \kappa$. Зафиксируем произвольное поднятие этого множества $A^C \subseteq C$ и рассмотрим поднятия $L_{\mathcal{M}_i}(A)$-формул, в которых каждая константа a заменяется константой a^C. Очевидно, что различные типы p из $S_{\mathcal{M}_i}(A)$ поднимаются до различных неполных типов p^C, а значит $S_{\mathcal{C}}(A^C) > \kappa$. □

В общем случае, ни одно из этих свойств не поднимается со структур $\mathcal{M}_i$ и графа Γ_E до структуры $\mathcal{C}$.

3.9. Пример. Пусть $\mathcal{M}_1$ — счётная структура сигнатуры $(<, P)$, где $<$ — плотный линейный порядок без максимальных и минимальных элементов, а P — одноместный предикат, окрашивающий все элементы, и $\mathcal{M}_2$ — счётное множество с пустой сигнатурой. Пусть $f : M_2 \to M_1$ — сюръекция, такая, что прообраз любого элемента состоит ровно из двух элементов. Очевидно, что обе структуры $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, а также граф Γ_{E^f} насыщены, счётно категоричны и имеют малые теории.

Рассмотрим порождённый ими комплекс $\mathcal{C}$, такой, что интерпретация $<$ совпадает с отношением $<^C$, поднятым с $\mathcal{M}_1$, и есть возрастающая неограниченная последовательность элементов $a_n \in \mathcal{M}_1$, такая, что в прообразах, под действием π_{M_1}, у каждого из них предикатом P окрашен лишь один элемент, а в прообразах всех остальных элементов окрашены оба элемента. Очевидно, что эта структура эквивалентна $(\mathbb{Q}, <, \mathbb{N})$ — множеству рациональных чисел со стандартным порядком и предикатом, окрашивающим натуральные числа, которая, как известно, не является насыщенной и имеет континуум типов.

4 Финитная эквивалентность множеств

4.1. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая структура, $A \subseteq M$ — произвольное множество. Введём отношение частичного предпорядка на подмножествах $U, V \subseteq M^n$, говоря, что $U \preccurlyeq_{\mathrm{fin}} V$, если для любой $L^n_{\mathcal{M}}(A)$-формулы η из конечности множества $\eta(\mathcal{M}) \cap V$ следует конечность множества $\eta(\mathcal{M}) \cap U$. Будем также рассматривать усиленную версию этого отношения, говоря, что $U \leqslant_{\mathrm{fin}} V$, если $U \preccurlyeq_{\mathrm{fin}} V$ и для любой $L^n_{\mathcal{M}}(A)$-формулы η из $\eta(\mathcal{M}) \cap V = \varnothing$ следует $\eta(\mathcal{M}) \cap U = \varnothing$.

4.2. Будем говорить, что множества $U, V \subseteq M^n$ *финитно эквивалентны (относительно A)* и писать $U \equiv_{\text{fin}} V$, если $U \preccurlyeq_{\text{fin}} V$ и $V \preccurlyeq_{\text{fin}} U$. Заметим, что это условие эквивалентно тому, что для любой $L^n_{\mathcal{M}}(A)$-формулы η множество $\eta(\mathcal{M}) \cap U$ бесконечно тогда и только тогда, когда множество $\eta(\mathcal{M}) \cap V$ бесконечно. Для удобства, говоря о $L^n_{\mathcal{M}}(A)$-формулах, будем писать $U \equiv_{\text{fin}} \phi(\bar{x})$ и $\psi(\bar{x}) \equiv_{\text{fin}} \phi(\bar{x})$, имея в виду $U \equiv_{\text{fin}} \phi(\mathcal{M})$ и $\psi(\mathcal{M}) \equiv_{\text{fin}} \phi(\mathcal{M})$, соответственно. Также заметим, что для $L^n_{\mathcal{M}}(A)$-формул финитная эквивалентность $\phi(\bar{x}) \equiv_{\text{fin}} \psi(\bar{x})$ может быть записана в виде

$$\mathcal{M} \models \exists^\infty \bar{x}[\eta(\bar{x}) \land \phi(\bar{x})] \iff \mathcal{M} \models \exists^\infty \bar{x}[\eta(\bar{x}) \land \psi(\bar{x})].$$

4.3. Теорема. *Пусть $\phi(\bar{x}), \psi(\bar{x})$ — $L^n_{\mathcal{M}}(A)$-формулы, определяющие бесконечные множества. Если $\phi(\bar{x}) \equiv_{\text{fin}} \phi'(\bar{x})$ и $\psi(\bar{x}) \equiv_{\text{fin}} \psi'(\bar{x})$, то:*

(1) $\phi(\bar{x}) \land \psi(\bar{x}) \equiv_{\text{fin}} \phi'(\bar{x}) \land \psi'(\bar{x})$;
(2) $\phi(\bar{x}) \lor \psi(\bar{x}) \equiv_{\text{fin}} \phi'(\bar{x}) \lor \psi'(\bar{x})$;
(3) $\neg\phi(\bar{x}) \equiv_{\text{fin}} \neg\phi'(\bar{x})$;
(4) $\exists y \phi(y, \bar{x}) \equiv_{\text{fin}} \exists y \phi'(y, \bar{x})$;
(5) $\forall y \phi(y, \bar{x}) \equiv_{\text{fin}} \forall y \phi'(y, \bar{x})$;
(6) *если $\phi(\bar{x}) \vdash_{\mathrm{Th}(\mathcal{M})} \psi(\bar{x})$, то $\phi \equiv_{\text{fin}} \phi \land \psi$ и $\psi \equiv_{\text{fin}} \phi \lor \psi$.*

Доказательство. (1) Если множество решений формулы $\eta \land (\phi \land \psi)$ конечно, то, из конечности множества решений формулы $(\eta \land \psi) \land \phi$, следует конечность множества решений формулы $(\eta \land \psi) \land \phi'$, и, аналогично, конечность множества решений формулы $(\eta \land \phi') \land \psi'$, т.е. конечность множества решений формулы $\eta \land (\phi' \land \psi')$.
(2) Если множество решений формулы $\eta \land (\phi \lor \psi)$ конечно, то конечны и оба множества решений формул $\eta \land \phi$ и $\eta \land \psi$, а значит, конечны множества решений формул $\eta \land \phi'$ и $\eta \land \psi'$, т.е. конечно множество решений формулы $\eta \land (\phi' \lor \psi')$.
(3) Если множество решений формулы $\eta \land \neg\phi$ конечно, то конечно и множество решений формулы $\eta \land \neg\phi \land \neg\phi'$, при этом $\eta \land \neg\phi' \equiv (\eta \land \neg\phi \land \neg\phi') \lor (\eta \land \phi \land \neg\phi')$, а множество решений формулы $\phi \land \neg\phi'$ конечно, из конечности множества решений формулы $\phi' \land \neg\phi'$, т.е. множество решений формулы $\eta \land \neg\phi'$ конечно.
(4) В силу того, что множество решений формулы $\neg\phi \land \phi'$ конечно, если $\mathcal{M} \models \exists^\infty \bar{x}[\eta(\bar{x}) \land \exists y \phi(y, \bar{x})]$, то существует бесконечно много кортежей $a_1\bar{a}$, таких, что $\eta(\bar{a}) \land \phi(a_1, \bar{a}) \land \phi'(a_1, \bar{a})$, а значит $\mathcal{M} \models \exists^\infty \bar{x}[\eta(\bar{x}) \land \exists y \phi'(y, \bar{x})]$.
(5) Очевидно следует из (3) и (4).
(6) Очевидно, так как в этом случае $\phi \equiv_{\mathrm{Th}(\mathcal{M})} \phi \land \psi$ и $\psi \equiv_{\mathrm{Th}(\mathcal{M})} \phi \lor \psi$. □

4.4. Замечание. Заметим, что теоретико-множественные аналоги пунктов (2) и (6) верны и для произвольных множеств, в то время как аналоги пунктов (1) и (3) могут не выполняться. Например, аналог пункта (3) не выполнен, если $\mathcal{M} = (\mathbb{Q}, <)$, $A = M$ и U и U' — дополнения к последовательностям, сходящимся к различным числам. Также отметим, что аналог пункта (1) выполнен в некотором частном случае, а именно, если $U \equiv_{\text{fin}} V$ — некоторые множества и $\phi \equiv_{\text{fin}} \psi$ — некоторые формулы, то $U \cap \phi \equiv_{\text{fin}} V \cap \psi$.

Заметим также, что отношение $\equiv_{\text{fin}}$ отождествляет между собой все конечные множества, а также отождествляет между собой все коконечные множества. Более того, множество U конечно тогда и только тогда, когда $U \equiv_{\text{fin}} \varnothing$ относительно $\varnothing$, однако аналогичное утверждение для коконечных множеств не имеет места, например множества U и U' из предыдущего замечания финитно эквивалентны M, хотя и не являются коконечными.

Также важно отметить, что, хотя пункт (5) показывает, что финитная эквивалентность выдерживает отбрасывание фиктивных свободных переменных, она может не выдерживать введение новых фиктивных переменных.

5 Комплексы, допускающие спуск формул

5.1. Пусть $\mathcal{C}$ — комплекс, порождённый структурами $\overline{\mathcal{M}}$. Рассмотрим множество C^n. Каждое из множеств $M_i{}^C$ задаёт естественное разбиение C^n на 2^n определимых дизъюнктных *сегментов* с помощью формул $\lambda_i^\delta(\bar{x}) := \bigwedge_{\delta(k)=1} M_i{}^C(x_k) \wedge \bigwedge_{\delta(k)=0} \neg M_i{}^C(x_k)$, где $\delta \in 2^n$.

Если ϕ — $L^n_{\mathcal{C}}(C)$-формула, будем обозначать символом ϕ_i^δ её сегмент $\phi \wedge \lambda_i^\delta$. Будем обозначать с помощью $|\delta|$ число координат, при которых $\delta(k) = 1$.

Если $\bar{x} \in C^n$ — некоторый кортеж, то $\bar{x}^\delta$ — подкортеж длины $|\delta|$ кортежа $\bar{x}$, состоящий из элементов x_k, таких, что $\delta(k) = 1$.

Каждый из сегментов $\lambda_i^\delta(\mathcal{C})$ можно естественно спроектировать на $M_i^{|\delta|}$, забыв про координаты, в которых $\delta(k) = 0$, и подействовав на оставшиеся координаты отображением π_{M_i}. В дальнейшем, когда мы будем применять π_{M_i} к какому-либо подмножеству C^n, целиком лежащему в одном из сегментов, мы будем иметь в виду именно такую покоординатную проекцию.

Заметим, что если $p \in S^n(\mathrm{Th}(\mathcal{C}))$ — некоторый n-тип, то для любого i существует ровно один индекс $\delta_i(p) \in 2^n$, такой, что $\lambda_i^{\delta_i(p)} \in p$.

5.2. Будем говорить, что комплекс $\mathcal{C}$ *правильный*, если для любой $L^n_{\mathcal{C}}$-формулы ϕ и любого её сегмента ϕ_i^δ образ определяемого им подмножества $\phi_i^\delta(\mathcal{C}) \subset C^n$ под действием каждого из отображений π_{M_i} финитно эквивалентен некоторой $L^{|\delta|}_{\mathcal{M}_i}$-формуле ψ.

Синтаксически это условие означает, что для любой $L^{|\delta|}_{\mathcal{M}_i}$-формулы η выполняется

$$\mathrm{Th}(\mathcal{C}) \vdash \exists^\infty_{\delta M_i} \bar{x}[\phi_i^\delta(\bar{x}) \wedge \eta^C(\bar{x}^\delta)] \iff \mathrm{Th}(\mathcal{C}) \vdash \exists^\infty_{\delta M_i} \bar{x}[\psi^C(\bar{x}^\delta) \wedge \eta^C(\bar{x}^\delta)].$$

5.3. Будем говорить, что комплекс $\mathcal{C}$ *сильно правильный*, если для любой $L_{\mathcal{C}}^{n+m}$-формулы ϕ, любого m-типа $p \in S^m(\mathrm{Th}(\mathcal{C}))$ и любого индекса $\delta \in 2^n$ найдётся $L_{\mathcal{M}_i}^{|\delta|+|\delta_i(p)|}$-формула ψ, такая, что для любого типа $q \in S(\mathrm{Th}(\mathcal{C}))$ и любой $L_{\mathcal{M}_i}^{|\delta|+|\delta_i(q)|}$-формулы η выполняется:

$$\mathrm{Th}(\mathcal{C}) \cup p(\bar{y}) \cup q(\bar{z}) \ \vdash\ \exists^{\infty}_{\delta M_i}\bar{x}[\phi_i^{\delta}(\bar{x},\bar{y}) \wedge \eta^C(\bar{x}^{\delta},\bar{z}^{\delta_i(q)})] \iff$$
$$\iff \mathrm{Th}(\mathcal{C}) \cup p(\bar{y}) \cup q(\bar{z}) \ \vdash\ \exists^{\infty}_{\delta M_i}\bar{x}[\psi^C(\bar{x}^{\delta},\bar{y}^{\delta_i(p)}) \wedge \eta^C(\bar{x}^{\delta},\bar{z}^{\delta_i(q)})].$$

Семантически это условие означает, что для любого кортежа $\bar{c} \in \mathcal{C}$, реализующего тип p, множество $\pi_{M_i}(\phi_i^{\delta}(\mathcal{C}),\bar{c})$ финитно эквивалентно (относительно $\mathcal{M}_i$, или, говоря иначе, относительно любого подмножества $A \subset M_i$) $L_{\mathcal{M}_i}(\pi_{M_i}(\bar{c}^{\delta_i(p)}))$-формуле ψ.

Очевидно, что сильная правильность комплекса влечёт его правильность.

5.4. Пусть теперь $\mathcal{C}$ — (сильно) правильный комплекс.

Определим отображение $\pi^*_{M_i}$, сопоставляющее $L_{\mathcal{C}}$-формуле ϕ и индексу δ, (а также типу p, в случае сильной правильности) множество $\pi^*_{M_i}(\phi,\delta)$ (или $\pi^*_{M_i}(\phi,p,\delta)$) всех $L_{\mathcal{M}_i}$-формул ψ, которым финитно эквивалентны проекции $\pi_{M_i}(\phi_i^{\delta}(\mathcal{C}))$, а также отображение $\dot{\pi}^*_{M_i}$, сопоставляющее им множество $\dot{\pi}^*_{M_i}(\phi,\delta) \subseteq \pi^*_{M_i}(\phi,\delta)$ (аналогично $\dot{\pi}^*_{M_i}(\phi,p,\delta) \subseteq \pi^*_{M_i}(\phi,p,\delta)$) тех формул ψ, для которых $\pi_{M_i}(\phi_i^{\delta}(\mathcal{C})) \leqslant_{\mathrm{fin}} \psi$, т.е. $\pi_{M_i}(\phi_i^{\delta}(\mathcal{C})) \subseteq \psi(\mathcal{M}_i)$. Если из контекста понятно, о каком индексе δ (и каком типе p) идёт речь, будем опускать его в записи $\pi^*_{M_i}(\phi)$ и $\dot{\pi}^*_{M_i}(\phi)$ соответственно.

Легко видеть, что, если $\pi^*_{M_i}(\phi) \cap \pi^*_{M_i}(\psi) \neq \varnothing$, то $\pi^*_{M_i}(\phi) = \pi^*_{M_i}(\psi)$, так как $\pi^*_{M_i}(\phi)$ представляет собой целый $\equiv_{\mathrm{fin}}$-класс.

5.5. Предложение. *Свойство комплекса быть (сильно) правильным сохраняется при переходе к элементарно эквивалентным структурам, более того, отображения $\pi^*_{M_i}$ и $\dot{\pi}^*_{M_i}$ не зависят от выбора структуры.*

Доказательство. Это очевидно следует из синтаксических формулировок, так как они не зависят от выбора структуры. □

5.6. Пусть $A \subseteq C$ — произвольное подмножество и $p \in S^n(A)$ — некоторый n-тип. Распространим отображения $\pi^*_{M_i}$ и $\dot{\pi}^*_{M_i}$ на типы теории $\mathrm{Th}(\mathcal{C})$, положив $\pi^*_{M_i}(p) := \bigcup_{\phi\in p}\pi^*_{M_i}(\phi)$ и $\dot{\pi}^*_{M_i}(p) := \bigcup_{\phi\in p}\dot{\pi}^*_{M_i}(\phi)$.

Несложно заметить, что в случае, когда все множества $\pi_{M_i}(\phi_i^{\delta_i(p)}(\mathcal{C}))$ бесконечны, имеет место равенство $\pi^*_{M_i}(p) = \dot{\pi}^*_{M_i}(p)$.

5.7. Предложение *Для любого типа $p \in S^n(A)$, множество $\dot{\pi}^*_{M_i}(p)$ является $|\delta_i(p)|$-типом теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_i)$ над $\pi_{M_i}(A \cap M_i^C)$, причём для любого кортежа $\bar{c} \in \mathcal{C}$, реализующего тип p, его проекция $\pi_{M_i}(\bar{c}^{\delta_i(p)})$ реализует тип $\dot{\pi}^*_{M_i}(p)$.*

Доказательство. Пусть $\phi_1,\phi_2 \in p$, и $\psi_1 \in \dot{\pi}^*_{M_i}(\phi_1)$, $\psi_2 \in \dot{\pi}^*_{M_i}(\phi_2)$. Так как $\phi_1 \wedge \phi_2 \in p$ и из выбора ψ_i следует, что $\phi_1 \wedge \phi_2(\mathcal{C}) \subset \psi_1^C \wedge \psi_2^C(\mathcal{C})$, имеем $\psi_1^C \wedge \psi_2^C \in p$. Но $\pi_{M_1}(\psi_1^C \wedge \psi_2^C(\mathcal{C})) = \psi_1 \wedge \psi_2(\mathcal{M}_i)$, т.е. ψ_1 и ψ_2 совместны и $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \dot{\pi}^*_{M_i}(p)$.

С другой стороны, зафиксируем некоторое поднятие $A^C \subset A$ множества $\pi_{M_i}(A \cap M_i^C)$. Пусть ϕ — произвольная $L_{\mathcal{M}_i}^{|\delta_i(p)|}(\pi_{M_i}(A \cap M_i^C))$-формула и ϕ^C — её поднятие с параметрами из A^C, тогда либо $\phi^C(\bar{x}^{\delta_i(p)}) \in p$, либо $\neg\phi^C(\bar{x}^{\delta_i(p)}) \in p$, но очевидно, что $\phi \in \dot{\pi}^*_{M_i}(\phi^C(\bar{x}^{\delta_i(p)}))$ и $\neg\phi \in \dot{\pi}^*_{M_i}(\neg\phi^C(\bar{x}^{\delta_i(p)}))$, т.е. либо $\phi \in \dot{\pi}^*_{M_i}(p)$, либо $\neg\phi \in \dot{\pi}^*_{M_i}(p)$. □

Заметим, что в случае, когда одно из множеств $\pi_{M_i}(\phi_i^{\delta_i(p)}(\mathcal{C}))$ конечно, множество $\pi^*_{M_i}(p)$ представляет собой объединение $\dot{\pi}^*_{M_i}(p)$ с классом алгебраических формул.

5.8. Зафиксируем некоторые наборы индексов $\delta_i^1 \in 2^n$ и $\delta_i^2 \in 2^m$, такие, что $|\delta_i^1| = |\delta_i^2|$, где $1 \leqslant i \leqslant |\overline{\mathcal{M}}|$. Будем говорить, что $L_{\mathcal{C}}^n(A)$-формула ϕ_1 и $L_{\mathcal{C}}^m(A)$-формула ϕ_2 *проективно эквивалентны (в направлениях δ_i^j)* и писать $\phi \equiv_\pi \psi$, если $\pi^*_{M_i}(\phi_1, \delta_i^1) = \pi^*_{M_i}(\phi_2, \delta_i^2)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant |\overline{\mathcal{M}}|$.

Легко видеть, что если $\phi \equiv_{\text{fin}} \psi$, то $\phi \equiv_\pi \psi$ в любых направлениях $\delta_i^1 = \delta_i^2$.

5.9. Будем говорить, что типы $p_1, p_2 \in S(A)$ *проективно эквивалентны* и писать $p_1 \equiv_\pi p_2$, если для любых формул $\phi_1 \in p_1$ и $\phi_2 \in p_2$ найдутся формулы $\psi_1 \in p_1$ и $\psi_2 \in p_2$, такие, что $\phi_1 \equiv_\pi \psi_2$ и $\phi_2 \equiv_\pi \psi_1$.

5.10. Будем говорить, что (сильно) правильный комплекс $\mathcal{C}$ *регулярен*, если количество элементов в любом наборе попарно финитно не эквивалентных, но проективно эквивалентных формул от n переменных, ограничено сверху константой $k(n)$, зависящей от числа переменных.

5.11. Теорема. *Если $\mathcal{C}$ — регулярный (сильно) правильный комплекс, то число элементов в любом наборе неглавных (над A) проективно эквивалентных n-типов не превосходит $k(n)$.*

Доказательство. Пусть $p_1, \ldots, p_m$ — набор из проективно эквивалентных неглавных n-типов. Зафиксируем произвольный набор дизъюнктных формул $\phi_1, \ldots \phi_m$, таких, что $\phi_i \in p_i$. Так как типы p_i неглавные, для каждой из формул ϕ_i хотя бы одно из множеств $\pi_{M_j}(\phi_i(\mathcal{C}))$ бесконечно. При этом, так как типы p_i проективно эквивалентны, можно считать, что для каждого j все множества $\pi_{M_j}(\phi_i(\mathcal{C}))$ конечны или бесконечны одновременно.

Обозначим множество индексов j, таких, что $\pi_{M_j}(\phi_i(\mathcal{C}))$ бесконечны, через J, и выберем для каждого ϕ_i и $j \in J$ произвольную формулу $\phi_{i,j} \in \pi^*_{M_j}(\phi_i)$. Очевидно, что $\bigwedge_{j \in J} \phi_{i,j}^C \in p_k$ для любого k. Рассмотрим формулы $\phi_i' := \bigvee_k (\phi_k \wedge \neg(\bigwedge_{j \in J} \phi_{i,j}^C)) \vee \phi_i$.

Легко видеть, что $\pi_{M_j}(\phi_i'(\mathcal{C})) \equiv_{\text{fin}} \bigcup_k \pi_{M_j}(\phi_k(\mathcal{C})) = \pi_{M_j}(\bigvee_k \phi_k(\mathcal{C}))$ для всех j, т.е. $\phi_i' \equiv_\pi \phi_k'$ при всех $1 \leqslant i, k \leqslant m$. С другой стороны $\phi_i' \not\equiv_{\text{fin}} \phi_k'$ при $i \neq k$, так как $\phi_i' \wedge \phi_i \wedge (\bigwedge_{j \in J} \phi_{k,j}^C)) \in p_i$ и, как следствие, бесконечно, но $\phi_k' \wedge \phi_i \wedge (\bigwedge_{j \in J} \phi_{k,j}^C))$ пусто. А значит, $m \leqslant k(n)$. □

5.12. Следствие. *Пусть $\mathcal{C}$ — регулярный правильный комплекс, порождённый $\overline{\mathcal{M}}$. Тогда теория* $\mathrm{Th}(\mathcal{C})$ *мала, если и только если малы все теории* $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_i)$.

5.13. Следствие. *Пусть $\mathcal{C}$ — регулярный сильно правильный комплекс, порождённый $\overline{\mathcal{M}}$. Тогда $\mathcal{C}$ к-стабилен, если и только если к-стабильны все теории* $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_i)$.

5.14. Будем говорить, что комплекс $\mathcal{C}$ *строгий*, если для любой формулы ϕ и любого индекса δ существует минимальная формула ψ, такая, что $\pi_{M_i}(\phi_i^\delta(\mathcal{C})) \leqslant_{\mathrm{fin}} \psi$. Здесь минимальность берётся относительно $\vdash_{\mathrm{Th}(\mathcal{M}_i)}$-выводимости, т.е. для любой формулы ψ', если $\pi_{M_i}(\phi_i^\delta(\mathcal{C})) \leqslant_{\mathrm{fin}} \psi'$, то $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_i) \vdash \forall \bar{x}[\psi(\bar{x}) \to \psi'(\bar{x})]$.

Легко видеть, что строгость комплекса не теряется при переходе к элементарно эквивалентным структурам.

По аналогии с сильной правильностью, будем говорить, что комплекс $\mathcal{C}$ *сильно строгий*, если для любой формулы ϕ с параметрами $\bar{c}$ и любого индекса δ существует минимальная формула ψ с параметрами $\pi_{M_i}(\bar{c})$, зависящая только от типа $\mathrm{tp}(\bar{c})$ и, такая, что $\pi_{M_i}(\phi_i^\delta(\mathcal{C})) \leqslant_{\mathrm{fin}} \psi$.

5.15. Теорема. *Если строгий комплекс $\mathcal{C}$, порождённый $\overline{\mathcal{M}}$, является атомным, то и все $\mathcal{M}_i$ являются атомными.*

Доказательство. Пусть $\bar{a} \in \mathcal{M}_i$ — некоторый кортеж, возьмём произвольный кортеж $\bar{c} \in \mathcal{C}$, такой, что $\pi_{M_i}(\bar{c}) = \bar{a}$. Из простоты $\mathcal{C}$ следует, что существует полная формула ϕ, такая, что $\mathcal{C} \models \phi(\bar{c})$. Покажем, что минимальная формула ψ с условием $\pi_{M_i}(\phi(\mathcal{C})) \leqslant_{\mathrm{fin}} \psi$ является главной формулой.

Заметим, что минимальность формулы ψ означает, что множество $\eta(\mathcal{M}_i) \cap \pi_{M_i}(\phi(\mathcal{C}))$ пусто, тогда и только тогда, когда $\psi \equiv_{\mathrm{Th}(\mathcal{M}_i)} \neg\eta \wedge \psi$.

Пусть η — произвольная $L_{\mathcal{M}_i}$-формула. Если $\eta(\mathcal{M}_i) \cap \pi_{M_i}(\phi(\mathcal{C}))$ непусто, то из полноты ϕ следует, что $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \eta^C(\mathcal{C})$, а значит $\neg\eta(\mathcal{M}_i) \cap \pi_{M_i}(\phi(\mathcal{C}))$ пусто, и, как следствие $\neg\eta \wedge \psi$ пусто. Аналогично если $\eta(\mathcal{M}_i) \cap \pi_{M_i}(\phi(\mathcal{C}))$ пусто, то множество решений формулы $\neg\eta \wedge \psi$ пусто. Таким образом формула ψ полна и $\mathcal{M}_i \models \psi(\bar{a})$, а значит, в силу произвольности выбора кортежа $\bar{a}$, модель $\mathcal{M}_i$ является атомной. □

5.16. Предложение. *Если комплекс $\mathcal{C}$, порождённый $\overline{\mathcal{M}}$, является сильно строгим, а его обогащение некоторым кортежем $\langle \mathcal{C}, \bar{c} \rangle$ является атомным, то и все обогащения $\langle \mathcal{M}_i, \pi_{M_i}(\bar{c}) \rangle$ являются атомными.*

Доказательство повторяет доказательство теоремы 5.15. □

5.17. Пример. Пусть все структуры $\mathcal{M}_i$ таковы, что число конечных определимых подмножеств $\mathcal{M}_i^n$ ограниченно сверху константами, зависящими от n и i, и $\mathcal{C}$ — правильный комплекс, порождённый этими структурами так, что $\dot{\pi}_{M_i}(\phi, \delta) \neq \varnothing$ для всех i, ϕ, δ. Тогда комплекс $\mathcal{C}$ является строгим.

Доказательство. Действительно, конечность числа определимых подмножеств $\mathcal{M}_i^n$ означает конечность числа определимых множеств в каждом $\equiv_{\mathrm{fin}}$-классе. Так как множество $\dot{\pi}^*_{M_i}(\phi)$ очевидно замкнуто относительно конъюнкции формул, в $\dot{\pi}^*_{M_i}(\phi)$ найдётся формула, задающая минимальное определимое множество. $\square$

5.18. Предложение. *Пусть $\mathcal{C}$ — сильно правильный комплекс, порождённый структурами $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, такой, что граф Γ_E не представляется в виде дизъюнктного объединения $\Gamma_E^0 \sqcup \Gamma_E^1$ конечного графа Γ_E^0 и полного графа Γ_E^1, а также не существует формулы $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ и типа p, таких, что $\phi(\bar{x}, p) \equiv_\pi \neg\phi(\bar{x}, p)$. Тогда $\mathcal{C}$ (сильно) минимальна, если (сильно) минимальны структуры $\mathcal{M}_i$ и граф Γ_E.*

Доказательство. Предположим, что структура $\mathcal{C}$ не является минимальной, тогда существует формула $\phi(x, \bar{c})$, такая, что оба множества $\phi(\mathcal{C}, \bar{c})$ и $\neg\phi(\mathcal{C}, \bar{c})$ бесконечны. Так как граф Γ_E минимален и, из условия, ни одно из отношений $\delta {M_i}^C$ не отождествляет почти все элементы E, то при любом отображении π_{M_i} у каждого элемента может быть лишь конечное число прообразов, а значит, при любом $i \in \{1, 2\}$ множества $\pi_{M_i}(\phi(\mathcal{C}, \bar{a}))$ и $\pi_{M_i}(\neg\phi(\mathcal{C}, \bar{a}))$ одновременно бесконечны.

По условию, $\pi^*_{\mathcal{M}_i}(\phi) \neq \pi^*_{\mathcal{M}_i}(\neg\phi)$ для некоторого i.

С другой стороны, в минимальной структуре любое бесконечное подмножество плотно относительно любой коконечной формулы. А значит, $\pi^*_{\mathcal{M}_i}(\phi) = \pi^*_{\mathcal{M}_i}(\neg\phi)$, что невозможно по условию. $\square$

5.19. Теорема. *Пусть $\mathcal{C}$ — комплекс, порождённый $\overline{\mathcal{M}}$, и структура $\mathcal{C}' = \langle \mathcal{C}, P_\alpha \rangle_{\alpha \in A = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n}$ — такое обогащение структуры $\mathcal{C}$ семейством предикатов, что $P_\alpha \subset ({M_i}^C)^{\deg P_\alpha}$ для всех $\alpha \in A_i$. Тогда $\mathcal{C}'$ — комплекс, порождённый структурами $\langle \mathcal{M}_i, P_\alpha \rangle_{\alpha \in A_i}$, где P_α спущены со структуры $\mathcal{C}'$, причём:*

- *если комплекс $\mathcal{C}$ правильный, и для каждого P_α существует семейство $L_{\mathcal{C}}$-формул $\phi_{i,\alpha}(\bar{x}, \bar{y})$, таких, что $P_\alpha(\bar{x}) \equiv_{\mathrm{fin}} \phi_\alpha(\bar{x}, \bar{y})$, и $\neg P_\alpha(\bar{x}) \equiv_{\mathrm{fin}} \neg\phi_\alpha(\bar{x}, \bar{y})$, то комплекс $\mathcal{C}'$ — правильный;*
  если при этом комплекс $\mathcal{C}$ строгий, а $P_\alpha(\bar{x}) \equiv \phi_\alpha(\bar{x})$, то комплекс $\mathcal{C}'$ — строгий.
- *если комплекс $\mathcal{C}$ сильно правильный, и для каждого P_α существует семейство $L_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$-формул $\phi_\alpha(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c}_\alpha)$ с параметрами $\bar{c}_\alpha$, таких, что $P_\alpha(\bar{x}) \equiv_{\mathrm{fin}} \phi_\alpha(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c}_\alpha)$, $\neg P_\alpha(\bar{x}) \equiv_{\mathrm{fin}} \neg\phi_\alpha(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c}_\alpha)$, и все типы $\dot{\pi}^*_{\langle \mathcal{M}_i, P_\alpha \rangle_{\alpha \in A_i}}(\mathrm{tp}(\bar{c}_\alpha))$ алгебраические, то комплекс $\mathcal{C}'$ — сильно правильный;*
  если при этом комплекс $\mathcal{C}$ сильно строгий, а $P_\alpha(\bar{x}) \equiv \phi_\alpha(\bar{x}, \bar{c}_\alpha)$, то комплекс $\mathcal{C}'$ — сильно строгий.

Доказательство. Тот факт, что структура $\mathcal{C}'$ является комплексом, очевиден.

Так как $P_\alpha \equiv_{\text{fin}} \phi_\alpha(\mathcal{C})$ и $\neg P_\alpha \equiv_{\text{fin}} \neg\phi_\alpha(\mathcal{C})$, множества, выделяемые предикатом P_α и формулой ϕ_α, отличаются не более чем на конечное число элементов, а значит, аналогично теореме 4.3, любая $L_{\mathcal{C}'}$-формула ψ финитно эквивалентна формуле ψ', полученной заменой вхождений предикатов P_α на формулы ϕ_α. В силу того, что проекции финитно эквивалентных множеств финитно эквивалентны, это доказывает случай правильного комплекса.

В случае сильно правильного комплекса, в силу алгебраичности типа $\dot{\pi}^*_{\langle\mathcal{M}_i,P_\alpha\rangle_{\alpha\in A_i}}(\mathrm{tp}(\bar{c}_\alpha))$, имеется изолирующая его алгебраическая формула $\psi_\alpha(\bar{x})$, тогда любую $L_{\mathcal{M}_i}(\mathcal{M}_i)$-формулу $\phi(\bar{x},\bar{c}'_\alpha)$, зависящую от кортежа $\bar{c}'_\alpha := \pi_{M_i}(\bar{c}_\alpha)$, можно заменить на соответствующую $L_{\langle\mathcal{M}_i,P_\alpha\rangle_{\alpha\in A_i}}(\mathcal{M}_i)$-формулу $\exists\bar{y}[\phi(\bar{x},\bar{y})\wedge\psi_\alpha(\bar{y})]$, не зависящую от кортежа $\bar{c}'_\alpha$, но имеющую то же множество решений. Это доказывает случай сильно правильного комплекса.

Строгость комплексов в соответствующих ситуациях тривиальна. $\square$

References

[1] S.V. Sudoplatov, *Distributions of countable models of disjoint unions of Ehrenfeucht theories*, Lobachevskii J. Math., **42**:1 (2021), 195–205. Zbl 1498.03072

[2] S.V. Sudoplatov, *Combinations of structures*, Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat., **24** (2018), 82–101. Zbl 1409.03002

[3] D.Yu. Emel'yanov, B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Algebras of binary formulas for compositions of theories*, Algebra Logic, **59**:4 (2020), 295–312. Zbl 1484.03053

[4] F. Harary, Graph theory, Addison-Wesley, Reading, Mass. etc., 1969. Zbl 0182.57702

[5] A. Pillay, An introduction to stability theory, Clarendon Press, Oxford, 1983. Zbl 0526.03014

Ivan Alexandrovich Emelianenkov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: i.emelianenkov@yandex.ru