S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 1552–1589 (2023) УДК 517.958+517.984.5
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.096 MSC 35Q35, 35P99

ЗАДАЧА О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Д.А. Закора

Представлено А.Е. Мамонтовым

Abstract: In this paper, we study the problem on small motions and normal oscillations of a homogeneous mixture of several viscous compressible fluids filling a bounded domain of three-dimensional space with an infinitely smooth boundary. The boundary condition of slippage without shear stresses is considered. It is proved that the essential spectrum of the problem is a finite set of segments located on the real axis. The discrete spectrum lies on the real axis, with the possible exception of a finite number of complex conjugate eigenvalues. The spectrum of the problem contains a subsequence of eigenvalues with a limit point at infinity and a power-law asymptotic distribution. The asymptotic behavior of solutions to the evolution problem is studied.

Keywords: mixture of fluids, compressible viscous fluid, spectral problem, essential spectrum, discrete spectrum, solution asymptotics.

Zakora, D.A., The problem on small motions of a mixture of viscous compressible fluids.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2023-1799.

Поступила 17 января 2023 г., опубликована 28 декабря 2023 г.

1 Введение

1.1. Формулировка нелинейной динамической задачи. Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$ заполнена гомогенной смесью нескольких вязких сжимаемых жидкостей. Введём систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится внутри области Ω. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный вне области Ω.

Баротропное движение смеси $n \geqslant 2$ жидкостей описывается следующей системой уравнений[1]:

$$R_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + R_i(\mathbf{u}_i \cdot \nabla)\mathbf{u}_i = \operatorname{div}\Big(- P_i I_3 + \sum_{j=1}^n \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j)\Big) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + R_i \mathbf{F}_i,$$

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} + \operatorname{div}(R_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \Omega, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(t,x) = \big(u_{i1}(t,x); u_{i2}(t,x); u_{i3}(t,x)\big)^\tau$ $(x = (x_1; x_2; x_3) \in \Omega)$ — поле скоростей i-й компоненты смеси (символом τ обозначена операция транспонирования), $R_i = R_i(t,x)$ — плотность, $P_i = P_i(t,x)$ — давление, $a_{ij} = a_{ji} \geqslant 0$ — коэффициенты, отвечающие за интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси, $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(t,x)$ — известные поля внешних массовых сил. Тензоры напряжений $\mathbf{T}_i$ и тензоры вязких напряжений $\mathbf{S}_i$ определяются равенствами[2]:

$$\mathbf{T}_i := -P_i I_3 + \mathbf{S}_i, \quad \mathbf{S}_i := \sum_{j=1}^n \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j), \quad \sigma^{ij}(\mathbf{u}) := \lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}) I_3 + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u}), \tag{2}$$

где I_3 — единичная матрица в $\mathbb{R}^3$, μ_{ij}, λ_{ij} — коэффициенты матриц вязкостей $\mathbf{M} := \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Lambda} := \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Матрицы вязкостей подчинены следующим условиям:

$$\mathbf{M} > 0, \quad 2\mathbf{M} + 3\mathbf{\Lambda} > 0. \tag{3}$$

Предположим, что давление в каждой компоненте смеси пропорционально плотности:

$$P_i = c_i R_i, \quad c_i > 0, \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \Omega, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

---

[1] Пусть A, B — матрицы, действующие в $\mathbb{R}^m$. Положим $\operatorname{div} A := \sum_{i=1}^m \mathbf{e}_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}$, определим операцию $A\!:\!B := \operatorname{tr}(A^\tau B) = \sum_{i,j=1}^m A_{ij} B_{ij}$.

[2] Для векторного поля $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)^\tau$ определим набор коэффициентов $e_{lk}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)$ $(l, k = 1, 2, 3)$ тензора скоростей деформаций $e(\mathbf{u})$. Через $\operatorname{tr} e(\mathbf{u}) := \sum_{s=1}^3 e_{ss}(\mathbf{u}) \equiv \operatorname{div}\mathbf{u}$ обозначим след матрицы $e(\mathbf{u})$.

Линеаризованная относительно состояния покоя система (1) будет рассматриваться с граничными условиями непротекания для каждой компоненты смеси и нулевыми касательными напряжениями:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{T}_i \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (t, x) \in [0, +\infty) \times \partial\Omega, \quad i = 1, \ldots, n, \quad (5)$$

где символ $\times$ означает векторное произведение. В дальнейшем граничное условие (5) с учётом (2) будет переписано в более удобной для вычислений форме.

Система уравнений (1) — один из многих вариантов описания движения многокомпонентных жидкостных смесей и моделирует движения гомогенной смеси вязких сжимаемых жидкостей, многоскоростная модель (подробности см. в [49, 52, 40, 43]). В частности, это означает, что в каждой точке пространства присутствуют все компоненты смеси, которые находятся в одной фазе, но имеют каждая свою локальную скорость движения; взаимодействие между компонентами осуществляется через обмен импульсом и вязкое трение. При этом учет межкомпонентного вязкого трения посредством рассмотрения недиагональных матриц вязкостей $\mathbf{M}$ и $\mathbf{\Lambda}$ в (2) во многом определяет специфику исследуемой модели динамики смесей. Отметим, что если матрицы вязкостей $\mathbf{M}$ и $\mathbf{\Lambda}$ диагональны и в (1) все $a_{ij} = 0$, то мы будем иметь дело с n независимыми системами уравнений Навье–Стокса для каждой компоненты и ясно, что в этом случае все результаты, полученные для изотермических уравнений Навье–Стокса прямо переносятся на многокомпонентный случай с диагональными матрицами вязкостей. Если же матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{\Lambda}$ не диагональны, то в каждом i-ом уравнении (1_1) присутствуют старшие производные от полей скоростей всех компонент смеси и, в этом случае, соответствующего переноса теории уравнений Навье–Стокса на многокомпонентный случай мы уже ожидать не можем. Необходимо разрабатывать принципиально новые методы и подходы для исследования уравнений динамики смесей с недиагональными матрицами вязкостей.

Математическое исследование многоскоростных моделей движения многокомпонентных сред с недиагональными матрицами вязкостей началось относительно недавно. Одной из первых работ, в которой были получены результаты о разрешимости в многомерном случае, является работа J. Frehse, S. Goj и J. Málek [25]. В данной работе доказана разрешимость задачи Коши для системы без конвективных членов в случае общей зависимости давлений от плотностей компонент. В [26] этими же авторами получен результат о единственности слабых решений задачи Коши при дополнительных предположениях, что массовые силы и члены, учитывающие обмен импульсом между различными компонентами равны нулю. В работе J. Frehse и W. Weigant [27] доказано существование и единственность классического решения краевой задачи для квазистационарной системы без конвективных слагаемых со специальными граничными условиями. Результаты о существовании решений с учетом конвективных слагаемых, но в специфическом случае треугольных матриц вязкостей, получены Н.А. Кучер, А.Е. Мамонтовым и Д.А. Прокудиным для многоскоростной многотемпературной стационарной модели без учета диссипативных слагаемых в уравнениях энергии в работе [37], А.Е. Мамонтовым и Д.А. Прокудиным для многоскоростной однотемпературной стационарной модели с учетом диссипативных слагаемых в уравнении энергии в [41]. Результаты для смежных многомерных моделей получены в [15, 16, 17, 18, 21, 28, 48, 63]. Простейшие потоки многокомпонентных сред с недиагональными матрицами вязкостей (течение Пуазейля, течение Куэтта и др.) рассмотрены в [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 47]. Численному исследованию задач динамики многокомпонентных сред с недиагональными матрицами вязкостей посвящены работы [1, 12, 39, 55, 58]. Спектральный анализ одной линейной модели с классическими граничными условиями проведен в [62].

Цель данной работы — исследование задачи о нормальных колебаниях линеаризованной относительно состояния покоя системы (1)–(5), исследование эволюционной задачи, в частности, получение асимптотических формул для решения в случае внешних нагрузок специального вида. Основные результаты изложены в теоремах 1 и 2.

1.2. Линеаризация динамической задачи. Предположим, что рассматриваемая система находится в равновесии, то есть $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$, $\mathbf{F}_i = -g\mathbf{e}_3$ $(i = 1, \ldots, n)$, где g — ускорение свободного падения. Из (1) и (4) найдём, что стационарные плотности ρ_{i0} в компонентах смеси распределены по следующему закону $\rho_{i0} = \rho_{i0}(0)\exp(-gc_i^{-1}x_3)$, где $\rho_{i0}(0)$ — стационарная плотность i-й компоненты смеси в начале координат.

Будем считать, что $R_i(t,x) = \rho_{i0}(x_3) + \widetilde{\rho}_i(t,x)$, $\mathbf{F}_i(t,x) = -g\mathbf{e}_3 + \mathbf{f}_i(t,x)$, где $\widetilde{\rho}_i$ — так называемая динамическая плотность, $\mathbf{f}_i$ — малое поле внешних массовых сил, наложенное на гравитационное поле. Предполагая, что $\mathbf{u}_i$, $\widetilde{\rho}_i$, $\mathbf{f}_i$ — малые одного порядка малости, и учитывая

$$\frac{c_i\nabla\widetilde{\rho}_i + \widetilde{\rho}_i g\mathbf{e}_3}{\rho_{i0}} = \frac{c_i\rho_{i0}\nabla\widetilde{\rho}_i - c_i\widetilde{\rho}_i\nabla\rho_{i0}}{\rho_{i0}^2} = \nabla\left(\frac{c_i\widetilde{\rho}_i}{\rho_{i0}}\right),$$

придём к линеаризованной системе:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{u}_i}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{c_i\widetilde{\rho}_i}{\rho_{i0}}\right) + \frac{1}{\rho_{i0}}\operatorname{div}\sum_{j=1}^{n}\sigma^{ij}(\mathbf{u}_j) + \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \mathbf{f}_i,\\
&\frac{\partial\widetilde{\rho}_i}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho_{i0}\mathbf{u}_i), \quad (t,x)\in[0,+\infty)\times\Omega, \quad i = 1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{6}$$

2 Постановка задачи и основные результаты

Осуществим в системе (6) замену $c_i^{1/2}\rho_{i0}^{-1/2}\widetilde{\rho}_i(t,x) =: \rho_i(t,x)$ с целью её симметризации. В результате с учётом (2) получим основную систему уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{c_i^{1/2}\rho_i}{\rho_{i0}^{1/2}}\right) - \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j + \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \mathbf{f}_i,\\ &\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = -\frac{c_i^{1/2}}{\rho_{i0}^{1/2}}\operatorname{div}(\rho_{i0}\mathbf{u}_i), \quad (t,x)\in[0,+\infty)\times\Omega, \quad i=1,\ldots,n,\end{aligned} \tag{7}$$

где $L_{ij} := -\mu_{ij}\Delta - (\mu_{ij}+\lambda_{ij})\nabla\mathrm{div}$ — дифференциальные операторы теории упругости. К системе (7) добавим начальные условия:

$$\mathbf{u}_i(0,x) = \mathbf{u}_i^0(x), \quad \rho_i(0,x) = \rho_i^0(x), \quad i=1,\ldots,n. \tag{8}$$

Далее система (7) с граничными условиями (5) и начальными условиями (8) будет трактоваться в виде задачи Коши с замкнутым оператором $\mathcal{A}$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0. \tag{9}$$

Разыскивая решения однородного ($\mathcal{F}(t)\equiv 0$) уравнения из (9) в виде $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, ξ — амплитудный элемент, придём к следующей спектральной задаче:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi\in\mathcal{D}(\mathcal{A})\subset\mathcal{H}. \tag{10}$$

При исследовании задач (9), (10) будем предполагать, что *граница $\partial\Omega$ области Ω не является поверхностью вращения*. Это условие призвано несколько упростить вычисления.

Определение 1. *Существенным спектром замкнутого оператора $\mathcal{A}$ называется множество*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) := \bigl\{\lambda\in\mathbb{C} : \textit{оператор } \mathcal{A}-\lambda\mathcal{I} \textit{ не является фредгольмовым}\bigr\}.$$

Положим $\mathbf{\Phi} := \{\delta_{ij}c_i\rho_{i0}(x_3)\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{R} := \{\delta_{ij}\rho_{i0}(x_3)\}_{i,j=1}^n$.

Теорема 1. *Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ расположен на действительной положительной полуоси за исключением, быть может, конечного числа комплексно сопряжённых собственных значений конечной алгебраической кратности, а*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \bigl\{\lambda\in\mathbb{C} :\ \det\bigl(\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}) - \mathbf{\Phi}\bigr) = 0, \ \ x\in\overline{\Omega}\bigr\}.$$

Множество $\sigma(\mathcal{A})\setminus\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и содержит подпоследовательность с асимптотическим поведением

$$\lambda_k^{(\infty)}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}^{-2/3}k^{2/3}(1+o(1)), \quad k\longrightarrow\infty,$$

$$\mathcal{C} := \frac{1}{6\pi^2}\int\limits_{\Omega}\Bigl(\mathrm{tr}\bigl(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\bigr)^{-3/2} + 2\mathrm{tr}\bigl(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\bigr)^{-3/2}\Bigr)\,d\Omega.$$

Замечание 1. *Из условий* (3) *следует, что* $2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}>0$. *Отсюда и из* $\mathbf{\Phi}>0$ *теперь видно, что множество* $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *представляет собой объединение* n *отрезков, расположенных на положительной полуоси.*

Замечание 2. *Из теоремы* 1 *следует, что в однородной системе* (7) *существует не более конечного числа осциллирующих собственных колебаний, все остальные собственные колебания являются апериодически затухающими.*

В терминах норм операторов, которые будут введены далее, можно сформулировать условие, достаточное для отсутствия осциллирующих собственных колебаний. В исходных терминах формулировка этого условия весьма громоздка, однако сводится к тому, что нижние грани матриц вязкостей $\mathbf{M}$ *и* $2\mathbf{M}+3\mathbf{\Lambda}$*, совпадающие с наименьшими собственными значениями этих матриц, "достаточно большие".*

В случае $n=1$ с некоторыми изменениями спектральная задача для системы уравнений (6) с граничными условиями прилипания либо с условиями нулевых напряжений на границе исследована в [51]. При этом исследование опиралось на результаты работы [31], в которой бесконечная дифференцируемость границы $\partial\Omega$ существенна. Настоящая работа следует тому же плану. Отметим, что в [23] с использованием результатов работы [4] исследован существенный спектр линеаризованного оператора Навье–Стокса в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ $(m\geqslant 2)$ с C^2-гладкой границей. При этом техника псевдо-дифференциальных операторов не применялась.

Через $\mathbf{L}_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ будем обозначать пространства векторных и скалярных функций, суммируемых с квадратами по области Ω, через $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$, $\mathbf{W}_2^2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ — пространства Соболева векторных и скалярных функций со стандартными скалярными произведениями и нормами, а $\mathbb{R}_+:=[0,+\infty)$.

В следующем определении для краткости будем понимать поля $\mathbf{u}_i$ и функции ρ_i $(i=1,\ldots,n)$ из (7) как функции одной переменной t со значениями в гильбертовых пространствах $\mathbf{L}_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно.

Определение 2. *Поля* $\mathbf{u}_i\in C^1(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_2(\Omega))\cap C(\mathbb{R}_+;\mathbf{W}_2^2(\Omega))$ $(i=\overline{1,n})$, *и функции* $\rho_i\in C^1(\mathbb{R}_+;L_2(\Omega))\cap C(\mathbb{R}_+;W_2^1(\Omega))$ $(i=1,\ldots,n)$, *называются решением начально-краевой задачи* (7), (5), (8), *если выполнены начальные условия* (8), *выполнены уравнения* (7) *и граничные условия* (5) *при всех* $t\in\mathbb{R}_+$.

Теорема 2. *1) Пусть* $\mathbf{u}_j^0\in\mathbf{W}_2^2(\Omega)$[3] *и удовлетворяют граничным условиям* (5), $\rho_j^0\in W_2^1(\Omega)$ $(j=1,\ldots,n)$, *а поля* $\mathbf{f}_j$ $(j=1,\ldots,n)$ *локально гёльдеровы, то есть для любого* $T\geqslant 0$ *существуют положительные*

[3] В формулировке теоремы использован индекс j, поскольку через i обозначена мнимая единица.

константы $K(T) > 0$, $k(T) \in (0,1]$ *такие, что*

$$\|\mathbf{f}_j(t) - \mathbf{f}_j(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant K(T)|t-s|^{k(T)} \quad \forall\, 0 \leqslant t, s \leqslant T, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда начально-краевая задача (7), (5), (8) *имеет единственное решение в смысле определения* 2.

2) Пусть дополнительно поля $\mathbf{f}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ *имеют следующий вид:*

$$\mathbf{f}_j(t) = \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{f}_{j,k}, \quad \mathbf{f}_{j,k} \in \mathbf{L}_2(\Omega), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Тогда существует $\omega > 0$ *и такая константа* $N > 0$, *зависящая от начальных данных и норм полей* $\mathbf{f}_{j,k}$, *что при всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *будет выполнено неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\left\|\mathbf{u}_j(t) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{u}_{j,k}\right\|^2 + \left\|\rho_j(t) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\rho_{j,k}\right\|^2\right) \leqslant N e^{-2\omega t},$$

где поля $\mathbf{u}_{j,k}$ *и функции* $\rho_{j,k}$ $(j = 1, \ldots, n)$ *при каждом* $k = 0, \ldots, m$ *являются решением следующей краевой задачи:*

$$\frac{1}{\rho_{j0}}\sum_{l=1}^{n} L_{jl}\mathbf{u}_{l,k} + \nabla\left(\frac{c_j^{1/2}\rho_{j,k}}{\rho_{j0}^{1/2}}\right) - \frac{1}{\rho_{j0}}\sum_{l=1}^{n} a_{jl}(\mathbf{u}_{l,k} - \mathbf{u}_{j,k}) - i\sigma_k\mathbf{u}_{j,k} = \mathbf{f}_{j,k},$$
$$\frac{c_j^{1/2}}{\rho_{j0}^{1/2}}\operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_{j,k}) - i\sigma_k\rho_{j,k} = 0, \quad x \in \Omega, \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$\mathbf{u}_{j,k}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{T}_j\mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega, \quad j = 1, \ldots, n.$$

3 Операторная формулировка задачи

3.1. Основные пространства и вспомогательные операторы. Введём векторное гильбертово пространство с весом $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{j0})$ $(j = 1, \ldots, n)$ со скалярным произведением и нормой:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})} := \int_\Omega \rho_{j0}(x_3)\mathbf{u}(x)\cdot\overline{\mathbf{v}(x)}\, d\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})} = \int_\Omega \rho_{j0}(x_3)|\mathbf{u}(x)|^2\, d\Omega,$$

а также подпространство гильбертова пространства $L_2(\Omega)$ единичной коразмерности:

$$L_{2,\rho_{j0}}(\Omega) := \left\{f \in L_2(\Omega) : (f, \rho_{j0}^{1/2})_{L_2(\Omega)} = 0\right\}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Введём основное гильбертово пространство $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ с естественно определённым на нём скалярным произведением и соответствующей нормой, где

$$\mathcal{H}_1 := \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{j0}) = \big\{\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1; \ldots; \mathbf{u}_n)^\tau : \ \mathbf{u}_j \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{j0}), \ j = 1, \ldots, n\big\},$$

$$\mathcal{H}_2 := \bigoplus_{j=1}^{n} L_{2,\rho_{j0}}(\Omega) = \big\{\rho := (\rho_1; \ldots; \rho_n)^\tau : \ \rho_j \in L_{2,\rho_{j0}}(\Omega), \ j = 1, \ldots, n\big\}.$$

Заметим, что из (2), в силу очевидного равенства $I_3\mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$, следует

$$(\mathbf{T}_i\mathbf{n})\times\mathbf{n} = \Big(-P_i I_3 + \sum_{j=1}^{n} \big(\lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) I_3 + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\big)\Big)\mathbf{n}\times\mathbf{n} = 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}\times\mathbf{n}$$

для любого $x \in \partial\Omega$ $(i = 1, \ldots, n)$. Обозначим через τ_s $(s = 1, 2)$ единичные векторы, касательные к поверхности $\partial\Omega$ и ортогональные между собой. Тогда с учётом сказанного выше граничные условия (5) для задачи (7) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad s = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Введём теперь, учитывая (5) и (11), оператор $L : \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ по следующему закону:

$$L\mathbf{u} := \left(\frac{1}{\rho_{10}} \sum_{j=1}^{n} L_{1j}\mathbf{u}_j; \ldots; \frac{1}{\rho_{n0}} \sum_{j=1}^{n} L_{nj}\mathbf{u}_j\right)^\tau, \tag{12}$$

$$\mathcal{D}(L) := \Big\{\mathbf{u} \in \mathcal{H}_1 : \ \mathbf{u}_i \in \mathbf{W}_2^2(\Omega), \quad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0 \ \ (x \in \partial\Omega),$$
$$2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = 0 \ \ (x \in \partial\Omega), \quad s = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, n\Big\}.$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (3) *и граница $\partial\Omega$ не является поверхностью вращения. Тогда оператор L самосопряжён и положительно определён в $\mathcal{H}_1$, $L^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$*[4]*. Энергетическое пространство $\mathcal{H}_L$ оператора L выражается по следующей формуле:*

$$\mathcal{H}_L = \mathcal{D}(L^{1/2}) = \bigoplus_{j=1}^{n} \Big\{\mathbf{u}_j \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \ \ \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} = 0 \ \ (x \in \partial\Omega)\Big\}.$$

[4] Через $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ обозначен класс линейных компактных операторов, действующих из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$, $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}) := \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Доказательство. Рассмотрим на $\mathcal{H}_L \subset \mathcal{H}_1$ полуторалинейную форму

$$L(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) \operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{v}_i}) + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u}_j) : e(\overline{\mathbf{v}_i})\Big)\, d\Omega \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j) : e(\overline{\mathbf{v}_i})\, d\Omega. \qquad (13)$$

Покажем, что при выполнении условий (3) (плотно определённая) квадратичная форма $L(\cdot,\cdot)$ положительно определена в $\mathcal{H}_1$ и замкнута (см. [33, гл. VI, § 1, п. 3]). Для этого проведём вспомогательные вычисления.

Введём обозначения

$$K := \big\{K_{ij} \equiv K(\lambda_{ij},\mu_{ij})\big\}_{i,j=1}^{n}, \quad \xi := \big(\xi_1;\xi_2,\ldots;\xi_n\big)^{\tau}, \qquad (14)$$

$$K_{ij} := \begin{pmatrix} \lambda_{ij}+2\mu_{ij} & \lambda_{ij} & \lambda_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{ij} & \lambda_{ij}+2\mu_{ij} & \lambda_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{ij} & \lambda_{ij} & \lambda_{ij}+2\mu_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} \end{pmatrix},$$

$$\xi_j := \big(e_{11}(\mathbf{u}_j); e_{22}(\mathbf{u}_j); e_{33}(\mathbf{u}_j); \sqrt{2}e_{12}(\mathbf{u}_j); \sqrt{2}e_{13}(\mathbf{u}_j); \sqrt{2}e_{23}(\mathbf{u}_j)\big)^{\tau},$$

и вычислим квадратичную форму симметричной $(6n \times 6n)$-матрицы K:

$$\begin{aligned}
\big(K\xi,\xi\big) &= \sum_{i,j=1}^{n} \big(K_{ij}\xi_j,\xi_i\big) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\begin{pmatrix} \lambda_{ij}\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) + 2\mu_{ij}e_{11}(\mathbf{u}_j) \\ \lambda_{ij}\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) + 2\mu_{ij}e_{22}(\mathbf{u}_j) \\ \lambda_{ij}\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) + 2\mu_{ij}e_{33}(\mathbf{u}_j) \\ 2\sqrt{2}\mu_{ij}e_{12}(\mathbf{u}_j) \\ 2\sqrt{2}\mu_{ij}e_{13}(\mathbf{u}_j) \\ 2\sqrt{2}\mu_{ij}e_{23}(\mathbf{u}_j) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}_i) \\ e_{22}(\mathbf{u}_i) \\ e_{33}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2}e_{12}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2}e_{13}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2}e_{23}(\mathbf{u}_i) \end{pmatrix} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg(\lambda_{ij}\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j)\operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{u}_i}) + 2\mu_{ij}\sum_{k=1}^{3} e_{kk}(\mathbf{u}_j)e_{kk}(\overline{\mathbf{u}_i}) + \\
&\qquad + 4\mu_{ij}\big(e_{12}(\mathbf{u}_j)e_{12}(\overline{\mathbf{u}_i}) + e_{13}(\mathbf{u}_j)e_{13}(\overline{\mathbf{u}_i}) + e_{23}(\mathbf{u}_j)e_{23}(\overline{\mathbf{u}_i})\big)\Bigg) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\lambda_{ij}\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j)\operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{u}_i}) + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u}_j) : e(\overline{\mathbf{u}_i})\Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\lambda_{ij}\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) I_3 + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\Big) : e(\overline{\mathbf{u}_i}) = \sum_{i=1}^{n} \Bigg(\sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j) : e(\overline{\mathbf{u}_i}) \Bigg).
\end{aligned} \qquad (15)$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
\bigl(K\xi,\xi\bigr) &= \sum_{i,j=1}^{n}\biggl(\Bigl(\lambda_{ij}+\frac{2}{3}\,\mu_{ij}\Bigr)\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)I_3+2\mu_{ij}\Bigl(e(\mathbf{u}_j)-\frac{1}{3}\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)I_3\Bigr)\biggr):e(\overline{\mathbf{u}_i})\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\biggl(\Bigl(\lambda_{ij}+\frac{2}{3}\,\mu_{ij}\Bigr)\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)\operatorname{tr}e(\overline{\mathbf{u}_i})+\\
&\qquad\qquad +2\mu_{ij}\Bigl(e(\mathbf{u}_j)-\frac{1}{3}\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)I_3\Bigr):\Bigl(e(\overline{\mathbf{u}_i})-\frac{1}{3}\operatorname{tr}e(\overline{\mathbf{u}_i})I_3\Bigr)\biggr)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\Bigl(\lambda_{ij}+\frac{2}{3}\,\mu_{ij}\Bigr)\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)\operatorname{tr}e(\overline{\mathbf{u}_i})+\\
&\quad +2\sum_{l,k=1}^{3}\biggl(\sum_{i,j=1}^{n}\mu_{ij}\Bigl(e_{lk}(\mathbf{u}_j)-\frac{\delta_{lk}}{3}\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)\Bigr)\Bigl(e_{lk}(\overline{\mathbf{u}_i})-\frac{\delta_{lk}}{3}\operatorname{tr}e(\overline{\mathbf{u}_i})\Bigr)\biggr).
\end{aligned}
$$

Из (3) следует, что матрица K неотрицательна. Допустим, что $\bigl(K\xi,\xi\bigr)=0$. Обозначим через $\gamma(\mathbf{M})>0$, $\gamma(\boldsymbol{\Lambda}+2/3\mathbf{M})>0$ нижние грани соответственно матриц $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\Lambda}+2/3\mathbf{M}$, и найдём из последнего соотношения, что

$$
\bigl(K\xi,\xi\bigr)\geqslant\gamma\Bigl(\boldsymbol{\Lambda}+\frac{2}{3}\,\mathbf{M}\Bigr)\sum_{j=1}^{n}\bigl|\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)\bigr|^2+2\sum_{l,k=1}^{3}\gamma(\mathbf{M})\sum_{j=1}^{n}\Bigl|e_{lk}(\mathbf{u}_j)-\frac{\delta_{lk}}{3}\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)\Bigr|^2.
$$

Отсюда имеем $\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)=0$ для каждого $j=1,\dots,n$, то есть $e_{lk}(\mathbf{u}_j)=0$ $(l,k=1,2,3,\ j=1,\dots,n)$, а значит, $\xi=0$. Таким образом, существует такая константа $\gamma(K)>0$, что $\bigl(K\xi,\xi\bigr)\geqslant\gamma(K)\bigl(\xi,\xi\bigr)$ для любого $\xi\in\mathbb{C}^{6n}$. Последнее соотношение с учётом (14), (15) перепишем следующим образом:

$$
\sum_{i=1}^{n}\biggl(\sum_{j=1}^{n}\sigma^{ij}(\mathbf{u}_j):e(\overline{\mathbf{u}_i})\biggr)\geqslant\gamma(K)\sum_{i=1}^{n}e(\mathbf{u}_i):e(\overline{\mathbf{u}_i}). \tag{16}
$$

Поскольку граница $\partial\Omega$ не является поверхностью вращения, пространства $\bigl\{\mathbf{u}_j\in\mathbf{W}_2^1(\Omega):\ \mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n}=0\ \ (x\in\partial\Omega)\bigr\}$ не содержат жёсткие перемещения. Следовательно, для элементов этих пространств справедливо второе неравенство Корна (см. [50, гл. I, § 2, п. 2.2, теорема 2.5]). Из (13)–(16) и второго неравенства Корна найдём, что

$$
C\|\mathbf{u}\|^2_{\bigoplus_{j=1}^{n}\mathbf{W}_2^1(\Omega)}\geqslant L(\mathbf{u},\mathbf{u})\geqslant\gamma(K)C_K^{-2}\|\mathbf{u}\|^2_{\bigoplus_{j=1}^{n}\mathbf{W}_2^1(\Omega)}\quad\forall\,\mathbf{u}\in\mathcal{H}_L.
$$

Здесь C_K — константа из второго неравенства Корна, C — некоторая положительная константа. Из полученных неравенств следует, что плотно определённая квадратичная форма $L(\cdot,\cdot)$ положительно определена в $\mathcal{H}_1$ и замкнута (см. [33, гл. VI, § 1, п. 3]). По первой теореме о представлении (см. [33, гл. VI, § 2, теорема 2.1]) существует единственный самосопряжённый положительно определённый оператор L такой, что

$$L(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (L\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{D}(L), \ \ \mathbf{v} \in \mathcal{H}_L,$$
$$\mathcal{D}(L) = \big\{\mathbf{u} \in \mathcal{H}_L : \ \exists\, \mathbf{w} \in \mathcal{H}_1 : L(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{w},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} \ \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{H}_L\big\}.$$

Предположим, что элемент $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_L$ дважды непрерывно дифференцируем в области Ω, тогда с использованием тождества Бэтти (см. [53, гл. 24, формула (24.22)]) найдём (см. (2)), что для любого $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_L$

$$\begin{gathered}
(L\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} = L(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, dS \\
= \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} \Big(\lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}_i} + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\Big) dS \\
= \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} 2 \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \big(\tau_1(\tau_1 \cdot \overline{\mathbf{v}_i}) + \tau_2(\tau_2 \cdot \overline{\mathbf{v}_i})\big) dS.
\end{gathered} \tag{17}$$

Для элементов $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_L$, состоящих из финитных полей, отсюда найдём, что

$$(L\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_i\Big)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{i0})}.$$

Отсюда следует формула для $L\mathbf{u}$ (см. (12)), поскольку множество элементов из $\mathcal{H}_L$, состоящих из финитных полей, плотно в $\mathcal{H}_1$. Подставляя выражение для $L\mathbf{u}$ в (17), приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} 2 \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \big(\tau_1(\tau_1 \cdot \overline{\mathbf{v}_i}) + \tau_2(\tau_2 \cdot \overline{\mathbf{v}_i})\big) dS = 0.$$

Для элементов $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_L$ вида $\mathbf{v} = (\mathbf{0}; \ldots; \mathbf{v}_i; \ldots; \mathbf{0})^{\tau}$ отсюда найдём, что

$$2 \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = 0 \ \ (x \in \partial\Omega), \quad s = 1,2, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Таким образом, дважды дифференцируемое решение $\mathbf{u}$ операторного уравнения $L_1\mathbf{u} = \mathbf{w}$ является решением краевой задачи

$$\frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{w}_i, \quad x \in \Omega, \quad i = 1,\ldots,n,$$
$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad 2 \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad s = 1,2, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Элемент $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(L)$ — это в точности обобщённое решение (см. [53, гл. 11, определение 11.1]) указанной краевой задачи при $\mathbf{w}_i \in \mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{i0})$ $(i = \overline{1,n})$.

Из теоремы об априорных оценках (о нормальной разрешимости) (см. [54, теорема 2.2]) следует формула для $\mathcal{D}(L)$ (см. (12)). Обоснование возможности применения указанной теоремы об априорных оценках требует весьма громоздких вычислений. Здесь, как и в лемме 4, эти вычисления опущены, далее в пункте 4.2 в более сложной ситуации будут проведены аналогичные вычисления.

Компактность оператора L^{-1} следует из компактности вложения энергетического пространства $\mathcal{H}_L$ оператора L в основное пространство $\mathcal{H}_1$. Лемма доказана. $\square$

Введём оператор $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ по следующему закону:

$$T\mathbf{u} := \left(-\frac{1}{\rho_{10}}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_1);\ldots;-\frac{1}{\rho_{n0}}\sum_{j=1}^{n} a_{nj}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_n)\right)^{\tau}, \quad \mathcal{D}(T) := \mathcal{H}_1. \tag{18}$$

Лемма 2. *Оператор T ограничен и неотрицателен в $\mathcal{H}_1$.*

Доказательство. Напомним, что $a_{ij} = a_{ji} \geqslant 0$ $(i,j=1,\ldots,n)$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
\|T\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} &= \sum_{i=1}^{n}\Big\|-\frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i)\Big\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{i0})} = \sum_{i=1}^{n}\Big\|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i)\Big\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big(\|\mathbf{u}_j\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}+\|\mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\Big)\right)^2\\
&\leqslant n\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\Big(\|\mathbf{u}_j\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}+\|\mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\Big)^2\\
&\leqslant 4n^2\max_{i,j}\{a_{ij}^2\}\sum_{j=1}^{n}\|\mathbf{u}_j\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant \frac{4n^2\max_{i,j}\{a_{ij}^2\}}{\min_j\min_{x\in\Omega}\rho_{j0}(x_3)}\,\|\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1}\ \forall\,\mathbf{u}\in\mathcal{H}_1,
\end{aligned}$$

то есть оператор T ограничен в $\mathcal{H}_1$: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$[5]. Далее для любого $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_1$ имеем

$$\begin{aligned}
(T\mathbf{u},\mathbf{u})_{\mathcal{H}_1} &= -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\\
&= -\sum_{i>j} a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} - \sum_{i<j} a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\\
&= -\sum_{i>j} a_{ij}(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} - \sum_{j<i} a_{ji}(\mathbf{u}_i-\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_j)_{\mathbf{L}_2(\Omega)}
\end{aligned}$$

[5] Через $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ обозначена алгебра линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{L}(\mathcal{H}) := \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$.

$$= \sum_{i>j} a_{ij} \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \geqslant 0,$$

то есть оператор T самосопряжён и неотрицателен в $\mathcal{H}_1$. □

Введём оператор $B : \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ по следующему закону:

$$B\mathbf{u} := \left(-\frac{c_1^{1/2}}{\rho_{10}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{10}\mathbf{u}_1); \dots ; -\frac{c_n^{1/2}}{\rho_{n0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{n0}\mathbf{u}_n) \right)^{\tau}, \tag{19}$$

$$\mathcal{D}(B) := \bigoplus_{j=1}^{n} \Big\{ \mathbf{u}_j \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \ \operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j) \in \mathbf{L}_2(\Omega), \ \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} = 0 \ (x \in \partial\Omega) \Big\}.$$

Лемма 3. *Сопряжённый оператор* $B^* : \mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ *имеет вид*

$$B^*\rho = \left(\nabla\left(\frac{c_1^{1/2}\rho_1}{\rho_{10}^{1/2}} \right); \dots ; \nabla\left(\frac{c_n^{1/2}\rho_n}{\rho_{n0}^{1/2}} \right) \right)^{\tau}, \ \mathcal{D}(B^*) := \bigoplus_{j=1}^{n} \Big\{ W_2^1(\Omega) \cap L_{2,\rho_{j0}}(\Omega) \Big\}.$$

Доказательство. По определению сопряжённого оператора имеем

$$\mathcal{D}(B^*) = \big\{ \rho \in \mathcal{H}_2 : \ \exists \eta \in \mathcal{H}_2 : (B\mathbf{u}, \rho)_{\mathcal{H}_2} = (\mathbf{u}, \eta)_{\mathcal{H}_1} \ \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{D}(B) \big\},$$

а значит, $\rho \in \bigoplus_{j=1}^n \big\{ W_2^1(\Omega) \cap L_{2,\rho_{j0}}(\Omega) \big\} = \mathcal{D}(B^*)$. Отсюда теперь следует, что

$$(B\mathbf{u},\rho)_{\mathcal{H}_2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big(-\frac{c_j^{1/2}}{\rho_{j0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j), \rho_j \Big)_{L_{2,\rho_{j0}}(\Omega)} = -\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{c_j^{1/2}\overline{\rho_j}}{\rho_{j0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j)\, d\Omega$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} c_j^{1/2} \rho_{j0}^{1/2} \overline{\rho_j} (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n})\, dS + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \rho_{j0}\mathbf{u}_j \cdot \nabla\left(\frac{c_j^{1/2}\overline{\rho_j}}{\rho_{j0}^{1/2}} \right) d\Omega$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{u}_j, \nabla\left(\frac{c_j^{1/2}\rho_j}{\rho_{j0}^{1/2}} \right) \right)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})} = (\mathbf{u}, B^*\rho)_{\mathcal{H}_1} \ \ \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{D}(B), \ \rho \in \mathcal{D}(B^*).$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. $B^*BL^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$.

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу

$$\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{w}_i, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = g_i, \quad 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = h_{s,i}, \quad x \in \partial\Omega, \quad s = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n$$

и обозначим через $\mathcal{L}$ и $\mathcal{B}$ соответствующий матричный дифференциальный оператор и матрицу граничных условий.

Можно проверить, что матричное дифференциальное выражение $\mathcal{L}$ определяет невырожденную правильно эллиптическую по Дуглису–Ниренбергу систему, а граничное условие $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию дополнительности (см. [57, с. 379], [54]). Соответствующие вычисления, как и в лемме 1, здесь опущены. Из теоремы о нормальной разрешимости (см. [54, теорема 2.2]) следует, что существуют константы $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, не зависящие от $\mathbf{u}$, такие, что

$$C_1\|\mathbf{u}\|^2_{\oplus_{j=1}^n \mathbf{W}_2^2(\Omega)} \leqslant \|\mathcal{L}\mathbf{u}\|^2_{\oplus_{j=1}^n \mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant C_2\|\mathbf{u}\|^2_{\oplus_{j=1}^n \mathbf{W}_2^2(\Omega)} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{W}}_2^2(\Omega, \mathcal{B}), \tag{20}$$

где

$$\widetilde{\mathbf{W}}_2^2(\Omega, \mathcal{B}) := \big\{\mathbf{u} \in \mathcal{H}_1 :\ \mathbf{u}_j \in \mathbf{W}_2^2(\Omega), \quad \mathcal{B}\mathbf{u} = 0 \ \ (x \in \partial\Omega)\big\} = \mathcal{D}(L),$$

$$\|\mathbf{u}_j\|^2_{\mathbf{W}_2^2(\Omega)} := \sum_{l=1}^{3}\bigg(\|u_{jl}\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha u_{jl}\|^2_{L_2(\Omega)}\bigg), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Здесь и далее до конца доказательства леммы норма в пространстве $\mathbf{W}_2^2(\Omega)$ вводится, как описано выше. Символ D^α как обычно обозначает смешанную производную порядка α, где α соответствующий мультииндекс. Далее, из неравенства Эрлинга–Ниренберга (см. [13, с. 33]) следует, что существует константа $C_3 > 0$, не зависящая от $\mathbf{u}_j$, такая, что

$$\bigg\|\frac{\partial u_{jl}}{\partial x_k}\bigg\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C_3\|\mathbf{u}_j\|^2_{\mathbf{W}_2^2(\Omega)} \quad \forall\, \mathbf{u}_j \in \mathbf{W}_2^2(\Omega), \quad l, k = 1, 2, 3, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Пусть теперь $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(L) = \widetilde{\mathbf{W}}_2^2(\Omega, \mathcal{B})$. Из (20), (21), (19) и леммы 3 получим

$$\begin{aligned}
\|B^*B\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} &= \sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\bigg| -\nabla\bigg(\frac{c_j}{\rho_{j0}(x_3)}\operatorname{div}\big(\rho_{j0}(x_3)\mathbf{u}_j\big)\bigg)\bigg|^2 d\Omega \\
&\leqslant C_4\sum_{j=1}^{n}\|\mathbf{u}_j\|^2_{\mathbf{W}_2^2(\Omega)} = C_4\|\mathbf{u}\|^2_{\oplus_{j=1}^n \mathbf{W}_2^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_4C_1^{-1}\|\mathcal{L}\mathbf{u}\|^2_{\oplus_{j=1}^n \mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant C_4C_1^{-1}\max_{j=\overline{1,n},\ x\in\overline{\Omega}}\rho_{j0}(x_3)\|L\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1},
\end{aligned}$$

где $C_4 > 0$ не зависит от $\mathbf{u}$. Отсюда после замены $L\mathbf{u} = \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_1$ следует требуемое утверждение. $\square$

Введём оператор $A := L + T$ (см. (12), (18)). Из лемм 1, 2 и определения оператора B (см. (19)) следует, что $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(L^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$. Оператор B замыкаем, так как оператор B^* плотно определён (см. [33, гл. V, § 3, п. 1] и лемму 3). Следовательно, операторы $BA^{-1/2}$ и BA^{-1} ограниченно действуют из пространства $\mathcal{H}_1$ в пространство $\mathcal{H}_2$:

$$Q := BA^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), \quad BA^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2). \tag{22}$$

Лемма 5. *Оператор* $A^{-1/2}B^*$ *замыкаем, причем*

$$\overline{A^{-1/2}B^*} = Q^*, \quad Q^*|_{\mathcal{D}(B^*)} = A^{-1/2}B^*.$$

Аналогичные утверждения верны и для оператора $A^{-1}B^*$.

Доказательство. Учитывая $Q^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, имеем

$$(Q\mathbf{u}, \rho)_{\mathcal{H}_2} = (\mathbf{u}, A^{-1/2}B^*\rho)_{\mathcal{H}_1} = (\mathbf{u}, Q^*\rho)_{\mathcal{H}_1} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{H}_1, \quad \rho \in \mathcal{D}(B^*).$$

Отсюда следует $Q^*|_{\mathcal{D}(B^*)} = A^{-1/2}B^*$. Таким образом, оператор $A^{-1/2}B^*$ ограничен на $\mathcal{D}(B^*)$ и расширяется по непрерывности (можно считать, что замыкается) до ограниченного оператора Q^*. □

3.2. Операторная формулировка задачи. Наша цель — записать максимальную L_2-реализацию оператора системы (7) в виде операторной блок-матрицы с использованием введённых в (12), (18), (19), (22) операторов. Сужение максимальной L_2-реализации оператора системы (7) на линеал $\mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B^*)$ с использованием введённых операторов можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} A & B^* \\ -B & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{H}. \tag{23}$$

Покажем, что оператор $\mathcal{A}_0$ замыкаем и замыкание $\overline{\mathcal{A}_0}$ есть максимальный аккретивный оператор, то есть других замкнутых аккретивных расширений у оператора $\mathcal{A}_0$ нет. Это означает, что множество $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ является т.н. *ядром* (см. [33, гл. III, § 5, п. 3]) для максимальной L_2-реализации оператора системы (7). Таким образом, оператор $\overline{\mathcal{A}_0}$ и будет максимальной L_2-реализацией оператора системы (7). Подобные построения для операторных блоков проводились в работах А.А. Шкаликова [4, 46], Н.Д. Копачевского и Т.Я. Азизова [3], и др.

Лемма 6. *Оператор* $\mathcal{A}_0$ *замыкаем и* $\overline{\mathcal{A}_0} =: \mathcal{A}$ *— замкнутый максимальный аккретивный оператор, представимый в виде одной из следующих двух факторизаций:*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} := \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Q^* \\ -Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \equiv \\ \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ -QA^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & QQ^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1/2}Q^* \\ 0 & I \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{24}$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \Big\{ \xi = (\mathbf{u}; \rho)^\tau \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 : \ \mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho \in \mathcal{D}(A) \Big\}.$$

Доказательство. 1) Оператор $\mathcal{A}_0$, очевидно, плотно определён. Далее, легко проверить, что

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_0\xi, \xi)_{\mathcal{H}} = \|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} \geqslant 0 \quad \forall\, \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0),$$

т.е. оператор $\mathcal{A}_0$ аккретивен, а значит, замыкаем (см. [36, гл. I, § 4, п. 2]).

Построим замыкание $\overline{\mathcal{A}_0}$, используя включение $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$. Пусть

$$\xi_n := (\mathbf{u}_n; \rho_n)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \quad \xi_n \longrightarrow \xi := (\mathbf{u}; \rho)^\tau, \quad \mathcal{A}_0 \xi_n \longrightarrow \xi_0 := (\mathbf{u}_0; \rho_0)^\tau. \tag{25}$$

Отсюда имеем $\mathbf{u}_n + A^{-1}B^*\rho_n \in \mathcal{D}(A)$ и

$$\mathbf{u}_n + A^{-1}B^*\rho_n = \mathbf{u}_n + (BA^{-1})^*\rho_n \longrightarrow \mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho,$$
$$A(\mathbf{u}_n + A^{-1}B^*\rho_n) \longrightarrow \mathbf{u}_0.$$

Оператор A самосопряжён, а значит, замкнут, поэтому имеем включение $\mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho \in \mathcal{D}(A)$ и равенство $A(\mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho) = \mathbf{u}_0$.

Далее, из (25) следует, что $\mathbf{u}_n \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$, $\mathbf{u}_n \longrightarrow \mathbf{u}$, $-B\mathbf{u}_n \longrightarrow \rho_0$. Но оператор B, как отмечено выше, замыкаем, а значит, $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B})$ и $-\overline{B}\mathbf{u} = \rho_0$.

Таким образом, $\xi \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0})$ и $\overline{\mathcal{A}_0}\xi = \xi_0$, где

$$\overline{\mathcal{A}_0} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho) \\ -\overline{B}\mathbf{u} \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0}) = \Big\{ \xi = (\mathbf{u}; \rho)^\tau \in \mathcal{H} : \ \mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B}), \ \ \mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho \in \mathcal{D}(A) \Big\}.$$

Используем теперь включение $\mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$ (см. лемму 1 и (19)). Отсюда следует равенство $(BA^{-1})^* = (BA^{-1/2}A^{-1/2})^* = A^{-1/2}(BA^{-1/2})^* = A^{-1/2}Q^*$. Теперь из включения $\mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho = \mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$ и факта, что $\mathcal{D}(A^{1/2})$ линеал, следует, что $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(\overline{B})$. Таким образом, условие $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B})$ в описании множества $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0})$ можно опустить, а выражение $\overline{B}\mathbf{u}$ записать в виде $\overline{B}\mathbf{u} = (\overline{B}A^{-1/2})A^{1/2}\mathbf{u} = QA^{1/2}\mathbf{u}$. Из проведённых рассуждений теперь получим, что

$$\overline{\mathcal{A}_0} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho) \\ -QA^{1/2}\mathbf{u} \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0}) = \Big\{ \xi = (\mathbf{u}; \rho)^\tau \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 : \ \mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho \in \mathcal{D}(A) \Big\}.$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что множество $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ в (24) является естественной областью определения для каждой факторизации, обе факторизации определяют один и тот же оператор $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}_0}$.

2) Докажем, что замкнутый аккретивный оператор $\mathcal{A}$ максимален. Аккретивность оператора $\mathcal{A}$ следует из аккретивности $\mathcal{A}_0$, однако может быть проверена и непосредственно. Действительно, если $\xi = (\mathbf{u}; \rho)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, то $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A^{1/2})$. Отсюда и из факторизации (24) с симметричными крайними сомножителями найдём, что $\operatorname{Re}(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}} = \|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} \geqslant 0$ для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а значит, оператор $\mathcal{A}$ аккретивен. Для доказательства максимальности оператора $\mathcal{A}$ достаточно установить (см. [36, гл. I, § 4, п. 2, теорема 4.3]), что оператор $\mathcal{A}$ имеет отрицательные регулярные точки: $\rho(\mathcal{A}) \cap \{\lambda < 0\} \neq \varnothing$. Здесь $\rho(\mathcal{A})$ — резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$.

Действительно, при $\lambda \neq 0$ непосредственно проверяется (см. (28)), что

$$\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\lambda^{-1}Q^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - \lambda A^{-1} - \lambda^{-1}Q^*Q & 0 \\ 0 & -\lambda I \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} I & 0 \\ \lambda^{-1}Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \qquad (26)$$

Введём оператор-функцию $L(\lambda) := I - \lambda A^{-1} - \lambda^{-1}Q^*Q$. При $\lambda < 0$ (ограниченный) оператор $L(\lambda)$ самосопряжён и положительно определён, очевидно, а значит, существует, ограничен и задан на всём пространстве $\mathcal{H}_1$ оператор $L^{-1}(\lambda)$: $L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Из последней факторизации при $\lambda < 0$ тогда найдём, что существует

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ -\lambda^{-1}Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & -\lambda^{-1}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & \lambda^{-1}Q^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \qquad (27)$$
$$= \begin{pmatrix} A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & \lambda^{-1}A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)Q^* \\ -\lambda^{-1}QL^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & -\lambda^{-1}I - \lambda^{-2}QL^{-1}(\lambda)Q^* \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$
$$L(\lambda) = I - \lambda A^{-1} - \lambda^{-1}Q^*Q,$$

а значит, $\{\lambda < 0\} \subset \rho(\mathcal{A})$. □

Таким образом, начально краевую задачу (7), (5), (8) можно записать в виде задачи Коши (9) с замкнутым максимальным аккретивным оператором $\mathcal{A}$.

Замечание 3. *Формула* (27) *при всех* $\lambda \notin \sigma(L(\lambda)) \cup \{0\}$, *где* $\sigma(L(\lambda))$ — *спектр оператор-функции* $L(\lambda)$, *даёт представление для резольвенты оператора* $\mathcal{A}$. *Из* (27), *в частности, следует, что* $\sigma(\mathcal{A})\setminus\{0\} \subset \sigma(L(\lambda))$. *Более того, из факторизации* (26) *и теоремы о произведении фредгольмовых операторов (см.* [29, гл. XVII, § 3, теорема 3.1]*) следует, что* $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{ess}(L(\lambda))$. *Можно доказать, что* $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \sigma_{ess}(L(\lambda))$, *однако далее этот факт не понадобится.*

Замечание 4. *Приведём необходимые для дальнейшего факторизации Шура–Фробениуса операторных блоков с ограниченными операторными коэффициентами (см.* [56, гл. 1, § 1.6, предложение 1.6.2]*). Пусть* E_1, E_2 — *банаховы пространства. Пусть* $A_{kl} \in \mathcal{L}(E_l, E_k)$ $(k, l = 1, 2)$, $A_{22}^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$, $D_1 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$. *Если* $D_1^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$, *то существует и ограничен*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{pmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{pmatrix} \right)^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} D_1^{-1} & -D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \qquad (28)$$

Пусть $A_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$, $D_2 := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. *Если* $D_2^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$, *то существует и ограничен*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \right)^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1} \\ -D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & D_2^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \quad (29)$$

4 Задача о спектре оператора $\mathcal{A}$

4.1. Определение локальных координат и эллиптической краевой задачи. Приведём необходимые определения и факты из теории эллиптических краевых задач (см. [54, 57, 34, 35]), необходимые для исследования существенного спектра оператора $\mathcal{A}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных не выше второго порядка

$$\mathcal{L}(x, D)\mathbf{v}(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in \Omega, \quad (30)$$

где $x = (x_1; x_2; x_3) \in \Omega$, $D := (-i\frac{\partial}{\partial x_1}; -i\frac{\partial}{\partial x_2}; -i\frac{\partial}{\partial x_3})$, $\mathbf{v}(x) := (v_1(x); \ldots; v_m(x))^\tau$, $\mathbf{f}(x) := (f_1(x); \ldots; f_m(x))^\tau$. Пусть $\mathcal{L}(x, \xi)$, $\xi := (\xi_1; \xi_2; \xi_3)^\tau$ — полиномиальная матрица, получаемая из (30) заменой символа D на ξ. Будем считать далее, что (30) определяет невырожденную систему Дуглиса–Ниренберга (см. [57, с. 375], а также [54]).

Определение 3. (см. [57, с. 376]) *Оператор* $\mathcal{L}(x, D)$ *называется эллиптическим в замкнутой области* $\overline{\Omega}$, *если* $\pi \det \mathcal{L}(x, \xi) \neq 0$ *для любого* $x \in \overline{\Omega}$ *и любого* $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, *где символ* π *обозначает старшую однородную часть многочлена.*

Известно, что $\pi \det \mathcal{L}(x, \xi) = \det \pi\mathcal{L}(x, \xi)$, где $\pi\mathcal{L}$ — главная часть матрицы $\mathcal{L}$. О выделении главной части системы Дуглиса–Ниренберга см. в [57, с. 377].

Возьмём произвольную точку $z_0 \in \partial\Omega$ и введём, следуя [34, 35], в окрестности этой точки следующую локальную систему координат. Пусть локально граница $\partial\Omega$ задаётся бесконечно дифференцируемыми функциями $z_i = z_i(y_1, y_2)$ $(i = 1, 2, 3)$ параметров y_1, y_2, которые выбираются так, что $y_i = \mathrm{const}$ есть линии кривизны. В векторной записи $z = z(y')$, где $y' := (y_1; y_2)$. Обозначим через $N(y')$ внутреннюю единичную нормаль к $\partial\Omega$. В окрестности границы $\partial\Omega$ введём координаты y_1, y_2, y_3, где y_3 — расстояние от точки x до $\partial\Omega$. Тогда $x = z(y') + y_3N(y')$. При этом нумерация y_1, y_2 задаётся так, чтобы направление векторного произведения $\partial z/\partial y_1 \times \partial z/\partial y_2$ совпадало с нормалью $N(y')$, а начало координат находится в точке z_0. Пусть $E_i(y')$ $(i = 1, 2)$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $\partial\Omega$, тогда $\partial z/\partial y_i \cdot \partial z/\partial y_j = E_i(y')\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Пусть $\tau_s := E_s^{-1/2}(y')\partial z/\partial y_s$ $(s = 1, 2)$ — единичные векторы, касательные к границе $\partial\Omega$. Тогда $\tau_i^\tau \tau_j = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$, $\tau_s^\tau N = N^\tau \tau_s = 0$ $(s = 1, 2)$.

Рассмотрим теперь систему граничных условий

$$\mathcal{B}(x,D)\mathbf{v}(x)=\mathbf{g}(x),\quad x\in\partial\Omega, \tag{31}$$

где $\mathcal{B}(x,D)$ — $(r\times m)$-матрица, составленная из линейных дифференциальных операторов не выше первого порядка. Перепишем операторы краевой задачи (30), (31) во введённой выше локальной системе координат и рассмотрим главные части этих операторов:

$$\pi\mathcal{L}\Big(y,-i\frac{\partial}{\partial y}\Big)=\pi\mathcal{L}\Big(y,-i\frac{\partial}{\partial y'},-i\frac{\partial}{\partial y_3}\Big),\ \pi\mathcal{B}\Big(y,-i\frac{\partial}{\partial y}\Big)=\pi\mathcal{B}\Big(y,-i\frac{\partial}{\partial y'},-i\frac{\partial}{\partial y_3}\Big).$$

Определение 4. (см. [57, с. 380], а также [34, с. 12]) *Краевая задача (30), (31) называется эллиптической, если выполнено определение 3 и условие Шапиро–Лопатинского:*

$$\operatorname{rank}\int\limits_{\gamma_+}\pi\mathcal{B}(0,\xi',\xi_3)\big(\pi\mathcal{L}(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}\big(I_m,\xi_3I_m\big)\,d\xi_3=r$$

для любого $\xi'\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Здесь I_m — единичная матрица в $\mathbb{R}^m$, а через $\big(I_m,\xi_3I_m\big)$ обозначена составная $(m\times 2m)$-матрица; γ_+ — спрямляемый контур в верхней ξ_3-полуплоскости, обходящий в положительном направлении все ξ_3-корни уравнения $\det\pi\mathcal{L}(0,\xi',\xi_3)=0$, лежащие в верхней полуплоскости.

Для проверки условия Шапиро–Лопатинского понадобятся также следующие леммы и обозначения из [34].

Лемма 7. (см. [34, с. 14]) *В построенной выше локальной системе координат операторы $\partial/\partial x_i$ принимают вид*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{2}\big(1-K_jy_3\big)^{-1}E_j^{-1}(y')\frac{\partial z_i}{\partial y_j}\,\frac{\partial}{\partial y_j}+N_i\frac{\partial}{\partial y_3},$$

где K_j $(j=1,2)$ — главные кривизны поверхности $\partial\Omega$.

Введём некоторые обозначения. Пусть

$$\beta:=(\beta_1;\beta_2;\beta_3)^\tau,\quad \beta_l:=\sum_{j=1}^{2}E_j^{-1}(y')\frac{\partial z_l}{\partial y_j}\xi_j\quad (l=1,2,3),\quad \alpha:=\beta+\xi_3N, \tag{32}$$

тогда $\beta^\tau N=0,\ N^\tau\beta=0,\ N^\tau N=1$, поскольку $\beta=E_1^{-1/2}\xi_1\tau_1+E_2^{-1/2}\xi_2\tau_2$. Положим $|\xi'|^2:=|\beta|^2$, тогда $|\xi'|^2:=\beta^\tau\beta=E_1^{-1}\xi_1^2+E_2^{-1}\xi_2^2$. В локальной системе координат под символом $|\xi|^2$ будем понимать следующее выражение $|\xi|^2:=|\xi'|^2+\xi_3^2=\alpha^\tau\alpha$.

Лемма 8. (см. [34, с. 15]) *Во введённой выше локальной системе координат при $y_3=0$ имеют место следующие формулы для главных символов:*

$$\sigma_0\Big(\frac{\partial}{\partial x_l}\Big)=i\alpha_l,\ \ \sigma_0(\nabla)=i\alpha,\ \ \sigma_0(\mathrm{div})=i\alpha^\tau,\ \ \sigma_0(\Delta)=-|\xi|^2=-\big(|\xi'|^2+\xi_3^2\big).$$

Лемма 9. (см. [34, с. 16]) *Справедливы следующие формулы для контурных интегралов, в которых контур интегрирования лежит в верхней ξ_3-полуплоскости и в положительном направлении окружает точку $\xi_3 = i|\xi'|$:*

$$\int_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^2} = \frac{\pi}{|\xi'|}, \quad \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3\, d\xi_3}{|\xi|^2} = \pi i, \quad \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2\, d\xi_3}{|\xi|^2} = -\pi|\xi'|, \quad \int_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^4} = \frac{\pi}{2|\xi'|^3},$$

$$\int_{\gamma_+} \frac{\xi_3\, d\xi_3}{|\xi|^4} = 0, \quad \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2\, d\xi_3}{|\xi|^4} = \frac{\pi}{2|\xi'|}, \quad \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3^3\, d\xi_3}{|\xi|^4} = \pi i, \qquad |\xi|^2 = |\xi'|^2 + \xi_3^2.$$

4.2. О существенном и дискретном спектре оператора $\mathcal{A}$. Напомним (см. определение 1), что существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из тех точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ не является фредгольмовым. Выпишем систему дифференциальных уравнений, порождающих спектральную задачу $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})\xi = 0$:

$$\begin{gathered} \frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j + \nabla\left(\frac{c_i^{1/2}\rho_i}{\rho_{i0}^{1/2}}\right) - \frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) - \lambda\mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \\ \frac{c_i^{1/2}}{\rho_{i0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{i0}\mathbf{u}_i) - \lambda\rho_i = 0, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{33}$$

Можно проверить, что система из (33) составляет невырожденную систему Дуглиса–Ниренберга (см. [57, с. 375], а также [54]). Из работы [31] следует, что оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда соответствующая краевая задача является эллиптической.

Выделим из системы (33) главную часть:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j + c_i^{1/2}\rho_{i0}^{1/2}\nabla\rho_i = \mathbf{0}, \\ c_i^{1/2}\rho_{i0}^{1/2}\operatorname{div}\mathbf{u}_i - \lambda\rho_i = 0, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{34}$$

Выделим из граничных условий (5) (с учётом (11)) главную часть:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad s = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{35}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_\lambda(x, D)$ матричный дифференциальный оператор системы уравнений (33) — это $(4n \times 4n)$-матрица; а через $\mathcal{B}(x, D)$ матрицу, отвечающую граничным условиям — это $(3n \times 4n)$-матрица. В этом случае главная часть $\pi\mathcal{L}_\lambda(x, D)$ оператора $\mathcal{L}_\lambda(x, D)$ определяется системой (34), а $\pi\mathcal{B}(x, D) = \mathcal{B}(x, D)$, где $\mathcal{B}(x, D)$ определяется граничными условиями (35).

Таким образом, существенный спектр исследуемого оператора $\mathcal{A}$ будет состоять из тех точек $\lambda \in \mathbb{C}$, в которых нарушается эллиптичность краевой задачи (34)–(35).

Лемма 10. *Дифференциальный оператор $\mathcal{L}_\lambda(x, D)$ эллиптичен в замкнутой области $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ при $\lambda \notin \Lambda_E$, где*

$$\Lambda_E = \bigl\{\lambda \in \mathbb{C} : \ \det\bigl(\lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \mathbf{\Phi}\bigr) = 0, \ \ x \in \overline{\Omega}\bigr\}.$$

Доказательство. Рассмотрим главный символ $\sigma_0(\mathcal{L}_\lambda(x, D)) = \pi\mathcal{L}_\lambda(x, \xi)$, где $\xi = (\xi_1; \xi_2; \xi_3)^\tau$, системы (33), определяемый системой (34):

$$\pi\mathcal{L}_\lambda(x, \xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi\xi^\tau & \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi \\ \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi^\tau & -\lambda I_n \end{pmatrix}, \tag{36}$$

где $\mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Phi} = \operatorname{diag}(c_1\rho_{10}(x_3), \ldots, c_n\rho_{n0}(x_3))$ — матрицы вязкостей и плотностей. Здесь и далее знак $\otimes$ означает тензорное (кронекеровское) произведение матриц. Основные свойства тензорного произведения можно найти в [38, гл. 8, п. 8.2].

Обозначим

$$\pi\mathcal{L}_\lambda(x, \xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi\xi^\tau & \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi \\ \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi^\tau & -\lambda I_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{37}$$

и применим факторизацию (29) при $E_1 = \mathbb{C}^{3n}$, $E_2 = \mathbb{C}^n$. С учётом $\xi^\tau\xi = |\xi|^2$ непосредственными вычислениями проверяется (см. (3) и замечание 1), что

$$\begin{aligned} A_{11}^{-1} &= \Bigl(\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi\xi^\tau\Bigr)^{-1} \\ &= \frac{1}{|\xi|^4}\Bigl(\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1} \otimes \xi\xi^\tau\Bigr). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} &= \\ &= -\lambda I_n - \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi^\tau \cdot \Bigl(\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi\xi^\tau\Bigr)^{-1} \cdot \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi \\ &= \mathbf{\Phi}^{1/2}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2} - \mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2} - \lambda I_n \\ &= \mathbf{\Phi}^{1/2}\bigl(I_n - (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\bigr)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2} - \lambda I_n \\ &= \mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1}\bigl((2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\bigr)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2} - \lambda I_n \\ &= \mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2} - \lambda I_n = \mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{I}_2\mathbf{\Phi}^{-1/2}. \end{aligned} \tag{38}$$

Здесь и далее для сокращения записи обозначено

$$\mathbf{I}_j := \mathbf{\Phi} - \lambda(j\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}), \quad j = 1, 2, 3. \tag{39}$$

Обозначим через $\Gamma_\xi := (|\xi|^{-1}\xi, \mathbf{a}^\perp, \mathbf{b}^\perp)$ матрицу, составленную из вектор-столбцов $|\xi|^{-1}\xi$, $\mathbf{a}^\perp$, $\mathbf{b}^\perp$ ($|\mathbf{a}^\perp| = |\mathbf{b}^\perp| = 1$), где $\mathbf{a}^\perp$, $\mathbf{b}^\perp$ ортогональны ξ

и между собой. Непосредственной проверкой доказываются следующие формулы:

$$\Gamma_\xi^\tau\Gamma_\xi = I_3, \quad \Gamma_\xi^\tau\xi = (|\xi|;0;0)^\tau =: |\xi|\mathbf{e}_1, \quad \Gamma_\xi^\tau\xi\xi^\tau\Gamma_\xi = \operatorname{diag}(|\xi|^2,0,0) =: |\xi|^2 P_1. \tag{40}$$

Обозначим $\mathrm{S}_\xi := I_n \otimes \Gamma_\xi$, тогда $\mathrm{S}_\xi^\tau \mathrm{S}_\xi = I_n \otimes I_3 = I_{3n}$. Из (29), (37), (38), (40) и теоремы Лапласа о вычислении определителей теперь найдём, что (см. определение 3)

$$\begin{aligned}
\pi \det\mathcal{L}_\lambda(x,\xi) &= \det \pi\mathcal{L}_\lambda(x,\xi) = \\
&= \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \mathbf{M}\otimes|\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau & 0_{3n\times n} \\ 0_{n\times 3n} & \mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{I}_2\mathbf{\Phi}^{-1/2} \end{pmatrix} \\
&= \det \mathrm{S}_\xi^\tau\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau\big)\mathrm{S}_\xi \cdot \det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\cdot\det\mathbf{I}_2 \\
&= \det\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2\Gamma_\xi^\tau\Gamma_\xi + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\Gamma_\xi^\tau\xi\xi^\tau\Gamma_\xi\big)\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\cdot\det\mathbf{I}_2 \\
&= \det\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes|\xi|^2 P_1\big)\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\cdot\det\mathbf{I}_2 \\
&= \big(|\xi|^2\big)^{3n}\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\cdot\det{}^2\mathbf{M}\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\cdot\det\mathbf{I}_2 \\
&= (-1)^n|\xi|^{6n}\cdot\det{}^2\mathbf{M}\cdot\det\big(\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})-\mathbf{\Phi}\big) \neq 0
\end{aligned} \tag{41}$$

для любого $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, если только $\lambda \notin \Lambda_E$. □

Лемма 11. *Задача (33), (5) эллиптична при $\lambda \notin \Lambda_E$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что если $\lambda \in \Lambda_E$, то по лемме 10 оператор $\mathcal{L}_\lambda(x,D)$ теряет эллиптичность и, следовательно, задача (33), (5) не является эллиптической (см. определение 4). Таким образом, далее считаем, что $\lambda \notin \Lambda_E$. Дальнейшее доказательство разобьём на несколько шагов.

1) Зафиксируем $z_0 \in \partial\Omega$ и введём в окрестности этой точки локальную систему координат, как описано в предыдущем пункте. Перепишем операторную матрицу системы (33) в локальной системе координат и выделим из неё главную часть. Эта главная часть представляет собой операторную матрицу системы (34), записанную в локальной системе координат. Главный символ последней системы имеет вид (36) с заменой ξ на α (см. (32) и лемму 8). При этом $\det\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)$ вычисляется по формуле (41) с заменой $|\xi|^2$ на $\alpha^\tau\alpha = \xi'^2 + \xi_3^2$. Уравнение $\det\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3) = 0$ имеет $3n$-кратные ξ_3-корни $\xi_3 = \pm i|\xi'|$.

2) Найдём выражение для матрицы $\big(\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}$ в определении 4. Далее для краткости положим $\xi'^2 + \xi_3^2 =: |\xi|^2$. Обозначим

$$\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\otimes|\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\alpha\alpha^\tau & \mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha \\ \mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha^\tau & -\lambda I_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{42}$$

и найдём матрицу, обратную к $\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)$, с помощью (29) при $E_1=\mathbb{C}^{3n}$, $E_2=\mathbb{C}^n$. С учётом $\alpha^\tau\alpha=\beta^\tau\beta+\xi_3^2=\xi'^2+\xi_3^2=|\xi|^2$ (см. (32)) непосредственными вычислениями проверяется (см. (3) и замечание 1), что

$$\begin{aligned} A_{11}^{-1}&=\Big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)^{-1}\\ &=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big). \qquad (43)\end{aligned}$$

Отсюда следует (см. аналогичные вычисления в (38)), что

$$\begin{aligned} D_2^{-1}=(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}&=\big(\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{I}_2\mathbf{\Phi}^{-1/2}\big)^{-1}\\ &=\mathbf{\Phi}^{1/2}\mathbf{I}_2^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes I_1. \qquad (44)\end{aligned}$$

Из (42)–(44) с учётом (39) имеем

$$\begin{aligned} &A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}=\\ &=A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\mathbf{I}_2^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes I_1\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha^\tau\cdot A_{11}^{-1}\\ &=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}\cdot\mathbf{\Phi}\mathbf{I}_2^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\alpha\alpha^\tau\times\\ &\qquad\times\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)\\ &=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}\cdot\frac{1}{|\xi|^2}\,\mathbf{\Phi}\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\\ &=A_{11}^{-1}-\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)\times\\ &\qquad\times\frac{1}{|\xi|^2}\,\mathbf{\Phi}\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\\ &=A_{11}^{-1}-\frac{1}{|\xi|^4}\,(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\\ &=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)-\\ &\qquad-\frac{1}{|\xi|^4}\,(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\\ &=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\Big((\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}+\mathbf{\Phi}\mathbf{I}_2^{-1}\Big)\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)\\ &=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\Big((\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}+\\ &\qquad+\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})+\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{I}_2^{-1}\Big)\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)\\ &=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\Big((\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}+I_n+\\ &\qquad+\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{I}_2^{-1}\Big)\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3 - \big(\mathbf{M}^{-1}+\lambda\mathbf{I}_2^{-1}\big)\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)$$
$$= \frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3 - \mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big), \qquad (45)$$

$$-A_{11}A_{12}D_2^{-1} = -\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)\times$$
$$\times\,\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\mathbf{I}_2^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes I_1$$
$$= -\frac{i}{|\xi|^2}\big(\mathbf{M}^{-1}-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\big)\mathbf{\Phi}\mathbf{I}_2^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes\alpha$$
$$= -\frac{i}{|\xi|^2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}\mathbf{I}_2^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes\alpha$$
$$= -\frac{i}{|\xi|^2}\Big(\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{I}_2\mathbf{\Phi}^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\Big)^{-1}\otimes\alpha$$
$$= -\frac{i}{|\xi|^2}\big(\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda\mathbf{\Phi}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\otimes\alpha = -\frac{i}{|\xi|^2}\,\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes\alpha. \qquad (46)$$

Из факторизации (29) и формул (45)–(46) теперь сможем найти необходимые для вычислений части матрицы $\big(\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}$.

3) Перепишем оператор граничных условий (5) во введённой выше локальной системе координат и рассмотрим его главную часть. Эта главная часть представляет собой операторную матрицу граничных условий (35), записанную в локальной системе координат.

Заметим, что часть граничных условий (35) может быть переписана в следующей форме:

$$0 = 2\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}\cdot\tau_s = \sum_{j=1}^{n}2\mu_{ij}\tau_s^\tau e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}2\mu_{ij}\tau_s^\tau\begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}_j) & e_{12}(\mathbf{u}_j) & e_{13}(\mathbf{u}_j)\\ e_{21}(\mathbf{u}_j) & e_{22}(\mathbf{u}_j) & e_{23}(\mathbf{u}_j)\\ e_{31}(\mathbf{u}_j) & e_{32}(\mathbf{u}_j) & e_{33}(\mathbf{u}_j)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1\\ n_2\\ n_3\end{pmatrix}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}\tau_s^\tau\begin{pmatrix} \nabla u_{j1}\cdot\mathbf{n}+\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n}\\ \nabla u_{j2}\cdot\mathbf{n}+\frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n}\\ \nabla u_{j3}\cdot\mathbf{n}+\frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n}\end{pmatrix}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}\tau_s^\tau\begin{pmatrix} n_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\mathbf{n}\cdot\nabla & n_2\frac{\partial}{\partial x_1} & n_3\frac{\partial}{\partial x_1}\\ n_1\frac{\partial}{\partial x_2} & n_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\mathbf{n}\cdot\nabla & n_3\frac{\partial}{\partial x_2}\\ n_1\frac{\partial}{\partial x_3} & n_2\frac{\partial}{\partial x_3} & n_3\frac{\partial}{\partial x_3}+\mathbf{n}\cdot\nabla\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{j1}\\ u_{j2}\\ u_{j3}\end{pmatrix}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}\tau_s^\tau\Big\{n_k\frac{\partial}{\partial x_l}+\delta_{lk}\mathbf{n}\cdot\nabla\Big\}_{l,k=1}^{3}\mathbf{u}_j, \quad s=1,2, \quad i=1,\ldots,n. \qquad (47)$$

Во введённой выше локальной системе координат при $y_3=0$ с использованием леммы 8 выпишем главные символы дифференциальных операторов из (47):

$$\sigma_0\Big(\mu_{ij}\tau_s^\tau\Big\{N_k\frac{\partial}{\partial x_l}+\delta_{lk}N\cdot\nabla\Big\}_{l,k=1}^3\Big)=\mu_{ij}\tau_s^\tau\big\{iN_k\alpha_l+i\delta_{lk}N\cdot\alpha\big\}_{l,k=1}^3$$
$$=\mu_{ij}\tau_s^\tau\big\{iN_k\alpha_l+i\delta_{lk}(\beta^\tau+\xi_3N^\tau)N\big\}_{l,k=1}^3$$
$$=\mu_{ij}i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3I_3),\quad s=1,2,\quad i,j=1,\dots,n. \tag{48}$$

С учётом (47)–(48) операторная матрица граничных условий (35) запишется в локальной системе координат следующим образом:

$$\pi\mathcal{B}(0,\xi',\xi_3)=\begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes i\tau_1^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3I_3) & 0_n\\ \mathbf{M}\otimes i\tau_2^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3I_3) & 0_n\\ I_n\otimes N^\tau & 0_n\end{pmatrix}. \tag{49}$$

4) Из определения 4, с учётом (49), представления (42), факторизации (29) и формул (45)–(46), теперь следует, что для доказательства эллиптичности задачи (33), (5) требуется показать, что ранг следующей матрицы равен $3n$:

$$\int\limits_{\gamma_+}\pi\mathcal{B}(0,\xi',\xi_3)\big(\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}\big(I_{4n},\xi_3I_{4n}\big)\,d\xi_3 \tag{50}$$
$$=\int\limits_{\gamma_+}\begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes i\tau_1^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3I_3) & 0_n\\ \mathbf{M}\otimes i\tau_2^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3I_3) & 0_n\\ I_n\otimes N^\tau & 0_n\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}A_{12}D_2^{-1}\\ *_{n\times3n} & *_{n\times n}\end{pmatrix}\big(I_{4n},\xi_3I_{4n}\big)\,d\xi_3.$$

Здесь γ_+ — спрямляемый контур в верхней ξ_3-полуплоскости, обходящий в положительном направлении точку $\xi_3=i|\xi'|$, а символами $*_{n\times3n}$, $*_{n\times n}$ обозначены несущественные для дальнейших вычислений матрицы соответствующих размеров.

Обозначим через $\mathcal{M}$ матрицу, составленную из $3n$ строк и первых $4n$ столбцов матрицы (50). Если ранг матрицы $\mathcal{M}$ будет равен $3n$, то и ранг матрицы (50), очевидно, будет таким же. Найдём составляющие матрицы $\mathcal{M}$ с использованием вспомогательных вычислений (см. (32)):

$$\begin{aligned}\tau_s^\tau\alpha=&E_s^{-1/2}\xi_s,\quad \tau_s^\tau\alpha\alpha^\tau=E_s^{-1/2}\xi_s(\beta^\tau+\xi_3N^\tau),\quad s=1,2,\\ &N^\tau\alpha=\xi_3,\quad N^\tau\alpha\alpha^\tau=\xi_3\beta^\tau+\xi_3^2N^\tau.\end{aligned} \tag{51}$$

Отсюда, из формул (45)–(46) и леммы 9 имеем с учётом (39)

$$\int\limits_{\gamma_+}\mathbf{M}\otimes i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3I_3)\cdot\big(A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}\big)\,d\xi_3$$
$$=\int\limits_{\gamma_+}\mathbf{M}\otimes i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3I_3)\cdot\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)\,d\xi_3$$

$$= \int\limits_{\gamma_+} i\biggl(I_n \otimes \Bigl(\frac{1}{|\xi|^2}\, E_s^{-1/2}\xi_s N^\tau + \frac{\xi_3}{|\xi|^2}\,\tau_s^\tau\Bigr) - \\ - \mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1} \otimes 2E_s^{-1/2}\xi_s\Bigl(\frac{\xi_3}{|\xi|^4}\,\beta^\tau + \frac{\xi_3^2}{|\xi|^4}\,N^\tau\Bigr)\biggr)d\xi_3$$

$$= i\Bigl(I_n \otimes \Bigl(\frac{\pi}{|\xi'|}\, E_s^{-1/2}\xi_s N^\tau + \pi i \tau_s^\tau\Bigr) - \mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \frac{\pi}{|\xi'|}\, E_s^{-1/2}\xi_s N^\tau\Bigr)$$

$$= i\Bigl(I_n \otimes \pi i \tau_s^\tau - \lambda \mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \frac{\pi}{|\xi'|}\, E_s^{-1/2}\xi_s N^\tau\Bigr), \quad s = 1, 2, \tag{52}$$

$$\int\limits_{\gamma_+} I_n \otimes N^\tau \cdot \bigl(A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}\bigr)\, d\xi_3 =$$

$$= \int\limits_{\gamma_+} I_n \otimes N^\tau \cdot \frac{1}{|\xi|^4}\Bigl(\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \alpha\alpha^\tau\Bigr)\, d\xi_3 =$$

$$= \int\limits_{\gamma_+} \biggl(\mathbf{M}^{-1} \otimes \frac{1}{|\xi|^2}\, N^\tau - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \Bigl(\frac{\xi_3}{|\xi|^4}\,\beta^\tau + \frac{\xi_3^2}{|\xi|^4}\, N^\tau\Bigr)\biggr)d\xi_3 =$$

$$= \mathbf{M}^{-1} \otimes \frac{\pi}{|\xi'|}\, N^\tau - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \frac{\pi}{2|\xi'|} N^\tau = \frac{1}{2}\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_3\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \frac{\pi}{|\xi'|}\, N^\tau, \tag{53}$$

$$\int\limits_{\gamma_+} \mathbf{M} \otimes i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau + \xi_3 I_3) \cdot \bigl(-A_{11}A_{12}D_2^{-1}\bigr)\, d\xi_3$$

$$= \int\limits_{\gamma_+} \mathbf{M} \otimes i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau + \xi_3 I_3) \cdot \frac{-i}{|\xi|^2}\, \mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes \alpha\, d\xi_3$$

$$= 2\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_s^{-1/2}\xi_s \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3}{|\xi|^2}\, d\xi_3 = 2\pi i \mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_s^{-1/2}\xi_s, \quad s = 1, 2, \tag{54}$$

$$\int\limits_{\gamma_+} I_n \otimes N^\tau \cdot \bigl(-A_{11}A_{12}D_2^{-1}\bigr)\, d\xi_3 = \int\limits_{\gamma_+} I_n \otimes N^\tau \cdot \frac{-i}{|\xi|^2}\, \mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes \alpha\, d\xi_3 \\ = -i\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2} \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3}{|\xi|^2}\, d\xi_3 = \pi \mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}. \tag{55}$$

Из (52)–(55) теперь найдём, что

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} i\bigl(I_n \otimes \pi i \tau_1^\tau - \lambda\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \frac{\pi}{|\xi'|}\, E_1^{-1/2}\xi_1 N^\tau\bigr) & 2\pi i \mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_1^{-1/2}\xi_1 \\ i\bigl(I_n \otimes \pi i \tau_2^\tau - \lambda\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \frac{\pi}{|\xi'|}\, E_2^{-1/2}\xi_2 N^\tau\bigr) & 2\pi i \mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_2^{-1/2}\xi_2 \\ \frac{1}{2}\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_3\mathbf{I}_2^{-1} \otimes \frac{\pi}{|\xi'|}\, N^\tau & \pi\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\mathcal{N} :=& \mathcal{M}\cdot \operatorname{diag}\big((I_n\otimes N, I_n\otimes \tau_1, I_n\otimes\tau_2), I_n\big)\\ =& \begin{pmatrix} -i\lambda \mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\frac{\pi}{|\xi'|}E_1^{-1/2}\xi_1 & -\pi I_n & 0_n & 2\pi i\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_1^{-1/2}\xi_1\\ -i\lambda \mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\frac{\pi}{|\xi'|}E_2^{-1/2}\xi_2 & 0_n & -\pi I_n & 2\pi i\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_2^{-1/2}\xi_2\\ \frac12\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_3\mathbf{I}_2^{-1}\frac{\pi}{|\xi'|} & 0_n & 0_n & \pi\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Несложно видеть, что минор матрицы $\mathcal{N}$, составленный из $3n$ строк и последних $3n$ столбцов, отличен от нуля:

$$\pi^{3n}\det \mathbf{I}_2^{-1}\cdot\det\mathbf{\Phi}^{1/2} = \pi^{3n}\det{}^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\cdot\det\mathbf{\Phi}^{1/2}\neq 0,$$

а значит, $\operatorname{rank}\mathcal{N} = 3n$. Отсюда и из равенства $\operatorname{rank}\mathcal{M} = \operatorname{rank}\mathcal{N}$ следует, что ранг матрицы (50) равен $3n$. □

Лемма 12. $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \Lambda_E$. *Множество $\mathbb{C}\setminus\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности оператора $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Из определения 1, лемм 10, 11 и [31] следует формула для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$. Далее, в лемме 6 доказано, что оператор $\mathcal{A}$ является максимальным аккретивным оператором. Следовательно, оператор $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}$ непрерывно обратим при отрицательных λ и его дефект и индекс равны нулю. Множество $\mathbb{C}\setminus\sigma_{ess}(\mathcal{A})$, очевидно, является связным. Отсюда и из теоремы об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора (см. [33, гл. 4, § 5, п. 2, теорема 5.17] или [29, гл. 17, § 2, теорема 2.1]) следует, что множество $\mathbb{C}\setminus\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности оператора $\mathcal{A}$. □

4.3. Локализация и асимптотика дискретного спектра оператора $\mathcal{A}$. Доказательство факта, что невещественный спектр оператора $\mathcal{A}$ (или оператора $\mathcal{A}^{-1}$, если он существует) состоит из конечного числа симметричных относительно вещественной оси пар собственных значений конечной кратности, состоит в проверке принадлежности оператора $\mathcal{A}^{-1}$ классу Хелтона: $\mathcal{A}^{-1}\in(H)$ (см. [2, гл. III, § 5, определение 5.1, следствие 5.21]). Чтобы не приводить здесь множество сопутствующих определений и терминов, сформулируем желаемое следствие из [2, гл. III, § 5, следствие 5.21] и [2, 23, гл. III, § 5, пример 5.23] в виде следующего предложения.

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства. Определим в ортогональной сумме этих пространств $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$ оператор*

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} T_1 & 0\\ 0 & T_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 & -S_3^*\\ S_3 & S_2\end{pmatrix},\qquad T_1=T_1^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1),\quad T_2=T_2^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_2),$$
$$S_1=S_1^*\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1),\quad S_2=S_2^*\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_2),\quad S_3\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2).$$

Пусть $\sigma(T_1)\cap\sigma(T_2)=\varnothing$. Тогда невещественный спектр оператора $\mathcal{T}$ состоит из конечного числа симметричных относительно $\mathbb{R}$ пар собственных значений конечной алгебраической кратности.

Лемма 13. *Невещественный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из конечного числа симметричных относительно $\mathbb{R}$ пар собственных значений конечной алгебраической кратности.*

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{Ker}\mathcal{A}=\{0\}$. Допустим противное, тогда существует такой элемент $0\neq\xi=(\mathbf{u};\rho)^{\tau}\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, что (см. лемму 6)

$$\mathcal{A}\xi=\begin{pmatrix}A^{1/2}(A^{1/2}\mathbf{u}+Q^*\rho)\\ -QA^{1/2}\mathbf{u}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $(\rho,QA^{1/2}\mathbf{u})_{\mathcal{H}_2}=0$, а значит, $(A^{1/2}(A^{1/2}\mathbf{u}+Q^*\rho),\mathbf{u})_{\mathcal{H}_1}$ $=\|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1}=0$ и $\mathbf{u}=\mathbf{0}$. Тогда $A^{1/2}Q^*\rho=0$, а значит, $\rho=0$, так как оператор Q^* имеет тривиальное ядро: $\operatorname{Ker}Q^*=\{0\}$ (см. лемму 3, (22) и лемму 5).

Таким образом, точка $\lambda=0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$. По лемме 12 точка $\lambda=0$ — регулярная точка оператора $\mathcal{A}$: $0\in\rho(\mathcal{A})$. Отсюда и из второй факторизации в лемме 6 следует, что оператор QQ^* является положительно определённым в $\mathcal{H}_2$, а значит, существует $(QQ^*)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$.

Из второй факторизации в лемме 6 теперь найдём, что

$$\mathcal{A}^{-1}=$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&(QQ^*)^{-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A^{-1/2}\big(I-Q^*(QQ^*)^{-1}Q\big)A^{-1/2}&-A^{-1/2}Q^*(QQ^*)^{-1}\\(QQ^*)^{-1}QA^{-1/2}&0\end{pmatrix}.$$

Из представления $A=L+T$ и лемм 1, 2 следует, что $A^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет структуру оператора $\mathcal{T}$ из предложения 1. Утверждение леммы теперь следует из $\sigma((QQ^*)^{-1})\cap\{0\}=\varnothing$ и предложения 1. $\square$

Лемма 14. *Спектр оператора $\mathcal{A}$ содержит подпоследовательность собственных значений с асимптотическим поведением*

$$\lambda_k^{(\infty)}(\mathcal{A})=\mathcal{C}^{-2/3}k^{2/3}(1+o(1)),\quad k\longrightarrow\infty,$$
$$\mathcal{C}:=\frac{1}{6\pi^2}\int\limits_{\Omega}\Big(\operatorname{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2}+2\operatorname{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big)\,d\Omega.$$

Доказательство. 1) Покажем, что собственные значения оператора L имеют асимптотическое распределение $\lambda_k(L)=\mathcal{C}^{-2/3}k^{2/3}(1+o(1))$ при $k\longrightarrow\infty$ с константой $\mathcal{C}$, определённой в лемме.

Действительно, указанное асимптотическое распределение следует из обзора М.Ш. Бирмана и М.З. Соломяка [14, § 1, п. 3] с константой

$$\mathcal{C}=\frac{1}{24\pi^3}\int\limits_{\Omega}d\Omega\int\limits_{|\xi|=1}\operatorname{tr}\Big\{\big(a_0^{-1/2}b_0a_0^{-1/2}\big)^{3/2}\Big\}\,dS(\xi),\qquad(56)$$

где $a_0 := \mathbf{M}\otimes|\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau$, $b_0 := \mathbf{R}\otimes I_3$. Учитывая, что

$$\mathrm{tr}\Big\{\big(a_0^{-1/2}b_0a_0^{-1/2}\big)^{3/2}\Big\} = \mathrm{tr}\Big\{\big(a_0^{1/2}b_0^{-1}a_0^{1/2}\big)^{-3/2}\Big\} = \mathrm{tr}\Big\{\big(b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big\},$$

вычислим собственные значения матрицы $b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2}$. Используя (40) и теорему Лапласа о вычислении определителей, найдём соответствующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}
&\det(b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2} - \lambda I_{3n}) = \\
&\quad= \det\Big(\mathbf{R}^{-1/2}\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau - \lambda\mathbf{R}\otimes I_3\big)\mathbf{R}^{-1/2}\Big)\\
&\quad= \det{}^2\mathbf{R}^{-1/2}\cdot\det\Big(I_n\otimes\Gamma_\xi^\tau\cdot\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+ \\
&\qquad\qquad\qquad + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau - \lambda\mathbf{R}\otimes I_3\big)\cdot I_n\otimes\Gamma_\xi\Big)\\
&\quad= \det\mathbf{R}^{-1}\cdot\det\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes|\xi|^2P_1 - \lambda\mathbf{R}\otimes I_3\big)\\
&\quad= |\xi|^{6n}\cdot\det\mathbf{R}^{-1}\cdot\det\big(\mathbf{M}\otimes I_3 + (\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes P_1 - \mathbf{R}\otimes\lambda|\xi|^{-2}I_3\big)\\
&\quad= |\xi|^{6n}\cdot\det\mathbf{R}^{-1}\cdot\det\big(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}) - \lambda|\xi|^{-2}\mathbf{R}\big)\cdot\det{}^2\big(\mathbf{M} - \lambda|\xi|^{-2}\mathbf{R}\big) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что спектр матрицы $b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2}$ состоит из трёх множеств:

$$\Big\{\lambda_k^{(1)} = |\xi|^2\lambda_k\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big),\ \lambda_k^{(2)} = \lambda_k^{(3)} = |\xi|^2\lambda_k\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)\Big\}_{k=1}^n,$$

где $\lambda_k\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)$, $\lambda_k\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)$ $(k = 1,\ldots,n)$ — собственные значения соответствующих матриц. Из (56) и проведённых рассуждений теперь найдём, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \frac{1}{24\pi^3}\int\limits_\Omega d\Omega\int\limits_{|\xi|=1}\left(\sum_{k=1}^n\big(\lambda_k^{(1)}\big)^{-3/2} + 2\sum_{k=1}^n\big(\lambda_k^{(2)}\big)^{-3/2}\right)dS(\xi)\\
&= \frac{1}{24\pi^3}\int\limits_\Omega\Big(\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2} + \\
&\qquad\qquad + 2\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big)\,d\Omega\int\limits_{|\xi|=1}\frac{dS(\xi)}{|\xi|^3}\\
&= \frac{1}{6\pi^2}\int\limits_\Omega\Big(\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2} + 2\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big)\,d\Omega.
\end{aligned}$$

2) Из представления $A = L + T = (I + TL^{-1})L$ следует, что оператор A является *слабым возмущением* оператора L. Отсюда и из степенной асимптотики собственных значений оператора L следует (см., например, [45]), что главные члены асимптотик собственных значений этих операторов совпадают.

Далее, из (26) следует, что собственные значения оператора $\mathcal{A}$ и оператор-функции $L(\lambda)$ совпадают. Наличие же у оператор-функции (пучка операторов) $L(\lambda)$ последовательности собственных значений с указанным в лемме асимптотическим поведением следует из теоремы А.С. Маркуса и В.И. Мацаева о сравнении спектров (см. [45, теорема 1.2]). $\square$

Утверждения теоремы 1 следуют из лемм 12, 13, 14.

5 Свойства эволюционной задачи

5.1. Утверждение о разрешимости. В дополнение к лемме 6 докажем следующие утверждения. Метод доказательства этих лемм применялся в работах [60, лемма 2.4], [61, леммы 2.3, 2.4], [22] при исследовании задач "параболического типа".

Лемма 15. *Оператор $-\mathcal{A}$ является генератором голоморфной полугруппы. Для числовой области значений $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ выполнено включение:*

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \bigcap_{\alpha>0} \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\arg\left(\lambda + \alpha^2\|Q^*\|^2\right)\right| \leqslant \operatorname{arctg}\alpha^{-1}\right\}. \tag{57}$$

Доказательство. По лемме 6 оператор $\mathcal{A}$ плотно определён и замкнут. Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ секториален. Пусть $\xi = (\mathbf{u};\rho)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, тогда $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ и из факторизации (24) оператора $\mathcal{A}$ в симметричной форме получим, что

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\bigl(\mathcal{A}\xi,\xi\bigr)_{\mathcal{H}} &= \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} I & Q^* \\ -Q & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{1/2}\mathbf{u} \\ \rho\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^{1/2}\mathbf{u} \\ \rho\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = \|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1},\\
\left|\operatorname{Im}\bigl(\mathcal{A}\xi,\xi\bigr)_{\mathcal{H}}\right| &= \left|\operatorname{Im}\left[(Q^*\rho, A^{1/2}\mathbf{u})_{\mathcal{H}_1} - (QA^{1/2}\mathbf{u},\rho)_{\mathcal{H}_2}\right]\right| = \\
&= \left|2\operatorname{Im}(Q^*\rho, A^{1/2}\mathbf{u})_{\mathcal{H}_1}\right| \leqslant 2\,\|A^{1/2}\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}_1}\|Q^*\rho\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned}$$

Из этих оценок при любом $\alpha > 0$ получим, что

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\bigl(\mathcal{A}\xi,\xi\bigr)_{\mathcal{H}} - \alpha\left|\operatorname{Im}\bigl(\mathcal{A}\xi,\xi\bigr)_{\mathcal{H}}\right| &\geqslant \bigl(\|A^{1/2}\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}_1} - \alpha\|Q^*\rho\|_{\mathcal{H}_1}\bigr)^2 - \alpha^2\|Q^*\rho\|^2_{\mathcal{H}_1}\\
&\geqslant -\alpha^2\|Q^*\|^2\cdot\|\rho\|^2_{\mathcal{H}_2} \geqslant -\alpha^2\|Q^*\|^2\cdot\|\xi\|^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}\bigl(\bigl[\mathcal{A}+\alpha^2\|Q^*\|^2\mathcal{I}\bigr]\xi,\xi\bigr)_{\mathcal{H}} - \alpha\left|\operatorname{Im}\bigl(\bigl[\mathcal{A}+\alpha^2\|Q^*\|^2\mathcal{I}\bigr]\xi,\xi\bigr)_{\mathcal{H}}\right| \geqslant 0,$$

или

$$\frac{\left|\operatorname{Im}\bigl(\bigl[\mathcal{A}+\alpha^2\|Q^*\|^2\mathcal{I}\bigr]\xi,\xi\bigr)_{\mathcal{H}}\right|}{\operatorname{Re}\bigl(\bigl[\mathcal{A}+\alpha^2\|Q^*\|^2\mathcal{I}\bigr]\xi,\xi\bigr)_{\mathcal{H}}} \leqslant \frac{1}{\alpha} \quad \forall\, 0 \neq \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \alpha > 0.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\left(\lambda + \alpha^2\|Q^*\|^2\right)| \leqslant \operatorname{arctg}\alpha^{-1}\right\}$ при любом $\alpha > 0$, то есть оператор $\mathcal{A}$ секториален и выполнено (57). Максимальность оператора $\mathcal{A}$ следует из $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ при достаточно больших $\lambda < 0$ (см. лемму 6 и (27)). $\square$

Лемма 16. *Голоморфная полугруппа $\mathcal{U}(t)$, генерируемая оператором $-\mathcal{A}$, является равномерно экспоненциально устойчивой, то есть существуют такие $\omega > 0$ и $M \geqslant 1$, что*

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant Me^{-\omega t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+. \tag{58}$$

Доказательство. Известно (см., например, [20, гл. 4, § 3, следствие 3.12]), что если $\mathcal{U}(t)$ голоморфная полугруппа, то её тип совпадает со спектральной границей $s(-\mathcal{A}) = \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(-\mathcal{A})\}$ генератора $-\mathcal{A}$. Таким образом, существование чисел $\omega > 0$, $M \geqslant 1$ и оценки (58) будет следовать из неравенства $s(-\mathcal{A}) < 0$ или, что эквивалентно, из неравенства $\inf\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} > 0$.

Из формулы (57), переписанной в виде

$$\mathcal{W}(\mathcal{A} + \alpha^2\|Q^*\|^2\mathcal{I}) \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \leqslant \mathrm{arctg}\,\alpha^{-1}\big\} \quad \forall\, \alpha > 0,$$

построением огибающих соответствующих семейств прямых найдём, что числовая область значений оператора $\mathcal{A}$ содержится в параболической области:

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\lambda| \leqslant 2\|Q^*\|(\mathrm{Re}\lambda)^{1/2}\big\}. \tag{59}$$

Из доказательства леммы 13 следует, что $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Теперь, учитывая, что резольвентное множество $\rho(\mathcal{A})$ открыто и $\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{\mathcal{W}(\mathcal{A})}$, из (59) найдём, что имеет место следующее неравенство: $\inf\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} > 0$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 17. *Пусть $\mathbf{u}^0 := (\mathbf{u}_1^0; \ldots; \mathbf{u}_n^0)^\tau \in \mathcal{D}(L)$, $\rho^0 := (\rho_1^0; \ldots; \rho_n^0)^\tau \in \mathcal{D}(B^*)$ (см. (8), (12) и лемму 3), а поля $\mathbf{f}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ локально гёльдеровы, то есть для любого $T \geqslant 0$ существуют $K = K(T) > 0$, $k = k(T) \in (0, 1]$ такие, что*

$$\|\mathbf{f}_i(t) - \mathbf{f}_i(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant K|t - s|^k \quad \forall\, 0 \leqslant t, s \leqslant T, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда начально-краевая задача (7), (5), (8) имеет единственное решение в смысле определения 2.

Доказательство. 1) Заметим, что если поля $\mathbf{u}_i$ и функции ρ_i $(i = \overline{1, n})$ — решение начально-краевой задачи (7), (5), (8), то функция $\xi := (\mathbf{u}; \rho)^\tau$, где $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1; \ldots; \mathbf{u}_n)^\tau$, $\rho := (\rho_1; \ldots; \rho_n)^\tau$, — решение задачи Коши

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}_0\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0 \tag{60}$$

с незамкнутым оператором $\mathcal{A}_0$ (см. (23)). Здесь

$$\xi^0 := (\mathbf{u}^0; \rho^0)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := \big(\mathbf{f}(t); 0\big)^\tau, \quad \mathbf{f}(t) := \big(\mathbf{f}_1(t); \ldots; \mathbf{f}_n(t)\big)^\tau.$$

Верно и обратное.

2) Рассмотрим задачу Коши (9) с замкнутым оператором $\mathcal{A}$.

Напомним, что $A = L + T$. Отсюда и из леммы 2 следует, что $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(L)$. Из условий леммы теперь имеем $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. лемму 6). Легко видеть также, что условия леммы влекут локальную гёльдеровость функции $\mathcal{F}$. Из лемм 6, 15 и теоремы о разрешимости абстрактной задачи Коши с оператором, генерирующем голоморфную полугруппу (см., например, [30, гл. 2, § 1, теорема 1.4]), следует, что задача Коши (9) имеет единственное классическое решение $\xi(\cdot)$. То есть такую функцию $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ (здесь подразумевается, что на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ введена норма графика оператора $\mathcal{A}$ или эквивалентная ей, и $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ превращено таким образом в банахово пространство), что выполнено уравнение из (9) при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и начальное условие.

Лемма будет доказана, если удастся показать, что функция $\xi(\cdot)$ является решением задачи Коши (60). То есть если $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mathcal{A}_0\xi \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, выполнено уравнение из (60) при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и начальное условие.

3) Итак, пусть $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ — (единственное) решение задачи Коши (9). В силу леммы 6 последнее эквивалентно тому, что $\mathbf{u} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_1)$, $\rho \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_2)$, $\mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A))$ и выполнены соотношения

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -A(\mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho) + \mathbf{f}(t), \quad \frac{d\rho}{dt} = QA^{1/2}\mathbf{u}. \tag{61}$$

Из этих соотношений следует, что

$$\mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho^0 + A^{-1/2}Q^* \int_0^t QA^{1/2}\mathbf{u}(s)\, ds \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A)).$$

Отсюда и из $A^{-1/2}Q^*\rho^0 = A^{-1/2}Q^*|_{\mathcal{D}(B^*)}\rho^0 = A^{-1}B^*\rho^0 \in \mathcal{D}(A)$ (см. лемму 5) следует, что функция $\mathbf{u}(\cdot)$ является решением интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\mathbf{u}(t) + \int_0^t A^{-1/2}Q^*QA^{1/2}\mathbf{u}(s)\, ds = \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{g} \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{E}(A))$$

в банаховом пространстве $\mathcal{E}(A) = (\mathcal{D}(A), \|A \cdot\|_{\mathcal{H}_1})$. Из оценок (см. (22) и леммы 5, 4)

$$\begin{aligned}\|A^{-1/2}Q^*QA^{1/2}\mathbf{u}\|_{\mathcal{E}(A)} &= \|A^{1/2}Q^*QA^{1/2}A^{-1}(A\mathbf{u})\|_{\mathcal{H}} = \|A^{1/2}Q^*BA^{-1}(A\mathbf{u})\|_{\mathcal{H}} \\ &= \|A^{1/2}Q^*|_{\mathcal{D}(B^*)}BA^{-1}(A\mathbf{u})\|_{\mathcal{H}} = \|B^*BA^{-1}(A\mathbf{u})\|_{\mathcal{H}} \\ &\leqslant \|B^*BA^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{E}(A)} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{E}(A)\end{aligned}$$

следует, что ядро рассматриваемого уравнения Вольтерра сильно непрерывно на $\mathbb{R}_+$. Отсюда и из $\mathbf{g} \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{E}(A))$ следует, что уравнение имеет единственное решение $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{E}(A) = \mathcal{D}(A))$.

Отметим, что $QA^{1/2}\mathbf{u} = BA^{-1}(A\mathbf{u}) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_1)$, $QA^{1/2}\mathbf{u}(t) \in \mathcal{D}(B^*)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $B^*QA^{1/2}\mathbf{u} = B^*BA^{-1}(A\mathbf{u}) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_1)$ (см. лемму 4). Отсюда, из [30, гл. 1, § 1, лемма 1.5] и второго соотношения в (61) теперь получим, что $\rho(t) \in \mathcal{D}(B^*)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $B^*\rho \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_1)$.

Таким образом, $\xi(t) = (\mathbf{u}(t); \rho(t))^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B^*)$ (см. (23)) при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и

$$\mathcal{A}_0\xi = \begin{pmatrix} A\mathbf{u} + B^*\rho \\ -B\mathbf{u} \end{pmatrix} \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}),$$

а скобки первом соотношении из (61) можно раскрыть. □

5.2. Утверждение об асимптотическом поведении решения. Метод доказательства следующей леммы применялся в работах [59, 61].

Лемма 18. *Пусть* $\mathbf{u}^0 := (\mathbf{u}_1^0; \ldots; \mathbf{u}_n^0)^\tau \in \mathcal{D}(L)$, $\rho^0 := (\rho_1^0; \ldots; \rho_n^0)^\tau \in \mathcal{D}(B^*)$ *(см.* (8), (12) *и лемму 3), а поля* $\mathbf{f}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ *имеют следующий вид:*

$$\mathbf{f}_j(t) = \mathbf{g}_j(t) + \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{f}_{j,k}(t), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Здесь $\mathbf{f}_{j,k} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega))$, $(k = 1, \ldots, m)$, *а поля* $\mathbf{g}_j$ *локально гёльдеровы. Пусть* $\|\mathbf{g}_j(t)\| = o(1)$, $\|\mathbf{f}'_{j,k}(t)\| = o(1)$ $(j = 1, \ldots, n,\ k = 0, 1, \ldots, m)$ *при* $t \longrightarrow +\infty$. *Тогда при* $t \longrightarrow +\infty$ *будет выполнено следующее соотношение:*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\left\| \mathbf{u}_j(t) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{u}_{j,k}(t) \right\|^2 + \left\| \rho_j(t) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\rho_{j,k}(t) \right\|^2 \right) = o(1), \tag{62}$$

где поля $\mathbf{u}_{j,k}(t)$ *и функции* $\rho_{j,k}(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ *при каждом* $k = 0, 1, \ldots, m$ *являются решением следующей краевой задачи с параметром* t:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho_{j0}} \sum_{l=1}^{n} L_{jl}\mathbf{u}_{l,k} + \nabla\left(\frac{c_j^{1/2}\rho_{j,k}}{\rho_{j0}^{1/2}}\right) - \frac{1}{\rho_{j0}} \sum_{l=1}^{n} a_{jl}(\mathbf{u}_{l,k} - \mathbf{u}_{j,k}) - i\sigma_k\mathbf{u}_{j,k} = \mathbf{f}_{j,k}(t), \\
&\quad \frac{c_j^{1/2}}{\rho_{j0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_{j,k}) - i\sigma_k\rho_{j,k} = 0, \quad x \in \Omega, \quad j = 1, \ldots, n, \\
&\quad \mathbf{u}_{j,k} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{T}_j\mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega, \quad j = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{63}$$

Пусть $\mathbf{g}_j(t) \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{f}_{j,k}(t) \equiv \mathbf{f}_{j,k}$ $(j = 1, \ldots, n,\ k = 0, 1, \ldots, m)$. *Тогда существует такая константа* $N > 0$, *зависящая от начальных данных и норм элементов* $\mathbf{f}_{j,k}$, *что при всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *будет выполнено следующее неравенство:*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\left\| \mathbf{u}_j(t) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{u}_{j,k} \right\|^2 + \left\| \rho_j(t) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\rho_{j,k} \right\|^2 \right) \leqslant N e^{-2\omega t}, \tag{64}$$

где $\omega > 0$ *то же, что и в лемме 16, а поля* $\mathbf{u}_{j,k}$ *и функции* $\rho_{j,k}$ $(j = 1, \ldots, n)$ *при каждом* $k = 0, 1, \ldots, m$ *являются решением задачи* (63) *при* $\mathbf{f}_{j,k}(t) \equiv \mathbf{f}_{j,k}$.

Доказательство. Из условий леммы и леммы 17 следует, что задача (7), (5), (8) имеет единственное решение в смысле определения 2. Тогда функция $\xi := (\mathbf{u};\rho)^\tau$, где $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1;\ldots;\mathbf{u}_n)^\tau$, $\rho := (\rho_1;\ldots;\rho_n)^\tau$, — решение задачи Коши (9) со специальной правой частью:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{G}(t) + \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{F}_k(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \tag{65}$$

где

$$\begin{aligned} \xi^0 :=&(\mathbf{u}^0;\rho^0)^\tau, \quad \mathcal{G}(t) := \big(\mathbf{g}(t);0\big)^\tau, \quad \mathbf{g}(t) := \big(\mathbf{g}_1(t);\ldots;\mathbf{g}_n(t)\big)^\tau, \\ \mathcal{F}_k(t) :=&\big(\mathbf{f}_k(t);0\big)^\tau, \quad \mathbf{f}_k(t) := \big(\mathbf{f}_{1,k}(t);\ldots;\mathbf{f}_{n,k}(t)\big)^\tau, \quad k = 0,1,\ldots,m. \end{aligned} \tag{66}$$

Будем искать (единственное) решение задачи (65) в виде

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) + \zeta(t), \quad \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) := (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{-1}. \tag{67}$$

Тогда функция $\zeta(t)$ должна быть решением задачи Коши

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathcal{A}\zeta + \mathcal{G}(t) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k'(t), \;\; \zeta(0) = \xi^0 - \sum_{k=0}^{m}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0). \tag{68}$$

Обозначим как и в лемме 16 через $\mathcal{U}(t)$ голоморфную полугруппу, генерируемую оператором $-\mathcal{A}$. Тогда из (68) и (67) найдём, что

$$\begin{aligned} \xi(t) = \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) + \mathcal{U}(t)\Big(\xi^0 - \sum_{k=0}^{m}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\Big) + \\ + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\Big(\mathcal{G}(s) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k s}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k'(s)\Big)\,ds. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 16 следует, что

$$\begin{aligned} \Big\|\xi(t) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|_{\mathcal{H}} = \Big\|\mathcal{U}(t)\Big(\xi^0 - \sum_{k=0}^{m}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\Big) + \\ + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\Big(\mathcal{G}(s) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k s}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k'(s)\Big)\,ds\Big\|_{\mathcal{H}} \\ \leqslant Me^{-\omega t}\Big(\|\xi^0\|_{\mathcal{H}} + \sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^{m}\|\mathcal{F}_k(0)\|_{\mathcal{H}}\Big) + \\ + M\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big(\|\mathcal{G}(s)\|_{\mathcal{H}} + \sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^{m}\|\mathcal{F}_k'(s)\|_{\mathcal{H}}\Big)\,ds \end{aligned}$$

$$\leqslant M_0 e^{-\omega t}\left(\|\xi^0\|_{\mathcal{H}} + \sum_{k=0}^{m} \|\mathcal{F}_k(0)\|_{\mathcal{H}}\right) + \\ + M_0 \int_0^t e^{-\omega(t-s)}\left(\|\mathcal{G}(s)\|_{\mathcal{H}} + \sum_{k=0}^{m} \|\mathcal{F}'_k(s)\|_{\mathcal{H}}\right) ds,$$

где $M_0 := M \max\bigl\{1, \sup\limits_{\lambda\in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(E)}\bigr\}$. Таким образом,

$$\left\|\xi(t) - \sum_{k=0}^{m} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\right\|_{\mathcal{H}} \leqslant M_0 e^{-\omega t}\left(\|\xi^0\|_{\mathcal{H}} + \sum_{k=0}^{m} \|\mathcal{F}_k(0)\|_{\mathcal{H}}\right) + \\ + M_0 \int_0^t e^{-\omega(t-s)}\left(\|\mathcal{G}(s)\|_{\mathcal{H}} + \sum_{k=0}^{m} \|\mathcal{F}'_k(s)\|_{\mathcal{H}}\right) ds. \quad (69)$$

Пусть $\|\mathbf{g}_i(t)\| = o(1)$, $\|\mathbf{f}'_{i,k}(t)\| = o(1)$ $(i = 1, \dots, n,\ k = 0, \dots, m)$ при $t \longrightarrow +\infty$. Тогда из (66) получим, что $\|\mathcal{G}(t)\|_{\mathcal{H}} = o(1)$, $\|\mathcal{F}'_k(t)\|_{\mathcal{H}} = o(1)$ при $t \longrightarrow +\infty$. Для того чтобы показать, что правая часть в (69) есть $o(1)$ при $t \longrightarrow +\infty$, достаточно доказать, что интегральное слагаемое в (69) стремится к нулю при $t \longrightarrow +\infty$. Пусть $h(t) := \|\mathcal{G}(t)\|_{\mathcal{H}} + \sum_{k=0}^{m} \|\mathcal{F}'_k(t)\|_{\mathcal{H}}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем последовательно числа $t_{\varepsilon,1}$ и $t_{\varepsilon,2}$ следующим образом:

$$t_{\varepsilon,1} > 0 : \sup_{t\geqslant t_{\varepsilon,1}} h(t) < \frac{\varepsilon\omega}{2}, \quad t_{\varepsilon,2} := \frac{1}{\omega}\ln\left(\frac{2}{\varepsilon\omega}\bigl(e^{\omega t_{\varepsilon,1}} - 1\bigr)\sup_{t\geqslant 0} h(t)\right).$$

Теперь для любого $t \geqslant t(\varepsilon) := \max\{t_{\varepsilon,1}, t_{\varepsilon,2}\}$ найдём, что

$$\int_0^t e^{-\omega(t-s)} h(s)\, ds = \int_0^{t_{\varepsilon,1}} e^{-\omega(t-s)} h(s)\, ds + \int_{t_{\varepsilon,1}}^t e^{-\omega(t-s)} h(s)\, ds \leqslant \\ \leqslant \frac{e^{-\omega t}}{\omega}\bigl(e^{\omega t_{\varepsilon,1}} - 1\bigr)\sup_{t\geqslant 0} h(t) + \frac{1}{\omega}\sup_{t\geqslant t_{\varepsilon,1}} h(t) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда, из (69) и определения оператора $\mathcal{A}$ следует (62).

Если $\mathbf{g}_j(t) \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{f}_{j,k}(t) \equiv \mathbf{f}_{j,k}$ $(j = 1, \dots, n,\ k = 0, \dots, m)$, то $\mathcal{G}(t) \equiv 0$, $\mathcal{F}'_k(t) \equiv 0$ $(k = 0, \dots, m)$ и из (69) следует (64). $\square$

Утверждения теоремы 2 следуют из лемм 17, 18.

References

[1] A. Al-Sharif, K. Chamniprasart, K.R. Rajagopal, A.Z. Szeri, *Lubrication with binary mixtures: Liquid-liquid emulsion*, J. Tribol., **115**:1 (1993), 46–55.

[2] T.Ya. Azizov, I.S. Iokhvidov, *Fundamentals of the theory of linear operators in spaces with an indefinite metric*, Nauka, Moscow, 1986. Zbl 0607.47031

[3] T.Ya. Azizov, N.D. Kopachevsky, L.D. Orlova, *Evolutionary and spectral problems generated by the problem of small movements of viscoelastic fluid*, Tr. St.-Peterbg. Mat. Obshch., **6** (1988), 5–33.

[4] F.V. Atkinson, H. Langer, R. Mennicken, A.A. Shkalikov, *The essential spectrum of some matrix operators*, Math. Nachr., **167** (1994), 5–20. Zbl 0831.47001

[5] S. Baris, *Some simple unsteady unidirectional flows of a binary mixture of incompressible Newtonian fluids*, Internat. J. Engrg. Sci., **40**:18 (2002), 2023–2040. MR1938668

[6] S. Baris, *Unsteady flows of a binary mixture of incompressible Newtonian fluids in an annulus*, Int. J. Eng. Sci., **43**:19-20 (2005), 1471–1485. Zbl 1211.76135

[7] S. Baris, M.S. Demir, *Flow of a binary mixture of fluids in a semicircular duct*, Int. J. Phys. Sci., **7** (2012), 1333–1345.

[8] S. Baris, M.S. Demir, *Hydromagnetic flows of a mixture of two Newtonian fluids between two parallel plates*, Int. J. Phys. Sci., **8**:9 (2013), 343–355.

[9] S. Baris, M. Dokuz, *Analytical solutions for some simple flows of a binary mixture of incompressible Newtonian fluids*, Turkish J. Eng. Env. Sci., **26**:6 (2002), 455–471.

[10] S. Baris, M. Dokuz, *Flow of a binary mixture of incompressible Newtonian fluids in a rectangular channel*, Int. J. Eng. Sci., **43**:1-2 (2005), 171–188.

[11] C.E. Beevers, R.E. Craine, *On the determination of response functions for a binary mixture of incompressible Newtonian fluids*, Int. J. Eng. Sci., **20**:6 (1982), 737–745. Zbl 0485.76084

[12] J.J. Benner, F. Sadeghi, M.R. Hoeprich, M.C. Frank, *Lubricating properties of water in oil emulsions*, J. Tribol., **128**:2 (2006), 296–311.

[13] Yu.M. Berezansky, *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, Naukova dumka, Kiev, 1965. Zbl 0142.37203

[14] M.Sh. Birman, M.Z. Solomjak, *Asymptotic behavior of the spectrum of differential equations*, Itogi Nauki Tehn., Ser. Mat. Anal., **14** (1977), 5–58. Zbl 0417.35061

[15] D. Bresch, V. Giovangigli, E. Zatorska, *Two-velocity hydrodynamics in fluid mechanics. I. Well posedness for zero Mach number systems*, J. Math. Pures Appl. (9), **104**:4 (2015), 762–800. Zbl 1359.35126

[16] D. Bresch, B. Desjardins, E. Zatorska, *Two-velocity hydrodynamics in fluid mechanics. II. Existence of global k-entropy solutions to the compressible Navier-Stokes systems with degenerate viscosities*, J. Math. Pures Appl. (9), **104**:4 (2015), 801–836.

[17] A.Yu. Chebotarev, *Inhomogeneous boundary-value problem of radiation heat transfer for a multicomponent medium*, Dal'nevost. Mat. Zh., **20**:1 (2020), 108–113. Zbl 1454.35148

[18] I.V. Denisova, V.A. Solonnikov, *Global solvability of a problem governing the motion of two incompressible capillary fluids in a container*, J. Math. Sci., New York, **185**:5 (2012), 668–686. Zbl 1278.35175

[19] V.N. Dorovsky, Yu.V. Perepechko, *The theory of partial melting*, Geologiya Geofizika, **9** (1989), 56–64.

[20] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Graduate Texts in Mathematics, **194**, Springer-Verlag, Berlin, 2000. Zbl 0952.47036

[21] E. Feireisl, *On weak solutions to a diffuse interface model of a binary mixture of compressible fluids*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, **9**:1 (2016), 173–183. Zbl 1342.35249

[22] K.V. Forduk, *Oscillations of a system of rigid bodies partially filled with viscous fluids under the action of an elastic damping device*, Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat., **42** (2022), 103–120. Zbl 1505.35298

[23] M. Faierman, R.J. Fries, R. Mennicken, M. Möller, *On the essential spectrum of the linearized Navier-Stokes operator*, Integral Equations Oper. Theory, **38**:1 (2000), 9–27. Zbl 0970.35093

[24] J. Frehse, S. Goj, J. Málek, *A Stokes-like system for mixtures*, In Birman, Michael Sh. (ed.) et al., *Nonlinear problems in mathematical physics and related topics II. In honour of Professor O. A. Ladyzhenskaya*, Kluwer, New York, 2002. Zbl 1024.76041

[25] J. Frehse, S. Goj, J. Málek, *On a Stokes-like system for mixtures of fluids*, SIAM J. Math. Anal., **36**:4 (2005), 1259–1281. Zbl 1084.35057

[26] J. Frehse, S. Goj, J. Málek, *A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum*, Appl. Math., Praha, **50**:6 (2005), 527–541. Zbl 1099.35079

[27] J. Frehse, W. Weigant, *On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids*, Appl. Math., Praha, **53**:4 (2008), 319–345. Zbl 1199.76026

[28] V. Giovangigli, M. Pokorný, E. Zatorska, *On the steady flow of reactive gaseous mixture*, Analysis, München, **35**:4 (2015), 319–341. Zbl 1327.76110

[29] I. Gohberg, S. Goldberg, M.A. Kaashoek, *Classes of linear operators. Vol. I*, Birkhäuser Verlag, Basel etc., 1990. Zbl 0745.47002

[30] J.A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford University Press, Oxford, 1985. Zbl 0592.47034

[31] G. Grubb, G. Geymonat, *The essential spectrum of elliptic systems of mixed order*, Math. Ann., **227** (1977), 247–276. Zbl 0361.35050

[32] Kh.Kh. Imomnazarov, Sh.Kh. Imomnazarov, M.M. Mamatkulov, E.G. Chernyh, *A fundamental solution to the stationary equation for two-velocity hydrodynamics with single pressure*, Sib. Zh. Ind. Mat., **17**:4 (2014), 60–66. Zbl 1340.76001

[33] T. Kato, *Perturbation theory of linear operators*, Mir, Moscow, 1972. Zbl 0247.47009

[34] A.N. Kozhevnikov, *Functional methods of mathematical physics. Tutorial*, Izd-vo MAI, Moscow, 1991.

[35] A. Kozhevnikov, T. Skubachevskaya, *Some applications of pseudo-differential operators to elasticity*, Hokkaido Math. J., **26**:2 (1997), 297–322. Zbl 0893.35087

[36] S.G. Krein, *Linear differential equations in a Banach space*, Nauka, Moscow, 1967. Zbl 0172.41903

[37] N.A. Kucher, A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Stationary solutions to the equations of dynamics of mixtures of heat-conductive compressible viscous fluids* Sib. Math. J., **53**:6 (2012), 1075–1088. Zbl 1308.35167

[38] P. Lancaster, *Theory of matrices*, Academic Press, New York-London, 1969. Zbl 0186.05301

[39] S.-W. Lo, T.-C. Yang, H.-S. Lin, *The lubricity of oil-in-water emulsion in cold strip rolling process under mixed lubrication*, Tribology International, **66** (2013), 125–133.

[40] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence*, Methods Appl. Anal., **20**:2 (2013), 179–196. Zbl 1290.35203

[41] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solubility of a stationary boundary-value problem for the eqnarrays of motion of a one-temperature mixture of viscous compressible heat-conducting fluids*, Izv. Math., **78**:3 (2014), 554–579. Zbl 1359.76244

[42] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solvability of initial boundary value problem for the equations of polytropic motion of multicomponent viscous compressible fluids*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **13** (2016), 541–583. Zbl 1351.35144

[43] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solubility of unsteady equations of multi-component viscous compressible fluids*, Izv. Math., **82**:1 (2018), 140–185. Zbl 1423.76385

[44] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solubility of unsteady equations of the three-dimensional motion of two-component viscous compressible heat-conducting fluids*, Izv. Math., **85**:4 (2021), 755–812. Zbl 1479.35688

[45] A.S. Marcus, V.I. Matsaev, *A theorem on comparison of spectra and spectral asymptotics for a Keldysh pencil*, Mat. Sb., N. Ser., **123(165)**:3 (1984), 391–406. Zbl 0562.47014

[46] R. Mennicken, A.A. Shkalikov, *Spectral decomposition of symmetric operator matrices*, Math. Nachr., **179** (1996), 259–273. Zbl 0874.47009

[47] M. Massoudi, *Flow of a binary mixture of linearly incompressible viscous fluids between two horizontal parallel plates*, Mech. Res. Commun., **35**:8 (2008), 603–608. Zbl 1258.76188

[48] P.B. Mucha, M. Pokorný, E. Zatorska, *Heat-conducting, compressible mixtures with multicomponent diffusion: construction of a weak solution*, SIAM J. Math. Anal., **47**:5 (2015), 3747–3797. Zbl 1322.76052

[49] R.I. Nigmatulin, *Dynamics of multiphase media, Vol. 1*, Nauka, Moscow, 1987.

[50] O.A. Oleĭnik, A.G. Iosif'ian, A.S. Shamaev, *Mathematical problems in the theory of strongly inhomogeneous elastic media*, Izd-vo MGU, Moscow, 1990. Zbl 0746.73003

[51] P.K. Pal, V.N. Maslennikova, *Spectral properties of operators in the problem of the oscillation of a compressible fluid in rotating containers*, Sov. Math., Dokl., **31** (1985), 318–322. Zbl 0615.35059

[52] K.L. Rajagopal, L. Tao, *Mechanics of mixtures*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, **35**, World Scientific, Singapore, 1995. Zbl 0941.74500

[53] K. Rektorys, *Variational Methods in Mathematical Physics and Engineering*, Mir, Moscow, 1985. Zbl 0668.49001

[54] V.A. Solonnikov, *General boundary value problems for Douglis-Nirenberg elliptic systems*, Proc. Steklov Inst. Math., **92** (1966), 269–339. Zbl 0168.36701

[55] K.S. Surana, M. Powell, J.N. Reddy, *A simple mixture theory for ν Newtonian and generalized Newtonian constituents*, Contin. Mech. Thermodyn., **26**:1 (2014), 33–65. Zbl 1341.76030

[56] C. Tretter, *Spectral theory of block operator matrices and applications*, Imperial College Press, London, 2008. Zbl 1173.47003

[57] L.R. Volevich, *Solvability of boundary value problems for general elliptic systems*, Mat. Sb., N. Ser., **68(110)**:3 (1965), 373–416. Zbl 0141.29801

[58] S.H. Wang, A.Z. Szeri, K.R. Rajagopal, *Lubrication with emulsion in cold rolling*, J. Tribol., **115**:3 (1993), 523–531.

[59] D.A. Zakora, *Asymptotics of solutions to a system of connected incomplete second-order integro-differential operator equations*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **15** (2018), 971–986. Zbl 1397.45003

[60] D.A. Zakora, N.D. Kopachevsky, *To the problem of small oscillations of a system of two viscoelastic fluids filling immovable vessel: model problem*, J. Math. Sci., New York, **265**:6 (2022), 888–912. Zbl 7599131

[61] D.A. Zakora, *Asymptotic behavior of solutions of a complete second-order integro-differential equation*, Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, **68**:3 (2022), 451–466.

[62] D.A. Zakora, *Spectral properties of the operator in the problem of oscillations in a mixture of viscous compressible fluids*, Differ. Equ., **59**:4 (2023), 473–490. Zbl 7709452

[63] E. Zatorska, *On the flow of chemically reacting gaseous mixture*, J. Differ. Equations, **253**:12 (2012), 3471–3500. Zbl 1258.35041

Dmitry Alexandrovich Zakora
V.I. Vernadsky Crimean Federal University,
4, pr. Vernadskogo,
295007, Simferopol, Russia
Email address: dmitry.zkr@gmail.com