S©MR ISSN 1813–3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

*Том 20, №2, стр. 638–645 (2023)* УДК 519.174.7
DOI 10.33048/semi.2023.20.038 MSC 05C50

# ТЕСТОВЫЕ ФРАГМЕНТЫ СОВЕРШЕННЫХ РАСКРАСОК ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ

М.А. ЛИСИЦЫНА, С.В. АВГУСТИНОВИЧ

Abstract. Let $G = (V, E)$ be a transitive graph. A subset $T$ of the vertex set $V(G)$ is a $k$-test fragment if for every perfect $k$-coloring $\phi$ of the graph $G$ there exists a position of this fragment, whose partial coloring allows to reconstruct the whole $\phi$.

The objects of this study are $k$-test fragments of infinite circulant graphs. An infinite circulant graph with distances $d_1 < d_2 < \ldots < d_n$ is a graph, whose set of vertices is the set of integers, and two vertices $i$ and $j$ are adjacent if $|i-j| \in \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$. If $d_i = i$ for all $i$ from 1 to $n$, then the graph is called an infinite circulant graph with a continuous set of distances.

Upper bounds for the cardinalities of minimal $k$-test fragments of infinite circulant graphs with a continuous set of distances are obtained for any $n$ and $k$. A rough estimate is also obtained in the general case – for infinite circulant graphs with distances $d_1, d_2, \ldots, d_n$ and an arbitrary finite $k$.

**Keywords:** perfect coloring, infinite circulant graph, $k$-test fragment.

## 1. Введение

Пусть $G = (V, E)$ – произвольный транзитивный граф (конечный или бесконечный). *Совершенной раскраской графа $G$ с матрицей параметров $M = (m_{ij})$* называется такая раскраска его вершин, что для каждой вершины цвета $i$ число смежных с ней вершин цвета $j$ равняется $m_{ij}$. Для совершенной раскраски $G$ в $k$ цветов будем также использовать термин *совершенная $k$-раскраска*.

---

Lisitsyna, M.A., Avgustinovich, S.V., Test fragments of perfect colorings of circulant graphs.



Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0018).

*Поступила 5 января 2023 г., опубликована 7 ноября 2023 г.*

*Фрагмент* $T$ — произвольное множество вершин графа $G$. *Длина* $T$ равна его мощности. Минимальность фрагмента с тем или иным свойством будем рассматривать относительно его длины.

Фрагмент $T$ графа $G$ будем называть *строго $k$-тестовым*, если для любой совершенной $k$-раскраски $\phi$ этого графа сужение $\phi$ на $T$ позволяет однозначно эту раскраску восстановить. Другими словами, сужение двух различных $k$-раскрасок на $T$ различны. Для транзитивных графов определим понятие $k$-тестового фрагмента $T$ следующим образом. Если для любой $k$-раскраски найдется автоморфизм $\pi$ такой, что сужение раскраски на $\pi(T)$ позволяет эту раскраску однозначно восстановить, то этот фрагмент будем называть просто *$k$-тестовым*. Понятно, что строго $k$-тестовый фрагмент является $k$-тестовым, но обратное верно не всегда. Данное определение оказывается полезным при машинном переборе всех совершенных раскрасок заданного графа. Перебрав все $k$-раскраски $k$-тестового фрагмента небольшой длины мы каждую из них либо однозначно продолжим до совершенной раскраски графа, либо придем к противоречию (к невозможности совершенного продолжения). Таким образом, получим все совершенные $k$-раскраски графа с точностью до эквивалентности (для получения всех раскрасок достаточно к описанным применить вышеупомянутые автоморфизмы). Аналогично определяется *$k$-пестрый* фрагмент графа $G$. Это фрагмент $T$, который для любой совершенной $k$-раскраски $\phi$ может быть переведен в такое положение (с помощью автоморфизма графа $G$), в котором он содержит вершины всех $k$ цветов раскраски $\phi$.

В [1] было показано, что тестовым фрагментом совершенного кода с расстоянием 3 в гиперкубе $E_n$ является множество вершин такого гиперкуба веса $\frac{(n+1)}{2}$. Аналогичный результат для центрированных функций (т.е. функций, сумма значений которых в любом шаре радиуса 1 не зависит от выбора шара) получен в [2]. В [3] рассматривается класс действительнозначных функций, определенных на всех двоичных наборах длины $n$. Для этого класса восстановление функции происходит не только по части своих значений, но и по коэффициентам Фурье в остальных точках.

Объектами данного исследования являются $k$-тестовые фрагменты бесконечных циркулянтных графов. *Бесконечный циркулянтный граф с дистанциями* $d_1 < d_2 < \ldots < d_n$ – это граф, множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, причем вершины $i$ и $j$ соединены ребром, если $|i-j| \in \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$. Обозначается такой граф через $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Граф $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ называется *бесконечным циркулянтным графом со сплошным набором дистанций* (см. рис. 1).

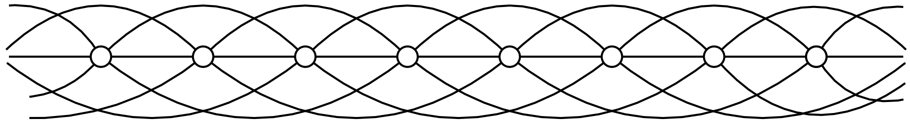

Рис. 1. Локальное строение графа $C_\infty(1, 2, 3)$

Ряд теорем для совершенных раскрасок циркулянтных графов в 2 цвета доказан Д. Б. Хорошиловой [4, 5]. Совершенные 2-раскраски графов $C_\infty(1, 2,$

$\ldots, n)$ и $C_\infty(1, 3, \ldots, 2n-1)$ охарактеризованы в [6] и [7]. Результаты для произвольного конечного числа цветов и графов $C_\infty = C_\infty(1)$ и $C_\infty(1, 2)$ получены в [8] и [9] соответственно. В [10] приведена бесконечная серия совершенных раскрасок графов $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ с периодами нового типа.

Везде в дальнейшем в качестве $k$-тестового и $k$-пестрого фрагментов графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots d_n)$ будем рассматривать целочисленные отрезки. Не ограничивая общности, считаем, что это отрезки вида $T = [1, N]$ для $N \in \mathbb{N}$. В леммах 1 и 2 доказаны свойства $k$-тестового и $k$-пестрого фрагментов бесконечного циркулянтного графа.

**Лемма 1.** *В любой совершенной $k$-раскраске графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ цвета вершин 1 и $N$ минимального $k$-пестрого фрагмента $T = [1, N]$ различны и в фрагменте $T^{'} = [2, N-1]$ не встречаются.*

*Доказательство.* Докажем лемму 1 от противного. Не ограничивая общности, предположим, что в фрагменте $[2, N-1]$ есть вершина, соцветная с вершиной 1. Тогда фрагмент $T^{''} = [2, N]$ содержит вершины всех $k$ цветов, т.е. является $k$-пестрым. Получаем противоречие с минимальностью $T$. □

**Лемма 2.** *Если $T = [1, N]$ – минимальный $k$-пестрый фрагмент графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, тогда фрагмент $T^{'} = [1-d_n, N+d_n]$ является его $k$-тестовым фрагментом.*

*Доказательство.* Зная раскраску фрагмента $T^{'}$ графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, можно или восстановить матрицу параметров $M$ раскраски, или сразу сделать вывод о том, что такой совершенной раскраски не существует. В первом случае, продолжая окрашивать граф влево и вправо от $T^{'}$ согласно параметрам, либо однозначно восстановим совершенную раскраску в силу ее периодичности (доказана в [5]), либо получим противоречие (когда ее нет). □

Согласно лемме 2, для того чтобы получить верхнюю оценку на длину минимального $k$-тестового фрагмента бесконечного циркулянтного графа, достаточно оценить длину его минимального $k$-пестрого фрагмента.

## 2. Основные результаты

Для тестовых фрагментов бесконечных циркулянтных графов справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Длина минимального 2-тестового фрагмента графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ не превосходит $2d_n + 2$.*

*Доказательство.* Минимальный пестрый фрагмент совершенной 2-раскраски исследуемого графа состоит из двух соседних вершин, окрашенных цветами $a$ и $b$. В силу леммы 2 длина минимального 2-тестового фрагмента для него не превосходит $2d_n + 2$ (см. рис. 2).

□

Из теоремы 1 следует, что длину минимального 2-тестового фрагмента бесконечного циркулянтного графа со сплошным набором $n$ дистанций можно оценить сверху величиной $2n + 2$.

**Теорема 2.** *Длина минимального 3-тестового фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ не превосходит $4n + 1$.*

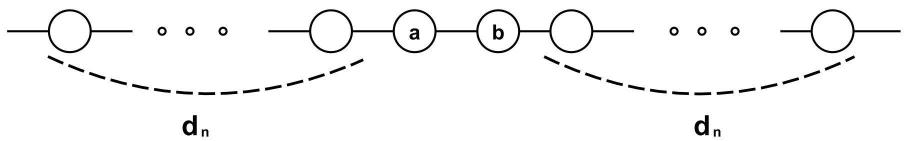


Рис. 2. 2-тестовый фрагмент графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$

*Доказательство.* Рассмотрим минимальный 3-пестрый фрагмент $[1, N]$ графа $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$. В силу леммы 1 положим, не ограничивая общности, что вершины с номерами 1 и $N$ окрашены цветами $a$ и $b$ соответственно, а все вершины между ними — цветом $c$ ($c \neq a, c \neq b$). Докажем, что длина фрагмента $[2, N-1]$ меньше $2n$. В противном случае, цветовые составы окружения вершин $n+1$ и $N-n$ цвета $c$ не совпадают. Первая из них видит $a$, но не видит $b$, а вторая – видит $b$, но не видит $a$. Таким образом, длина минимального 3-тестового фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ не превосходит $4n+1$ согласно лемме 2 (см. рис. 3).

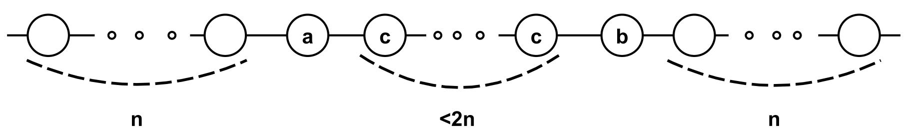


Рис. 3. 3-тестовый фрагмент графа $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$

□

Пусть $T = [1, N]$ – минимальный пестрый фрагмент бесконечного циркулянтного графа со сплошным набором $n$ дистанций. Пусть длина $T$ больше или равна $2n+3$. *Левыми* назовем вершины от 1 до $n+1$, *серединой* – от $n+2$ до $N-n-1$, а *правыми* – от $N-n$ до $N$. Цвета левых, средних и правых вершин фрагмента $T$ будем также называть *левыми, средними* и *правыми.*

Докажем вспомогательное утверждение.

**Лемма 3.** *Если длина минимального $k$-пестрого фрагмента $T = [1, N]$ графа $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ не меньше $2n+2$, то цвета вершин $n+1$ и $N-n$ различны в любой совершенной $k$-раскраске.*

*Доказательство.* Пусть $N \geq 2n+2$. Цвет вершины 1 обозначим через $a$, а вершины $N$ — через $b$. Согласно лемме 1 цветами $a$ и $b$ в $T$ окрашены только крайние вершины. Цвета вершин $n+1$ и $N-n$ различны, потому что в окружении первого из них есть цвет $a$, и нет $b$, а в окружении второго наоборот — есть цвет $b$, но нет $a$ (см. рис. 4).

□

В следующей теореме получена верхняя оценка на длину минимального 4-тестового фрагмента циркулянтного графа со сплошным набором дистанций.

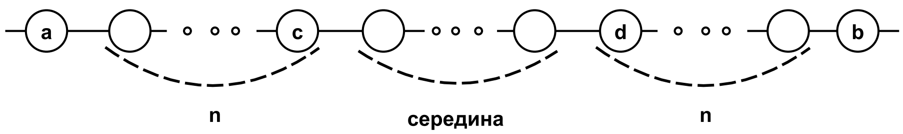


Рис. 4. Середина $k$-пестрого фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \dots, n)$

**Теорема 3.** *Длина минимального 4-тестового фрагмента графа* $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ *не превосходит* $4n + 2$.

*Доказательство.* Доказательство теоремы 3 начнем с того же, что и доказательство предыдущей теоремы. Рассмотрим минимальный 4-пестрый фрагмент $T = [1, N]$ графа $C_\infty(1, 2, \dots, n)$, и положим, что вершины с номерами 1 и $N$ окрашены цветами $a$ и $b$ соответственно.

Покажем, что $N < 2n+3$. Предположим противное: пусть $N \geq 2n+3$. Тогда у фрагмента $T$ есть середина, и вершины $n+1$ и $N-n$ окрашены в $c$ и $d$ в силу лемм 1 и 3. В 1-окрестности середины нет вершин цветов $a$ и $b$, значит, для раскраски ее вершин требуется пятый цвет. Получили противоречие. Значит, $N < 2n+3$, и длина 4-тестового фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ не превосходит $4n + 2$. □

Перейдем к случаю $k > 4$. В силу леммы 2, для того чтобы найти верхнюю оценку длины минимального $k$-тестового фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \dots, n)$, достаточно оценить длину его минимального $k$-пестрого фрагмента $T = [1, N]$. Чтобы вычислить последнюю, рассмотрим два случая: $N \geq 3n+2$ и $N < 3n+2$.

Остановимся подробнее на первом случае. При таких $N$ середина фрагмента $T$ не пуста, более того, ее длина не меньше $n$. Докажем несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 4.** *Пусть* $k > 4$. *Если длина минимального* $k$*-пестрого фрагмента* $T = [1, N]$ *графа* $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ *не меньше* $3n + 2$, *то множества левых, средних и правых цветов попарно не пересекаются ни в одной совершенной* $k$*-раскраске.*

*Доказательство.* Поскольку $N \geq 3n + 2 > 2n + 3$, вершины 1, $N$, $n + 1$ и $N - n$ можно покрасить различными цветами $a$, $b$, $c$ и $d$ соответственно (см. леммы 1 и 3). В окружении вершин середины нет цветов $a$ и $b$, следовательно, множество средних цветов не пересекается ни с множеством левых цветов, ни с множеством правых.

Докажем теперь, что пересечение и этих множеств (левых и правых цветов) пусто. Пусть это не так, и цвет $e$ является для них общим. Положим для определенности, что им окрашены некоторая левая вершина $x$ и некоторая правая вершина $y$ ($1 < x < n + 1$, $N - n < y < N$). В окружении $x$ есть вершина цвета $c$, значит, и в окружении $y$ должна быть вершина этого цвета. Фрагменту $[y - n, N - n - 1]$ она принадлежать не может, так как он является подмножеством середины. Другие элементы 1-окрестности $y$ также не могут быть окрашены цветом $c$, так как они имеют в своем окружении вершину $N$ цвета $b$. Противоречие. □

Для фиксированной совершенной раскраски и минимального $k$-пестрого фрагмента $T$ *уникальными* будем называть цвета, которые встречаются в $T$ ровно один раз.

**Лемма 5.** *Если длина минимального $k$-пестрого фрагмента $T = [1, N]$ графа $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ не меньше $3n + 2$, то каждый его средний цвет является уникальным в любой совершенной $k$-раскраске.*

*Доказательство.* Предположим противное: найдутся одинаково окрашенные вершины из середины – $s$ и $t$. Рассмотрим такую пару с наименьшим $s$. Все соседи $s$ слева окрашены либо левыми цветами, либо уникальными. Важно, что такие цвета точно не могут встречаться справа от нее. Цветовые составы 1-окрестностей вершин $s$ и $t$ должны совпадать в силу равенства их цветов, но это невозможно. Действительно, рассмотрим два случая. Если $s$ видит хотя бы один левый цвет, то $t$ видит меньшее число левых цветов в силу своего расположения и того факта, что справа от нее левых цветов быть не может. В случае же когда $s > 2n + 1$, вершина $s$ видит цвет вершины $s - n$, который уникален и не виден вершине $t$. Подытожим: если минимальный $k$-пестрый фрагмент графа $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ имеет длину $N \geq 3n + 2$, то все его средние цвета уникальны. □

Сформулируем и докажем теорему о длине минимального $k$-тестового фрагмента бесконечного циркулянтного графа со сплошным набором дистанций для произвольного $k > 4$.

**Теорема 4.** *Длина минимального $k$-тестового фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ не превосходит $\max\{4n + k - 2, 5n + 1\}$ для $k > 4$.*

*Доказательство.* Если $N < 3n + 2$, то по лемме 2 длина минимального $k$-тестового фрагмента исследуемого графа не превосходит $5n + 1$.

В противном случае, все вершины середины фрагмента $T$ окрашены уникальными цветами согласно лемме 5. Отсюда следует, что длина середины не больше $k - 4$. Тогда длина минимального $k$-пестрого фрагмента не больше $2n + k - 2$.

Значит, длина минимального $k$-тестового фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ не превосходит $\max\{4n + k - 2, 5n + 1\}$ для $k > 4$.

□

**Следствие 1.** *Если длина минимального $k$-пестрого фрагмента $T = [1, N]$ графа $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ не меньше $3n + 2$, то все его вершины окрашены уникально в любой совершенной $k$-раскраске.*

*Доказательство.* Итак, $N \geq 3n+2$. В силу леммы 4 множества левых, средних и правых цветов попарно не пересекаются. В лемме 5 доказана уникальность средних цветов для таких $N$. А цвет любой левой (правой) вершины уникален, так как однозначно определяется количеством средних вершин в ее окружении.

□

Чтобы получить оценку на длину $k$-тестового фрагмента графа $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ напомним некоторые определения и введем новые понятия.

Рассмотрим связный граф $G = (V, E)$. Эксцентриситетом вершины $v$ называется величина $e(v)$ равная $\max\limits_{u \in V} d(u, v)$, где $d(u, v)$ – кратчайшее расстояние между вершинами $u$ и $v$. Радиус графа $r(G)$ определяется как наименьший из эксцентриситетов его вершин. Множество вершин, удовлетворяющих свойству $e(v) = r(G)$, составляют центр графа $G$. Для связного графа $G$ с $n$ вершинами справедливо следующее соотношение:

$$r(G) \leq \left[\frac{n}{2}\right].$$

Доказательство этого факта можно найти, например, в [11].

Рассмотрим совершенную $k$-раскраску графа $G$ с матрицей параметров $M$. *Характеристическим графом* $G_\chi(M)$ матрицы параметров $M$ называется граф с множеством вершин $1, 2, \dots, k$, вершины $i$ и $j$ соединены в $G_\chi(M)$ ребром, если $m_{ij} \neq 0$ и $m_{ji} \neq 0$. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.** *Длина минимального $k$-тестового фрагмента графа $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ не превосходит $d_n(k+2)+1$ для $k \geq 3$.*

*Доказательство.* Рассмотрим совершенную $k$-раскраску $\phi$ графа $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ с матрицей параметров $M$. Построим характеристический граф $G_\chi(M)$ матрицы параметров $M$. Так как в нем $k$ вершин, то его радиус не превосходит $[\frac{k}{2}]$.

Выберем из центра графа $G_\chi(M)$ одну произвольную вершину. Пусть цвет, ей соответствующий – $c$. Расстояние от вершины цвета $c$ до вершины любого другого цвета в раскраске $\phi$ графа $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ не превосходит $d_n \cdot [\frac{k}{2}]$. Значит, длина минимального $k$-пестрого фрагмента не превосходит величины $d_n k + 1$. Отсюда по лемме 2 следует, что длина $k$-тестового фрагмента графа $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ не превосходит $d_n(k+2)+1$ (см. рис. 5).

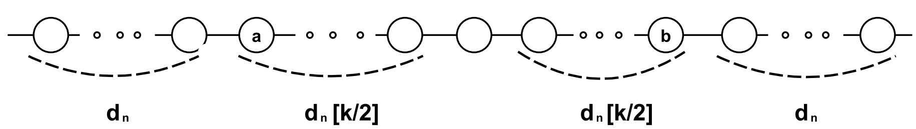


Рис. 5. $K$-тестовый фрагмент графа $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$

□

Таким образом, получены верхние оценки на длины минимальных $k$-тестовых фрагментов графов $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ и $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ для произвольных натуральных $k$ и $n$.

## 3. Заключение

В работе получено несколько больше, чем анонсировалось. Найдены не только верхние оценки на длины минимальных $k$-тестовых фрагментов исследуемых циркулянтных графов, но и в значительной степени описана структура этих фрагментов. Понимание этой структуры позволяет существенно сократить перебор при отыскании всех совершенных $k$-раскрасок графов $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ и $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ с помощью компьютера.

## References


[1] S.V. Avgustinovich, *On a property of perfect binary codes*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **2**:1 (1995), 4–6. Zbl 0846.94017

[2] S.V. Avgustinovich, A.Yu. Vasil'eva, *Computation of a centered function through its values on middle layers of the Boolean cube*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1, **10**:2 (2003), 3–16. Zbl 1067.94018

[3] A.Yu. Vasil'eva, *On reconstructive sets of vertices in the Boolean cube*, J. Appl. Ind. Math., **6**:3 (2012), , 393–402. Zbl 1324.05165

[4] D.B. Khoroshilova, *On the parameters of perfect 2-colorings of circulant graphs*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **18**:6 (2011), 82–89. Zbl 1249.05121

[5] D.B. Khoroshilova, *On circular perfect two-color colorings*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **16**:1 (2009), 80–92. Zbl 1249.05119

[6] O.G. Parshina, *Perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances*, J. Appl. Industr. Math., **8**:3 (2014), 357–361. Zbl 1324.05064

[7] O.G. Parshina, M.A. Lisitsyna, The perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of odd distances, Sib. Èlectron. Math. Izv., **17** (2020), 590–603. Zbl 1440.05095

[8] M.A. Lisitsyna, S.V. Avgustinovich, *Perfect colorings of the prism graph*, Sib. Èlectron. Math. Izv., **13** (2016), 1116–1128. Zbl 1370.05138

[9] M.A. Lisitsyna, O.G. Parshina, *Perfect colorings of the infinite circulant graph with distances 1 and 2*, J. Appl. Industr. Math., **11**:3 (2017), 381–388. Zbl 1399.05079

[10] V.D. Plaksina, P.A. Shcherbina, *New perfect colorings of infinite circulant graphs with continuous sets of distanses*, Sib. Èlectron. Math. Izv., **18**:1 (2021), 530–533. Zbl 1462.05144

[11] V.G. Vizing, *The number of edges in a graph of given radius*, Sov. Math., Dokl., **8** (1967), 535–536. Zbl 0158.42504



Mariya Aleksandrovna Lisitsyna
Budyonny Military Academy of the Signal Corps,
pr. Tikhoretsky, 3,
194064, St Petersburg, Russia
*Email address*: lisitsyna.mariya.mathematician@gmail.com

Sergey Vladimirovich Avgustinovich
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
*Email address*: avgust@math.nsc.ru