

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

*Том 20, №2, стр. 923–941 (2023)*  
DOI 10.33048/semi.2023.20.056УДК 519.168, 519.712.3  
MSC 90C27, 05C85, 68W25ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ О ДВУХ  
КОММИВОЯЖЕРАХ И О ДВУХ ЦИКЛОВЫХ ПОКРЫТИЯХ  
НА МАКСИМУМ С ДВУМЯ ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

А. Н. ГЛЕБОВ, С. С. ЛЫЛОВА, С. Г. ТОКТОХОЕВА

ABSTRACT. We present new polynomial approximation algorithms for the 2-Perpatetic Salesman Problem and the 2-Cycle Cover Problem. The  $m$ -Perpatetic Salesman Problem ( $m$ -PSP) is a generalization of the classical Traveling Salesman Problem. In the  $m$ -PSP, we need to find  $m$  edge disjoint Hamiltonian cycles of the extremal total weight in a complete weighted graph  $G = (V, E)$ . In the  $m$ -Cycle Cover Problem ( $m$ -CC), we need to find  $m$  edge disjoint cycle covers of the extremal weight in  $G$ . Many exact and approximation algorithms were proposed for the case of  $m$ -PSP where we are given only one weight function  $w : E \rightarrow \mathbf{R}^+$  and the weight of  $m$  Hamiltonian cycles  $H_1, H_2, \dots, H_m$  is defined as  $w(H_1) + \dots + w(H_m)$ . However, not so many results are known for the case when we are given  $m$  distinct weight functions  $w_1, w_2, \dots, w_m$  and the weight of  $H_1, H_2, \dots, H_m$  is defined as  $w_1(H_1) + w_2(H_2) + \dots + w_m(H_m)$  (the  $m$ -PSP- $m$ W problem). Here we present a series of polynomial algorithms with approximation ratios  $1/2$  and higher for the 2-PSP-max-2W. As a supporting result, we produce a polynomial algorithm with the asymptotic ratio  $\frac{2}{3}$  for the 2-CC-max-2W problem.

**Keywords:** Traveling Salesman Problem, 2-Perpatetic Salesman Problem, Cycle Cover Problem, approximation algorithm, guaranteed approximation ratio, weight function

---

ГЛЕБОВ А.Н., ЛЫЛОВА С.С., ТОКТОХОЕВА С. Г., APPROXIMATION ALGORITHMS FOR 2-PSP-2W-MAX AND 2-CC-2W-MAX.

© 2022 ГЛЕБОВ А. Н., ЛЫЛОВА С. С., ТОКТОХОЕВА С. Г..

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0017).

Поступила 11 декабря 2022 г., опубликована 12 декабря 2023 г.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача об  $m$  коммивояжерах ( $m$ -Peripatetic Salesman Problem или  $m$ -PSP) является естественным обобщением классической задачи коммивояжера (Traveling Salesman Problem или TSP) и состоит в поиске  $m$  реберно непересекающихся гамильтоновых циклов с минимальным или максимальным суммарным весом ребер в полном взвешенном графе  $G = (V, E)$ . Из результатов работ [4, 5, 6] следует, что все содержательные постановки задачи  $m$ -PSP, как на минимум, так и на максимум, являются NP-трудными. Поэтому важное значение имеет разработка полиномиальных приближенных алгоритмов для разных версий этой задачи. За последние 20 лет было предложено множество таких алгоритмов, однако большинство из них относятся к случаю, когда во входном графе  $G = (V, E)$  задана одна весовая функция ребер  $w : E \rightarrow \mathbf{R}^+$ , которая является общей для всех гамильтоновых циклов  $H_1, H_2, \dots, H_m$ , составляющих решение задачи. Это означает, что суммарный вес этих циклов определяется как  $w(H_1) + w(H_2) + \dots + w(H_m)$ .

При указанном предположении, для симметричного варианта задачи  $m$ -PSP (когда входной граф является неориентированным, а веса ребер удовлетворяют тождеству  $w(xy) = w(yx)$ ) были получены следующие результаты. Агеев и Пяткин [2] разработали полиномиальный 2-приближенный алгоритм для метрической версии задачи 2-PSP-min (когда веса ребер удовлетворяют неравенству треугольника). Для задачи 2-PSP-max с произвольной весовой функцией в [1, 14] были построены полиномиальные алгоритмы с гарантированными оценками  $3/4$  и  $7/9$ . В [10] было получено несколько полиномиальных приближенных алгоритмов, включая алгоритм с оценкой точности  $6/5$ , для специального случая задачи 2-PSP-min, когда веса ребер принимают значения 1 и 2 (задача 2-PSP(1,2)-min). Для метрического варианта задачи  $m$ -PSP-max (при произвольном  $m$ ) в [11] был разработан полиномиальный алгоритм с гарантированной оценкой  $5/6$ , а для евклидовой задачи  $m$ -PSP-max в [3] был получен асимптотически точный полиномиальный алгоритм. Для несимметричного варианта задачи  $m$ -PSP-max (когда входной граф является ориентированным) в [13] был построен полиномиальный алгоритм с асимптотической оценкой точности  $2/3$ .

Гораздо меньше результатов было получено для задачи  $m$ -PSP в случае, когда во входном графе  $G = (V, E)$  задано  $m$  весовых функций  $w_1, w_2, \dots, w_m : E \rightarrow \mathbf{R}^+$ , а суммарный вес гамильтоновых циклов  $H_1, H_2, \dots, H_m$  определяется как  $w_1(H_1) + w_2(H_2) + \dots + w_m(H_m)$  (так называемая задача  $m$ -PSP- $mW$ ). Так в работах [12, 15] исследовалась постановка задачи 2-PSP-min-2W с весами ребер 1 и 2 и были предложены полиномиальные алгоритмы с оценками точности  $7/5$  [12] и  $4/3$  [15]. В [17] для метрической задачи 2-PSP-max-2W был получен полиномиальный алгоритм с асимптотической оценкой  $11/16$ . При этом ни в одной из ранее опубликованных работ ни при каком  $m \geq 2$  не был предложен полиномиальный алгоритм с гарантированной оценкой точности в наиболее общем случае задачи  $m$ -PSP- $mW$ , когда весовые функции  $w_1, w_2, \dots, w_m$  принимают произвольные неотрицательные значения.

В настоящей статье впервые получена серия полиномиальных приближенных алгоритмов с оценками точности  $1/2$  и выше для задачи 2-PSP-max-2W а также для связанной с ней задачи о двух реберно непересекающихся цикловых покрытиях максимального суммарного веса в графе с двумя весовыми функциями (задача 2-CC-max-2W).

В разделе 2 статьи вводятся необходимые определения и обозначения. В разделах 3 и 4 описываются полиномиальные  $1/2$ -приближенные алгоритмы для задачи 2-PSP-max-2W в ее симметричной и несимметричной постановках соответственно. Раздел 5 посвящен обоснованию того, что оценка точности  $1/2$  полученных выше алгоритмов является наилучшей в определенном смысле. В разделе 6 разработан полиномиальный приближенный алгоритм для задачи 2-CC-max-2W с асимптотической оценкой

точности  $\frac{2}{3}$ . В заключительном разделе 7, основываясь на методах и подходах из раздела 6, построен полиномиальный алгоритм для задачи 2-PSP-max-2W, оценка точности которого превышает  $1/2$ .

Отметим, что задача об  $m$  реберно непересекающихся цикловых покрытиях максимального веса в графе с одной весовой функцией (задача  $m$ -CC-max) является полиномиально разрешимой при любом значении  $m$ . Однако сложностной статус задачи  $m$ -CC-max- $mW$  при  $m \geq 2$  нам не известен.

## 2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть  $G = G(V, E, w_1, w_2)$  — полный неориентированный или ориентированный граф с  $n$  вершинами и неотрицательными весовыми функциями ребер (дуг)  $w_1 : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  и  $w_2 : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Для каждого подграфа  $G'$  графа (орграфа)  $G$  через  $w(G')$  обозначается суммарный вес ребер (дуг), составляющих  $G'$ .

Для каждой вершины  $v \in V$  (ор)графа  $G$  через  $d(v)$  обозначим *степень вершины*  $v$ , то есть количество инцидентных  $v$  ребер (дуг). В случае ориентированного графа  $G$  будем также использовать следующие обозначения:

$d^+(v)$  — *полу степень исхода* — количество исходящих из  $v$  дуг;

$d^-(v)$  — *полу степень захода* — количество входящих в  $v$  дуг;

Ясно, что  $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$  для любой вершины  $v \in V$ .

Подграф  $G'$  неориентированного графа  $G$  называется  $k$ -*регулярным*, если для каждой его вершины  $v$  выполняется равенство  $d(v) = k$ . Подграф  $G'$  ориентированного графа  $G$  будем называть  $(k, k)$ -*регулярным*, если для каждой его вершины  $v$  выполняются равенства  $d^+(v) = d^-(v) = k$ . *Цикловым покрытием* или *2-фактором* (*ориентированным 2-фактором*) в неориентированном (ориентированном) графе  $G$  называется любой его остоновый 2-регулярный ((1,1)-регулярный) подграф, то есть набор из вершинно непересекающихся циклов (контуров), покрывающих все вершины  $G$ .

*Частичным туром*  $T$  в графе (орграфе)  $G$  назовем набор вершинно непересекающихся (ориентированных) цепей, покрывающих все вершины  $G$ . *Смешанным туром* в (ор)графе  $G$  назовем набор вершинно непересекающихся (ориентированных) цепей и циклов, покрывающих все вершины  $G$ . При этом некоторые цепи могут состоять из одной вершины; будем называть такие цепи (*синглами*), а цепи, состоящие из более чем одной вершины — *нетривиальными* цепями. Через  $|T|$  и  $p(T)$  обозначается число ребер и число цепей в смешанном туре  $T$ , соответственно. Ясно, что для любого смешанного тура  $T$  выполняется равенство:  $|T| + p(T) = |V(G)|$ .

Заметим, что любой частичный тур  $T$  в графе (орграфе)  $G$  можно дополнить до (ориентированного) гамильтонова цикла  $H$ , добавляя к  $T$  ребра (дуги), соединяющие концевые вершины цепей тура  $T$ . При этом, в силу неотрицательности весовых функций  $w_1$  и  $w_2$ , справедливы неравенства  $w_1(H) \geq w_1(T)$  и  $w_2(H) \geq w_2(T)$ . Также очевидно, что из любого циклового покрытия или смешанного тура  $Z$  (ор)графа  $G$  можно получить частичный тур  $T$ , удаляя из  $Z$  часть ребер (хотя бы по одному ребру из каждого цикла в  $Z$ ). При этом выполняются неравенства  $w_1(T) \leq w_1(Z)$  и  $w_2(T) \leq w_2(Z)$ .

*Двудольной моделью орграфа*  $G$  назовем двудольный неориентированный граф  $B$  с долями  $V = V(G)$  и  $V'$ , где  $V'$  — множество дубликатов всех вершин орграфа  $G$ , и  $\{X, Y'\} \in E(B) \Leftrightarrow (X, Y) \in E(G)$ .

Симметричная (несимметричная) задача о двух коммивояжерах на максимум с двумя различными весовыми функциями обозначается через 2-PSP-max-2W (2-APSP-max-2W) и заключается в нахождении двух непересекающихся по ребрам (дугам) (ориентированных) гамильтоновых циклов  $H_1, H_2$  в графе (орграфе)  $G$ , для которых суммарный вес составляющих их ребер (дуг) максимален:

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \rightarrow \max$$

(в ориентированном случае допускается, что цикл  $H_i$  содержит дугу  $(X, Y)$ , а цикл  $H_j$  содержит встречную дугу  $(Y, X)$ ). Через  $w^*$  будем обозначать вес оптимального решения задачи 2-PSP-мах-2W (2-APSP-мах-2W).

Далее в статье приводится описание и анализ приближенных алгоритмов  $A_{1/2}$  и  $\tilde{A}_{1/2}$  для задач 2-PSP-мах-2W и 2-APSP-мах-2W. Основная идея обоих алгоритмов заключается в нахождении в графе двух цикловых покрытий максимального веса относительно весовых функций  $w_1$  и  $w_2$  соответственно и последующем преобразовании этих покрытий в два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла, составляющих искомого  $\frac{1}{2}$ -приближенное решение задачи.

### 3. АЛГОРИТМ $A_{1/2}$ ДЛЯ ЗАДАЧИ 2-PSP-МАХ-2W

Если  $n \leq 14$ , то с помощью полного перебора находим в графе  $G$  два непересекающихся по ребрам гамильтоновых цикла  $H_1^*, H_2^*$ , составляющих оптимальное решение задачи 2-PSP-мах-2W. Предположим, что  $n \geq 15$ .

*Этап 1.* С помощью алгоритма Габова из [9] находим в графе  $G$  цикловое покрытие  $C_1$ , имеющее наибольший вес  $w_1(C_1)$ . Далее с помощью того же алгоритма находим в  $G$  цикловое покрытие  $C_2$ , имеющее наибольший вес  $w_2(C_2)$ . Поскольку каждый из гамильтоновых циклов  $H_1^*$  и  $H_2^*$  является цикловым покрытием  $G$ , то выполняются неравенства  $w_1(C_1) \geq w_1(H_1^*)$  и  $w_2(C_2) \geq w_2(H_2^*)$ . Следовательно,  $w_1(C_1) + w_2(C_2) \geq w^*$ . При этом цикловые покрытия  $C_1$  и  $C_2$  могут иметь общие ребра.

*Этап 2.* Удалим из цикловых покрытий  $C_1$  и  $C_2$  часть ребер, применяя алгоритм удаления ребер, описанный в разделе 3.1. В результате получим два реберно непересекающихся частичных тура  $T_1, T_2$ , для веса которых справедливо неравенство

$$w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}w_1(C_1) + w_2(C_2) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

При этом каждый из туров  $T_1, T_2$  состоит не менее чем из трех цепей, и длина любой его цепи не превосходит 5.

*Этап 3.* Используя процедуру  $T \rightarrow H$ , описанную в разделе 3.2 и основанную на процедуре  $T^{3n} \rightarrow H$  из работы [10], дополняем тур  $T_1$  до гамильтонова цикла  $H_1$ , не имеющего общих ребер с туром  $T_2$ . Далее с помощью той же процедуры  $T \rightarrow H$  дополняем тур  $T_2$  до гамильтонова цикла  $H_2$ , не используя ребер из уже построенного цикла  $H_1$ . Предъявляем пару реберно непересекающихся гамильтоновых циклов  $H_1$  и  $H_2$  в качестве искомого  $1/2$ -приближенного решения задачи 2-PSP-мах-2W.

Основные свойства данного алгоритма описываются следующей теоремой.

**Теорема 1.** *Представленный выше алгоритм  $A_{1/2}$  находит в полном взвешенном неориентированном графе  $G = (V, E, w_1, w_2)$  два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла  $H_1, H_2$ , суммарный вес которых удовлетворяет неравенству  $w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq \frac{1}{2}w^*$ . Время работы алгоритма  $A_{1/2}$  оценивается как  $O(n^3)$ , где  $n$  — число вершин графа  $G$ .*

Доказательство этой теоремы приводится в разделе 3.3.

#### 3.1. Процедура построения частичных туров.

Процедура получает на вход два цикловых покрытия  $C_1$  и  $C_2$  с максимальным суммарным весом относительно функций  $w_1$  и  $w_2$  соответственно. Далее происходит удаление части ребер из  $C_1$  и  $C_2$  с целью получения реберно непересекающихся частичных туров  $T_1$  и  $T_2$  необходимого веса.

Назовём ребро графа  $G$  *двойным*, если оно входит в оба цикловых покрытия  $C_1$  и  $C_2$ , и *одиночным*, если оно принадлежит только одному из этих покрытий.

**Процедура удаления двойных ребер.**

Рассмотрим в графе  $G$  подграф  $D$  с множеством вершин  $V$  и множеством всех двойных ребер  $G$ . Ясно, что  $D$  является подграфом каждого из цикловых покрытий  $C_1$  и  $C_2$ . Следовательно,  $D$  — это смешанный тур в  $G$ .

Рассмотрим произвольную компоненту связности  $P$  (цепь или цикл) в  $D$ . Пусть  $P = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$ , где  $v_k = v_0$ , если  $P$  является циклом. Определим две суммы весов ребер:

$$W_1 = w_2(e_1) + w_1(e_2) + w_2(e_3) + w_1(e_4) + \dots$$

$$W_2 = w_1(e_1) + w_2(e_2) + w_1(e_3) + w_2(e_4) + \dots$$

Если  $W_1 > W_2$ , то удалим из  $C_1$  ребра  $e_1, e_3, e_5, \dots$ , а из  $C_2$  удалим ребра  $e_2, e_4, e_6, \dots$ . Если  $W_2 \geq W_1$ , то удалим из  $C_1$  ребра  $e_2, e_4, e_6, \dots$ , а из  $C_2$  удалим ребра  $e_1, e_3, e_5, \dots$ . В результате в каждом из цикловых покрытий  $C_1, C_2$  будет удалено каждое второе ребро цепи (цикла)  $P$ , а суммарный вес всех удаленных ребер не превосходит  $\frac{1}{2}(W_1 + W_2) = \frac{1}{2}(w_1(P) + w_2(P))$ . При этом для каждого  $i = 1, 2$ , все не удаленные из  $C_i$  ребра цепи (цикла)  $P$  попарно несмежны, за исключением, возможно, пары ребер  $e_1, e_k$ , в случае, когда  $P$  является циклом нечетной длины  $k$ .

**Процедура удаления одиночных ребер.**

Рассмотрим произвольный цикл  $C$  в  $C_1$ . Обозначим через  $U = e_1, e_2, e_3, \dots, e_t$  последовательность всех одиночных ребер из  $C$ , где ребра обозначены в порядке их обхода по циклу. Определим две суммы весов ребер:

$$W_1 = w_1(e_1) + w_1(e_3) + w_1(e_5) + \dots$$

$$W_2 = w_1(e_2) + w_1(e_4) + w_1(e_6) + \dots$$

Если  $W_1 > W_2$ , то удалим из  $C_1$  ребра  $e_2, e_4, e_6, \dots$ . Если  $W_2 \geq W_1$ , то удалим из  $C_1$  ребра  $e_1, e_3, e_5, \dots$ . Заметим, что сумма весов всех удаленных одиночных ребер цикла  $C$  не превосходит  $\frac{1}{2}w_1(U)$ . Аналогично поступим с каждым циклом из  $C_1$  и из  $C_2$ , при этом ребра из  $C_2$  будем рассматривать относительно весовой функции  $w_2$ .

**Лемма 1.** *В результате применения процедур удаления двойных и одиночных ребер цикловые покрытия  $C_1$  и  $C_2$  преобразуются в реберно непересекающиеся частичные туры  $T_1$  и  $T_2$ . Длина любой цепи в каждом из туров  $T_1, T_2$  не превосходит 5. При этом выполняется неравенство*

$$w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}(w_1(C_1) + w_2(C_2)) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

*Доказательство.* Из описания процедур сразу следует, что  $T_1$  и  $T_2$  — это смешанные туры в  $G$ , не содержащие общих ребер, для которых выполняется требуемое неравенство. Докажем, что  $T_1$  и  $T_2$  являются частичными турами. Для этого достаточно убедиться, что из каждого цикла  $C$  в каждом из цикловых покрытий  $C_1, C_2$  удаляется хотя бы одно ребро. Действительно, если цикл  $C$  содержит хотя бы два одиночных ребра, то одно из них удаляется процедурой удаления одиночных ребер. В противном случае  $C$  содержит цепь из  $|C| - 1 \geq 2$  двойных ребер, и хотя бы одно из них удаляется процедурой удаления двойных ребер.

Остается доказать, что длина любой цепи в каждом из туров  $T_1, T_2$  не превосходит 5. Пусть  $P$  — произвольная цепь из  $T_1$  (для цепи из  $T_2$  доказательство аналогично). Рассмотрим в цикловом покрытии  $C_1$  цикл  $C = (v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0)$ , содержащий цепь  $P$ . Если все ребра  $C$  изначально были двойными, то после процедуры удаления двойных ребер цепь  $P$  может содержать только одно или два ребра (а именно, ребра  $e_1 = v_0v_1$  и  $e_k = v_{k-1}v_0$ , в случае нечетного  $k$ ). Пусть цикл  $C$  содержит хотя бы одно одиночное ребро. Без потери общности, можно считать, что ребро  $e_1 = v_0v_1$  является одиночным. Из процедур удаления ребер следует, что в цепи  $P$  не может быть двух последовательных двойных ребер и есть только одно или два одиночных ребра, а именно, ребра  $e_1 = v_0v_1$  и  $e_t = v_{j-1}v_j$  при нечетном  $t$ . Если цепь  $P$  содержит только одно одиночное ребро  $v_{i-1}v_i$ , то она может содержать еще только два двойных ребра:

$v_{i-2}v_{i-1}$  и  $v_iv_{i+1}$ . В этом случае длина  $P$  не превосходит 3. Если же цепь  $P$  содержит одиночные ребра  $e_1 = v_0v_1$  и  $e_t = v_{j-1}v_j$ , то она может содержать еще только три двойных ребра:  $v_{j-2}v_{j-1}$ ,  $v_jv_0$  и  $v_1v_2$  (при  $j = k - 1$ ). В этом случае длина цепи  $P$  не превосходит 5. Лемма 1 доказана.

### 3.2. Процедура $T \rightarrow H$ замыкания частичного тура в гамильтонов цикл.

В статье [10] была описана процедура, которая, получая на вход частичный тур  $T$  и частичный тур или гамильтонов цикл  $S$ , не имеющий общих ребер с  $T$ , за время  $O(n)$  дополняет тур  $T$  до гамильтонова цикла  $H$ , не имеющего общих ребер с  $S$ . Условием корректной работы этой процедуры является наличие в туре  $T$  не менее трех нетривиальных цепей. Поэтому сначала мы добьемся того, чтобы каждый из построенных на Этапе 2 алгоритма частичных туров  $T_1, T_2$  содержал не менее трех нетривиальных цепей.

Согласно лемме 1 каждая цепь в  $T_1$  и  $T_2$  содержит не более шести вершин. Из неравенства  $n \geq 15$  следует, что число цепей в каждом из туров  $T_1$  и  $T_2$  не меньше трех. Если хотя бы три из этих цепей являются нетривиальными, то получаем требуемое. Если тур  $T_1$  содержит только две нетривиальные цепи, то общее число вершин в этих цепях не больше 12, а значит,  $T_1$  содержит по крайней мере  $15 - 12 = 3$  сингла. Поскольку в туре  $T_2$  нет треугольников, то какие-то два из этих синглов не соединены ребром в  $T_2$ . Добавляя ребро между ними к туру  $T_1$ , получаем третью нетривиальную цепь в  $T_1$ . Если тур  $T_1$  содержит только одну нетривиальную цепь, то в нем есть не менее  $15 \setminus 6 = 9$  синглов, из которых можно составить две тройки синглов, и в каждой тройке соединить какие-то два сингла ребром. В результате получаем три нетривиальных цепи в туре  $T_1$ . Аналогично поступаем с туром  $T_2$ .

Теперь, когда каждый из туров  $T_1, T_2$  содержит хотя бы по три нетривиальных цепи, при помощи упомянутой выше процедуры из [10], дополняем частичный тур  $T_1$  до гамильтонова цикла  $H_1$ , не имеющего общих ребер с туром  $T_2$ . Далее при помощи той же процедуры дополняем тур  $T_2$  до гамильтонова цикла  $H_2$ , не имеющего общих ребер с уже построенным циклом  $H_1$ . В итоге получаем два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла  $H_1$  и  $H_2$ , составляющих искомое приближенное решение задачи 2-PSP-max-2W.

### 3.3. Доказательство теоремы 1.

Из неравенства в лемме 1, неотрицательности весовых функций  $w_1, w_2$  и того факта, что построенные процедурой  $T \rightarrow H$  гамильтоновы циклы  $H_1$  и  $H_2$  содержат все ребра частичных туров  $T_1$  и  $T_2$  соответственно, следует, что

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

Трудоёмкость алгоритма  $A_{1/2}$  определяется временем работы алгоритма Габова на Этапе 1, которое оценивается как  $O(n^3)$ . Теорема 1 доказана.

## 4. АЛГОРИТМ $\tilde{A}_{1/2}$ ДЛЯ ЗАДАЧИ 2-APSP-MAX-2W

Приведенный ниже алгоритм  $\tilde{A}_{1/2}$  основан на тех же идеях, что и алгоритм  $A_{1/2}$  для задачи 2-PSP-max-2W, но имеет ряд отличий.

Если  $n \leq 18$ , то с помощью полного перебора находим в орграфе  $G$  два непересекающихся по ребрам ориентированных гамильтоновых цикла  $H_1, H_2$ , являющиеся оптимальным решением задачи 2-APSP-max-2W. Предположим, что  $n > 18$ .

*Этап 1.* Находим в  $G$  два ориентированных цикловых покрытия  $C_1$  и  $C_2$  с максимальным суммарным весом дуг относительно функций  $w_1$  и  $w_2$  соответственно. Для поиска  $C_1$  и  $C_2$  используем двудольную модель  $B$  орграфа  $G$ , в которой за время  $O(n^3)$  находим два совершенных паросочетания максимального веса относительно каждой из весовых функций. Найденным паросочетаниям в  $B$  соответствуют искомые цикловые покрытия  $C_1$  и  $C_2$  максимального веса в  $G$ .

*Этап 2.* Используя процедуру “Построение ориентированных частичных туров”, описанную в разделе 4.1, выделим в  $C_1 \cup C_2$  два реберно непересекающихся частичных тура  $T_1, T_2$ , суммарный вес которых удовлетворяет неравенству:

$$w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}(w_1(C_1) + w_2(C_2)) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

*Этап 3.* При помощи процедуры “Замыкание ориентированных частичных туров в гамильтоновы циклы”, описанной в разделе 4.2, дополним полученные на Этапе 2 частичные туры  $T_1, T_2$  до реберно непересекающихся ориентированных гамильтоновых циклов  $H_1, H_2$ , суммарный вес которых удовлетворяет неравенству:

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

Предъявляем пару гамильтоновых циклов  $H_1, H_2$  в качестве искомого приближенного решения задачи 2-APSP-max-2W.

Основным результатом данного раздела статьи являются следующая

**Теорема 2.** *Представленный выше алгоритм  $\tilde{A}_{1/2}$  находит в полном взвешенном ориентированном графе  $G = (V, E, w_1, w_2)$  два реберно непересекающихся ориентированных гамильтоновых цикла  $H_1, H_2$ , суммарный вес которых удовлетворяет неравенству  $w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq \frac{1}{2}w^*$ . Время работы алгоритма  $A_{1/2}$  оценивается как  $O(n^3)$ , где  $n$  — число вершин орграфа  $G$ .*

Доказательство теоремы 2 приводится в разделе 4.3. В разделе 5 доказывается, что в рамках используемого нами подхода оценка точности  $1/2$  алгоритмов  $A_{1/2}$  и  $\tilde{A}_{1/2}$  является наилучшей.

#### 4.1. Построение ориентированных частичных туров.

Процедура получает на вход два ориентированных цикловых покрытия  $C_1$  и  $C_2$  с максимальным суммарным весом относительно функций  $w_1$  и  $w_2$  соответственно. Далее процедура строит частичные туры необходимого веса путем удаления дуг из цикловых покрытий  $C_1$  и  $C_2$ .

Назовём дугу  $e = (x, y)$  *двойной*, если она входит в оба цикловых покрытия  $C_1$  и  $C_2$ , и *одиночной*, если она входит только в одно из покрытий. Назовем двойную дугу  $e = (x, y)$  *сингулярной относительно  $C_i$* , если встречная дуга  $e' = (y, x)$  принадлежит цикловому покрытию  $C_i$ , то есть если  $C_i$  содержит цикл  $(x, e, y, e', x)$  длины 2. Назовем сингулярную дугу  $e = (x, y)$  *2-сингулярной*, если встречная дуга  $e' = (y, x)$  принадлежит обоим цикловым покрытиям  $C_1$  и  $C_2$ , и *1-сингулярной*, если  $e'$  принадлежит только одному из покрытий  $C_1$  или  $C_2$ . Назовем дугу  $e = (x, y)$  циклового покрытия  $C_i$  *квазиодиночной*, если она либо одиночная, либо 1-сингулярная относительно  $C_{3-i}$ . В последнем случае дуги  $e' = (y, x)$  и  $e'' = (x, y)$  покрытия  $C_{3-i}$  будем называть *дополняющими* (для  $e$ ).

##### Процедура удаления двойных дуг.

Определим орграф  $D$  как остовный подграф в  $G$ , состоящий из всех 2-сингулярных двойных дуг и всех двойных дуг, не являющихся сингулярными. Ясно, что каждая компонента связности  $D$  является цепью или циклом. Пусть  $P = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$  — произвольная компонента связности в  $D$ , где  $v_k = v_0$ , если  $P$  является циклом.

Если  $P$  содержит 2-сингулярную дугу  $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ , то каждое из цикловых покрытий  $C_1$  и  $C_2$  содержит обе дуги  $e_i = (v_{i-1}, v_i)$  и  $e'_i = (v_i, v_{i-1})$ , а значит, содержит цикл  $Z = (v_{i-1}, e_i, v_i, e'_i, v_{i-1})$  длины 2. Отсюда следует, что  $k = 2$ ,  $i = 1$  и  $P = Z = (v_0, e_1, v_1, e'_1, v_0)$ . Если  $w_1(e_1) + w_2(e'_1) < w_2(e_1) + w_1(e'_1)$ , то удалим из  $C_1$  дугу  $e_1$ , а из  $C_2$  удалим дугу  $e'_1$ . В противном случае удалим из  $C_1$  дугу  $e'_1$ , а из  $C_2$  удалим дугу  $e_1$ .

Пусть  $P$  не содержит 2-сингулярных (а значит, и вообще сингулярных) дуг. Определим две суммы весов дуг:

$$W_1 = w_2(e_1) + w_1(e_2) + w_2(e_3) + w_1(e_4) + \dots$$

$$W_2 = w_1(e_1) + w_2(e_2) + w_1(e_3) + w_2(e_4) + \dots$$

Если  $W_1 > W_2$ , то удалим из  $C_1$  дуги  $e_1, e_3, e_5, \dots$ , а из  $C_2$  удалим дуги  $e_2, e_4, e_6, \dots$ . Если  $W_2 \geq W_1$ , то удалим из  $C_1$  дуги  $e_2, e_4, e_6, \dots$ , а из  $C_2$  удалим дуги  $e_1, e_3, e_5, \dots$ . В результате в каждом из цикловых покрытий  $C_1, C_2$  будет удалена каждая вторая дуга цепи (цикла)  $P$ , а суммарный вес всех удалённых дуг не превосходит  $\frac{1}{2}(W_1 + W_2) = \frac{1}{2}(w_1(P) + w_2(P))$ .

**Процедура удаление квазиодиночных и дополняющих дуг.**

Рассмотрим по отдельности каждый цикл  $C$  покрытия  $C_1$ . Если  $C$  состоит только из двойных дуг, то  $C$  принадлежит также цикловому покрытию  $C_2$ , а значит, является компонентой связности в орграфе  $D$ . В этом случае удаление дуг из  $C$  выполняется согласно процедуре удаления двойных дуг.

Пусть цикл  $C$  содержит хотя бы одну одиночную дугу. Обозначим через  $U = e_1, e_2, e_3, \dots, e_t$  последовательность всех квазиодиночных дуг из  $C$ , где дуги обозначены в порядке их обхода по циклу. Для каждой 1-сингулярной дуги  $e_i = (u, v)$  обозначим через  $e'_i = (v, u)$  и  $e''_i = (u, v)$  дополняющие ее дуги циклового покрытия  $C_2$ . Для каждой одиночной дуги  $e_j$  из  $U$  также формально введем обозначения  $e'_j$  и  $e''_j$ , считая  $e'_j$  и  $e''_j$  фиктивными дугами и полагая  $w_2(e'_j) = w_2(e''_j) = 0$ . Определим две суммы весов дуг:

$$W_1 = (w_1(e_1) + w_2(e'_1)) + w_2(e''_1) + (w_1(e_3) + w_2(e'_3)) + w_2(e''_3) + \dots$$

$$W_2 = w_2(e''_1) + (w_1(e_2) + w_2(e'_2)) + w_2(e''_2) + (w_1(e_4) + w_2(e'_4)) + \dots$$

Если  $W_1 > W_2$ , то удалим из  $C_1$  дуги  $e_2, e_4, e_6, \dots$ , а из  $C_2$  удалим дуги  $e''_1, e'_2, e''_3, e'_4, \dots$ . Если  $W_2 \geq W_1$ , то удалим из  $C_1$  дуги  $e_1, e_3, e_5, \dots$ , а из  $C_2$  удалим дуги  $e'_1, e''_2, e'_3, e''_4, \dots$  (разумеется, речь идет об удалении из  $C_2$  только реально существующих дуг, дополняющих 1-сингулярные дуги цикла  $C$ ).

Заметим, что сумма весов всех удаленных дуг не превосходит  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (w_1(e_i) + w_2(e'_i) + w_2(e''_i))$ , то есть не превосходит полусуммы весов всех квазиодиночных и дополняющих дуг для цикла  $C$ . Применим описанную процедуру к каждому циклу из  $C_1$  и  $C_2$ .

**Лемма 2.** *В результате процедур удаления двойных, квазиодиночных и дополняющих дуг цикловые покрытия  $C_1$  и  $C_2$  преобразуются в реберно непересекающиеся частичные туры  $T_1$  и  $T_2$ . Длина любой цепи в каждом из туров  $T_1, T_2$  не превосходит 5. При этом выполняется неравенство*

$$w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}(w_1(C_1) + w_2(C_2)) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

*Доказательство.* Из описания процедур следует, что  $T_1$  и  $T_2$  — это смешанные туры без общих дуг, для веса которых выполняется требуемое неравенство. Докажем, что  $T_1$  и  $T_2$  являются частичными турами, то есть из каждого цикла  $C$  в каждом из цикловых покрытий  $C_1, C_2$  удаляется хотя бы одна дуга. Если цикл  $C$  имеет длину не меньше 3 и содержит хотя бы две квазиодиночные дуги, то одна из них удаляется процедурой удаления квазиодиночных и дополняющих дуг. Если  $C$  имеет длину не меньше 3 и содержит не более одной квазиодиночной дуги, то  $C$  содержит цепь из  $|C| - 1 \geq 2$  двойных дуг, хотя бы одна из которых удаляется процедурой удаления двойных дуг. Пусть  $C$  — цикл длины 2 в  $C_i$ . Если обе дуги в  $C$  являются одиночными, то одна из них удаляется процедурой удаления квазиодиночных и дополняющих дуг. Если ровно одна дуга в  $C$  является одиночной, то цикл  $C$  состоит из двух дополняющих дуг для некоторой 1-сингулярной дуги покрытия  $C_{3-i}$ . В этом случае одна из дуг цикла  $C$  также удаляется процедурой удаления квазиодиночных



и дополняющих дуг. Наконец, если цикл  $C$  образован двумя двойными дугами, то обе они являются 2-сингулярными, а значит, одна из них удаляется процедурой удаления двойных дуг.

Остается доказать, что длина любой цепи в каждом из туров  $T_1, T_2$  не превосходит 5. Пусть  $P$  — цепь из  $T_1$ , и пусть  $C = (v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0)$  — цикл из  $C_1$  длины  $k > 2$ , содержащий  $P$ . Если цикл  $C$  состоит только из двойных дуг, то после процедуры удаления двойных дуг цепь  $P$  будет содержать только одну или две дуги ( $e_1 = (v_0, v_1)$  и  $e_k = (v_{k-1}, v_0)$ , в случае нечетного  $k$ ). Пусть  $C$  содержит одиночную дугу  $e_1 = (v_0, v_1)$ . Из процедур удаления двойных и квазиодиночных дуг следует, что в цепи  $P$  не может быть двух последовательных двойных дуг и может быть всего одна или две квазиодиночные дуги, а именно, дуги  $e_1 = (v_0, v_1)$  и  $e_t = (v_{j-1}, v_j)$  при нечетном  $t$ . Отсюда аналогично доказательству леммы 1 выводится, что длина цепи  $P$  не превосходит 5. Лемма 2 доказана.

#### 4.2. Замыкание ориентированных частичных туров в гамильтоновы циклы.

В статье [16] была описана процедура, которая, получая на вход ориентированный частичный тур  $T$  и ориентированный частичный тур или гамильтонов цикл  $S$ , не имеющих общих дуг с  $T$ , за время  $O(n)$  дополняет тур  $T$  до ориентированного гамильтонова цикла  $H$ , не имеющего общих дуг с  $S$ . Условием корректной работы этой процедуры является наличие в туре  $T$  не менее четырех цепей (среди которых могут быть синглы).

Так как  $n > 18$ , и по лемме 2 каждая цепь туров  $T_1$  и  $T_2$  содержит не более шести вершин, то каждый из этих туров состоит не менее чем из четырех цепей. Применяя процедуру из [16], сперва дополняем частичный тур  $T_1$  до ориентированного гамильтонова цикла  $H_1$ , не имеющего общих дуг с туром  $T_2$ . Далее при помощи той же процедуры дополняем тур  $T_2$  до ориентированного гамильтонова цикла  $H_2$ , не имеющего общих дуг с уже построенным циклом  $H_1$ . В итоге получаем два ориентированных гамильтоновых цикла  $H_1$  и  $H_2$  без общих дуг, составляющих искомое приближенное решение задачи 2-APSP-max-2W.

#### 4.3. Доказательство теоремы 2.

Из неравенства в лемме 2, неотрицательности весовых функций  $w_1, w_2$  и того факта, что построенные гамильтоновы циклы  $H_1$  и  $H_2$  содержат все дуги частичных туров  $T_1$  и  $T_2$  соответственно, следует, что

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq w_1(T_1) + w_2(T_2) \geq \frac{1}{2}w^*.$$

Трудоёмкость алгоритма  $A_{1/2}$  определяется временем отыскания ориентированных цикловых покрытий  $C_1, C_2$  на Этапе 1, которое оценивается как  $O(n^3)$ . Теорема 2 доказана.

#### 5. "Неулучшаемость" оценки точности 1/2

Нетрудно заметить, что если в качестве верхней границы для веса оптимального решения в задачах 2-PSP-max-2W и 2-APSP-max-2W использовать величину  $w_1^* + w_2^*$ , где  $w_1^*$  и  $w_2^*$  — это оптимумы для задачи о максимальном цикловом покрытии с весовыми функциями  $w_1$  и  $w_2$  соответственно (как это делается выше при анализе алгоритмов  $A_{1/2}$  и  $\tilde{A}_{1/2}$ ), то полученную оценку точности 1/2 относительно этой верхней границы улучшить невозможно.

Действительно, рассмотрим входной граф (орграф)  $G = (V, E, w_1, w_2)$ , где  $w_1 = w_2$ , и веса всех ребер некоторого (ориентированного) гамильтонова цикла  $H$  равны 1, а веса всех остальных ребер графа равны нулю. В этом случае справедливы равенства  $w_1^* = w_2^* = n$ , причем единственным максимальным цикловым покрытием

относительно любой из весовых функций является гамильтонов цикл  $H$ . При этом для веса оптимального решения задачи 2-PSP-max-2W (2-APSP-max-2W) также выполняется равенство  $w^* = n$ , поскольку в графе  $G$  только ребра цикла  $H$  имеют ненулевой вес, равный 1, и каждое из этих ребер может принадлежать только одному из гамильтоновых циклов, составляющих оптимальное решение задачи 2-PSP-max-2W (2-APSP-max-2W). Поэтому для веса оптимального решения выполняется равенство  $w^* = \frac{1}{2}(w_1^* + w_2^*) = n$ , что не позволяет получить для задач 2-PSP-max-2W и 2-APSP-max-2W приближенных алгоритмов с оценками точности выше  $1/2$  по отношению к сумме  $w_1^* + w_2^*$ . Приведенный пример показывает, что данный вывод остается в силе и в том случае, если в качестве  $w_1^*$  и  $w_2^*$  рассматривать оптимумы для задачи коммивояжера TSP-max с весовыми функциями  $w_1$  и  $w_2$  соответственно.

Сделанное замечание указывает на ограниченность использованного нами подхода, при котором алгоритм на первом этапе независимо находит два (пересекающихся по ребрам) максимальных цикловых покрытия для весовых функций  $w_1$  и  $w_2$ , а затем использует эти покрытия для построения приближенного решения задачи 2-PSP-max-2W (2-APSP-max-2W). При этом в качестве верхней границы для веса оптимального решения используется сумма  $w_1^* + w_2^*$ . Чтобы преодолеть это ограничение, мы переходим к разработке приближенного алгоритма для задачи 2-CC-max-2W, который находит в графе два *реберно непересекающихся* цикловых покрытия  $C_1$  и  $C_2$ , и к разработке основанного на аналогичных идеях алгоритма для задачи 2-PSP-max-2W с оценкой точности, превышающей  $1/2$ .

#### 6. АЛГОРИТМ $A_{2/3-\varepsilon}$ ДЛЯ ЗАДАЧИ 2-CC-MAX-2W

В этом разделе через  $C_1^*$  и  $C_2^*$  обозначаются два реберно непересекающихся цикловых покрытия во входном графе  $G$ , составляющие оптимальное решение задачи 2-CC-max-2W. Положим  $c_1^* = w_1(C_1^*)$  и  $c_2^* = w_2(C_2^*)$ . Тогда вес оптимального решения задачи 2-CC-max-2W равен  $c^* = c_1^* + c_2^*$ .

В приведенном ниже алгоритме используется тот факт, что полиномиальный алгоритм поиска циклового покрытия максимального веса корректно работает не только для полного входного графа, но и для произвольного.

Если  $n \leq 9$ , то с помощью полного перебора находим в графе  $G$  два реберно непересекающихся цикловых покрытия  $C_1^*, C_2^*$ , составляющие оптимальное решение задачи 2-CC-max-2W. Предположим, что  $n \geq 10$ .

*Этап 1.1.* Находим в графе  $G$  цикловое покрытие  $C_1$ , имеющее наибольший вес  $w_1(C_1)$ . Удаляем из  $G$  все ребра покрытия  $C_1$ , и в полученном графе  $G \setminus C_1$  находим цикловое покрытие  $F_2$ , имеющее наибольший вес  $w_2(F_2)$ . В результате получаем пару реберно непересекающихся цикловых покрытий  $C_1, F_2$  в  $G$ , причем  $w_1(C_1) \geq c_1^*$ .

*Этап 1.2.* Находим в  $G$  цикловое покрытие  $C_2$ , имеющее наибольший вес  $w_2(C_2)$ . Удаляем из  $G$  все ребра покрытия  $C_2$ , и в полученном графе  $G \setminus C_2$  находим цикловое покрытие  $F_1$ , имеющее наибольший вес  $w_1(F_1)$ . Тем самым получаем пару реберно непересекающихся цикловых покрытий  $F_1, C_2$ , причем  $w_2(C_2) \geq c_2^*$ .

*Этап 2.* Формируем смешанный тур  $K_1$ , состоящий из всех ребер циклового покрытия  $C_2$ , не принадлежащих  $C_1$ , и из всех таких ребер  $e \in C_1 \cap C_2$ , что  $w_1(e) \geq w_2(e)$ . Аналогично формируем смешанный тур  $K_2$ , состоящий из всех ребер покрытия  $C_1$ , не принадлежащих  $C_2$  и из всех таких ребер  $e \in C_1 \cap C_2$ , что  $w_2(e) > w_1(e)$ . Из данного определения следует, что  $K_1$  и  $K_2$  — это два реберно непересекающихся смешанных тура в  $G$ , где  $K_1 \subseteq C_2$ ,  $K_2 \subseteq C_1$  и  $K_1 \cup K_2 = C_1 \cup C_2$ . Также нетрудно понять, что пара туров  $K_1, K_2$  обладает наибольшим реберным весом  $w_1(K_1) + w_2(K_2)$  среди всех таких пар реберно непересекающихся смешанных туров, что первый из них целиком содержится в  $C_2$ , а второй — в  $C_1$ .

*Этап 3.* Применяя процедуру, описанную в разделе 6.1, преобразуем смешанный тур  $K_1$  в цикловое покрытие  $Z_1$ , не содержащее ребер тура  $K_2$  и имеющее вес  $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$ . Далее с помощью той же процедуры преобразуем тур  $K_2$  в цикловое покрытие  $Z_2$ , не содержащее ребер из уже построенного покрытия  $Z_1$  и имеющее вес  $w_2(Z_2) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_2(K_2)$ .

*Этап 4.* Обозначим через  $(J_1, J_2)$  ту из пар реберно непересекающихся цикловых покрытий  $(C_1, F_2)$ ,  $(F_1, C_2)$ ,  $(Z_1, Z_2)$ , которая имеет наибольший вес  $w_1(J_1) + w_2(J_2)$ . Предъявляем пару цикловых покрытий  $(J_1, J_2)$  в качестве искомого приближенного решения задачи 2-CC-max-2W.

Основным результатом данного раздела статьи является следующая

**Теорема 3.** *Представленный выше алгоритм  $A_{2/3-\epsilon}$  находит в полном взвешенном графе  $G = G(V, E, w_1, w_2)$  два реберно непересекающихся цикловых покрытия  $J_1, J_2$ , для веса которых выполняется неравенство  $w_1(J_1) + w_2(J_2) \geq \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$ . Время работы алгоритма  $A_{2/3-\epsilon}$  оценивается как  $O(n^3)$ , где  $n$  — число вершин графа  $G$ .*

Доказательство этой теоремы приводится в разделе 6.2.

### 6.1. Преобразование смешанных туров в реберно непересекающиеся цикловые покрытия.

Описанная в этом разделе процедура получает на вход два реберно непересекающихся смешанных тура  $K_1$  и  $K_2$  (в частности, любой из этих туров может быть цикловым покрытием в  $G$ ) и преобразует тур  $K_1$  в цикловое покрытие  $Z_1$ , не имеющее общих ребер с  $K_2$  и такое, что  $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$ . Процедура корректно работает при условии  $n \geq 10$ .

Далее нам понадобится следующая

**Лемма 3.** *Пусть  $T$  — смешанный тур во взвешенном графе  $G = (V, E, w)$ . Если тур  $T$  содержит  $t \geq 6$  ребер, то в  $T$  найдутся также два несмежных ребра  $e$  и  $e'$ , что  $w(e) + w(e') \leq 2w(T)/t$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательный граф  $L$ , вершинами которого являются все ребра тура  $T$ , при этом в графе  $L$  две вершины смежны, если соответствующие им ребра тура  $T$  несмежны в  $G$  (иными словами  $L$  — это дополнение реберного графа  $L(T)$  тура  $T$ ). Так как каждое ребро тура  $T$  смежно не более чем с двумя другими ребрами из  $T$ , то степень каждой вершины графа  $L$  не меньше  $(t-1) - 2 = t-3$ . Поскольку  $t-3 \geq t/2$  при  $t \geq 6$ , по теореме Дирака (см. разд. 10 в [7]) граф  $L$  содержит гамильтонов цикл  $H = (e_1, e_2, \dots, e_t, e_1)$ . Рассмотрим в туре  $T$  пары несмежных ребер  $(e_1, e_2), (e_2, e_3), \dots, (e_{t-1}, e_t), (e_t, e_1)$ . Поскольку суммарный вес ребер во всех этих парах равен  $2(w(e_1) + w(e_2) + \dots + w(e_t)) = 2w(T)$ , то выбирая в качестве  $(e, e')$  ту из указанных пар ребер, которая имеет наименьший вес, получаем искомую оценку  $w(e) + w(e') \leq 2w(T)/t$ . Лемма 3 доказана.

Для каждой вершины  $x \in V$  обозначим через  $K_i(x)$  множество всех ребер тура  $K_i$ , инцидентных вершине  $x$ . Ясно, что  $|K_i(x)| \leq 2$ . Будем полагать  $K_i(x) = \emptyset$ , если в графе  $G$  отсутствует вершина  $x$ .

Приступим к описанию процедуры. Если смешанный тур  $K_1$  состоит только из циклов, то он является искомым цикловым покрытием  $Z_1$ . Предположим, что  $K_1$  содержит хотя бы одну цепь. Рассмотрим следующие случаи.

*Случай 1.* Тур  $K_1$  содержит ровно одну цепь  $P = u_1, u_2, \dots, u_k$  (здесь и далее в обозначениях для цепи указывается только последовательность ее вершин). Тогда

$|K_1| = n - 1$ . Если  $k \geq 3$  и ребро  $u_1u_k$  не принадлежит туру  $K_2$ , то, добавляя это ребро к туру  $K_1$ , получим искомое цикловое покрытие  $Z_1$ .

Пусть  $k \geq 3$  и  $u_1u_k \in K_2$ . Существует не более одной такой вершины  $x \in V$ , что оба ребра  $xu_1$  и  $xu_k$  принадлежат туру  $K_2$  (в этом случае в  $K_2$  имеется цикл  $(x, u_1, u_k, x)$  длины 3). Положим  $R = K_1(x) \cup \{u_1u_2, u_2u_3, u_{k-2}u_{k-1}, u_{k-1}u_k\}$  — это подмножество ребер тура  $K_1$  мощности не более 6. Тогда  $|K_1 \setminus R| \geq n - 7$ . Выберем во множестве  $K_1 \setminus R$  ребро  $e = yz$  наименьшего веса. Тогда  $w_1(e) \leq w_1(K_1)/(n - 7)$ . Удалим ребро  $e$  из тура  $K_1$ . Тогда полученный тур  $K_1 - e$  содержит ровно две цепи, концевыми вершинами которых являются  $u_1, u_k, y, z$  в каком-то порядке. Из условий  $e \notin R$  и  $u_1u_k \in K_2$  следует, что все вершины  $u_1, u_k, y, z$  попарно различны, тур  $K_1$  не содержит ни одного из ребер  $yu_1, yu_k, zu_1, zu_k$  и хотя бы одна пара ребер  $yu_1, zu_k$  или  $yu_k, zu_1$  не содержит ребра из  $K_2$ . Добавляя эту пару ребер к туру  $K_1 - e$ , получаем искомое цикловое покрытие  $Z_1$  веса  $w_1(Z_1) \geq w_1(K_1) - w_1(e) \geq \left(1 - \frac{1}{n-7}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$ .

Пусть  $k = 2$ . Определим множество ребер  $R$ , состоящее из ребра  $u_1u_2$  и все таких ребер  $uv \in K_1$ , что в туре  $K_2$  имеется хотя бы два ребра, соединяющих вершины из  $\{u, v\}$  с вершинами из  $\{u_1, u_2\}$ . Так как в турах  $K_1$  и  $K_2$  каждая вершина имеет степень не больше 2, то  $|R| \leq 5$ . Тогда  $|K_1 \setminus R| \geq n - 6$ . Выберем во множестве  $K_1 \setminus R$  ребро  $e = yz$  наименьшего веса  $w_1(e) \leq w_1(K_1)/(n - 6)$ . Удалим ребро  $e$  из тура  $K_1$ . Полученный тур  $K_1 - e$  содержит ровно две цепи, одной из которых является  $P = u_1u_2$ , а вторая цепь получается из какого-то цикла тура  $K_1$  удалением ребра  $e = yz$ . Из условия  $e \notin R$  следует, что тур  $K_1$  не содержит ни одного из ребер  $yu_1, yu_2, zu_1, zu_2$  и хотя бы одна пара ребер  $yu_1, zu_2$  или  $yu_2, zu_1$  не включает ребер из  $K_2$ . Добавляя эту пару ребер к туру  $K_1 - e$ , получаем искомое цикловое покрытие  $Z_1$  веса  $w_1(Z_1) \geq w_1(K_1) - w_1(e) \geq \left(1 - \frac{1}{n-6}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$ .

Пусть  $k = 1$ , то есть цепь  $P = u_1$  является синглом в  $K_1$ . Существует не более двух вершин  $x_1, x_2 \in V$ , смежных в туре  $K_2$  с вершиной  $v_1$ . Положим  $R = K_1(x_2) \cup K_1(x_2)$  — это подмножество ребер тура  $K_1$  мощности не более 4. Тогда  $|K_1 \setminus R| \geq n - 5$ . Выберем во множестве  $K_1 \setminus R$  ребро  $e = yz$  наименьшего веса  $w_1(e) \leq w_1(K_1)/(n - 5)$ . Тогда тур  $K_1 - e$  содержит ровно две цепи, одной из которых является  $P = u_1$ , а вторая цепь получается из какого-то цикла в  $K_1$  удалением ребра  $e = yz$ . Из условия  $e \notin R$  следует, что никакое из ребер  $yu_1, zu_1$  не принадлежит ни одному из туров  $K_1, K_2$ . Добавляя ребра  $yu_1$  и  $zu_1$  к туру  $K_1 - e$ , получаем искомое цикловое покрытие  $Z_1$  веса  $w_1(Z_1) \geq w_1(K_1) - w_1(e) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$ .

*Случай 2.*  $p(K_1) = 2$ , то есть тур  $K_1$  содержит две цепи  $P_1 = u_1, u_2, \dots, u_k$  и  $P_2 = v_1, v_2, \dots, v_l$ . Тогда  $|K_1| = n - 2$ . Если хотя бы одно из ребер  $u_1v_1, u_1v_l, u_kv_1, u_kv_l$  не принадлежит туру  $K_2$ , то добавим это ребро к туру  $K_1$ . В результате получим смешанный тур веса не меньше  $w_1(K_1)$ , содержащий ровно одну цепь. Преобразуем этот тур в цикловое покрытие  $Z_1$ , как описано в Случае 1. Далее будем считать, что все ребра  $u_1v_1, u_1v_l, u_kv_1, u_kv_l$  принадлежат туру  $K_2$ . Если  $k \geq 3$  и ребро  $u_1u_k$  не принадлежит  $K_2$ , то добавляя это ребро к туру  $K_1$  и переходя к Случаю 1, получим искомое цикловое покрытие  $Z_1$ . Аналогично рассматривается случай, когда  $l \geq 3$  и  $v_1v_l \notin K_2$ . Поскольку в туре  $K_2$  каждая из вершин  $u_1, u_k, v_1, v_l$  имеет степень не больше 2, то остается рассмотреть только следующие два подслучая.

*Случай 2.1.* Одна из цепей  $P_1$  или  $P_2$  является синглом в  $K_1$ . Можно считать, что  $P_2 = v_1$ . В этом случае  $u_1v_1 \in K_2, u_kv_1 \in K_2$  и если  $k \geq 3$ , то  $u_1u_k \in K_2$ . При  $k \geq 2$  полагаем  $R = \{u_1u_2, u_{k-1}u_k\}$ , а при  $k = 1$  выберем такую вершину  $x \in V \setminus \{u_1, v_1\}$ , что  $xu_1 \in K_2$  и  $xv_1 \in K_2$ , и положим  $R = K_1(x)$  (если такая вершина  $x$  существует, то она единственна). В обоих случаях имеем  $|R| \leq 2$  и  $|K_1 \setminus R| \geq n - 4 \geq 6$ .

По лемме 3 смешанный тур  $K_1 \setminus R$  содержит такие два несмежных ребра  $e_1 = y_1 z_1$  и  $e_2 = y_2 z_2$ , что  $w_1(e_1) + w_1(e_2) \leq \frac{2}{n-4} w_1(K_1 \setminus R) \leq \frac{2}{n-4} w_1(K_1)$ . Удалим из  $K_1$  ребра  $e_1$  и  $e_2$ . Так как они несмежны между собой, то все вершины  $y_1, y_2, z_1, z_2$  попарно различны. При этом из определения множества  $R$  и условия  $e_1, e_2 \notin R$  следует, что  $\{y_1, y_2, z_1, z_2\} \cap \{u_1, u_k, v_1\} = \emptyset$ . Если  $k \geq 2$ , то в туре  $K_2$  вершина  $v_1$  несмежна с вершинами из множества  $\{y_1, y_2, z_1, z_2\}$ , а каждая из вершин  $u_1, u_k$  смежна не более чем с одной вершиной из этого множества (поскольку  $u_1 v_1 \in K_2$  и  $u_k v_1 \in K_2$ ). Без потери общности будем считать, что в туре  $K_2$  вершины  $u_1$  и  $u_k$  несмежны с вершинами  $y_1$  и  $y_2$  соответственно. Добавляя к туру  $K_1 \setminus \{e_1, e_2\}$  ребра  $u_1 y_1, u_k y_2, v_1 z_1, v_1 z_2$ , получаем искомое цикловое покрытие  $Z_1$  веса  $w_1(Z_1) \geq w_1(K_1) - (w_1(e_1) + w_1(e_2)) \geq \left(1 - \frac{2}{n-4}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$ . Пусть  $k = 1$ . Тогда  $u_1 v_1 \in K_2$  и в туре  $K_2$  каждая из вершин  $u_1, v_1$  смежна не более чем с одной вершиной из множества  $\{y_1, y_2, z_1, z_2\}$ . Так как  $e_1, e_2 \notin R$ , то ни одна из вершин  $y_1, y_2, z_1, z_2$  не может быть смежна в  $K_2$  одновременно с обеими вершинами  $u_1$  и  $v_1$ . Поэтому можно считать, что в туре  $K_2$  вершина  $u_1$  смежна только с  $v_1$  и  $y_1$ , а  $v_1$  смежна только с  $u_1$  и  $y_2$ . Добавляя к туру  $K_1 \setminus \{e_1, e_2\}$  ребра  $u_1 y_2, u_1 z_2, v_1 y_1, v_1 z_1$ , получаем искомое цикловое покрытие  $Z_1$  веса  $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{2}{n-4}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$ .

*Случай 2.2.*  $k = l = 2$ , то есть  $P_1 = u_1 u_2, P_2 = v_1 v_2$ . При этом ребра  $u_1 v_1, u_1 v_2, u_2 v_1, u_2 v_2$  принадлежат туру  $K_2$ . Это означает, что в туре  $K_2$  имеется цикл  $(u_1, v_1, u_2, v_2, u_1)$  длины 4. По лемме 3 смешанный тур  $K_1 \setminus \{u_1 v_1, u_2 v_2\}$  содержит такие два несмежных ребра  $e_1 = y_1 z_1$  и  $e_2 = y_2 z_2$ , что  $w_1(e_1) + w_1(e_2) \leq \frac{2}{n-4} w_1(K_1 \setminus \{u_1 v_1, u_2 v_2\}) \leq \frac{2}{n-4} w_1(K_1)$ . Удалим из тура  $K_1$  ребра  $e_1$  и  $e_2$ . Так как ни одно из этих ребер не принадлежит множеству  $\{u_1 v_1, u_2 v_2\}$ , то  $\{y_1, y_2, z_1, z_2\} \cap \{u_1, u_2, v_1, v_2\} = \emptyset$ . Из наличия в туре  $K_2$  цикла  $(u_1, v_1, u_2, v_2, u_1)$  следует, что ни одна из вершин  $u_1, u_2, v_1, v_2$  не смежна в  $K_2$  с вершинами из множества  $\{y_1, y_2, z_1, z_2\}$ . Добавляя к туру  $K_1 \setminus \{e_1, e_2\}$  ребра  $u_1 y_1, u_2 z_1, v_1 y_2, v_2 z_2$ , получим искомое цикловое покрытие  $Z_1$  веса  $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{2}{n-4}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$ .

*Случай 3.*  $p(K_1) = 3$ , то есть тур  $K_1$  содержит три цепи  $P_1 = u_1, u_2, \dots, u_k, P_2 = v_1, v_2, \dots, v_l$  и  $P_3 = w_1, w_2, \dots, w_m$ . Тогда  $|K_1| = n - 3$ . Если хотя бы одно из чисел  $k, l, m$  не равно 1, скажем,  $m > 1$ , то какое-то из ребер  $u_1 v_1, u_1 w_1, u_1 w_m$  не принадлежит туру  $K_2$ . Добавляя это ребро к туру  $K_1$ , получаем смешанный тур, содержащий ровно две цепи, после чего переходим к Случаю 2.

Пусть  $k = l = m = 1$ . Тогда все три цепи тура  $K_1$  являются синглами, а в туре  $K_2$  имеется цикл  $(u_1, v_1, w_1, u_1)$  длины 3 (иначе снова можно перейти к Случаю 2). Удалим из тура  $K_1$  три ребра  $e_1 = y_1 z_1, e_2 = y_2 z_2$  и  $e_3 = y_3 z_3$  наименьшего веса (сейчас мы допускаем, что среди этих ребер могут быть смежные, то есть среди вершин  $y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3$  могут быть повторяющиеся). Тогда  $w_1(e_1) + w_1(e_2) + w_1(e_3) \leq \frac{3}{n-3} w_1(K_1)$ . Добавляя к туру  $K_1 \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$  ребра  $u_1 y_1, u_1 z_1, v_1 y_2, v_1 z_2, w_1 y_3, w_1 z_3$ , получим искомое цикловое покрытие  $Z_1$  веса  $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(K_1)$ .

*Случай 4.*  $p(K_1) \geq 4$ , то есть тур  $K_1$  содержит не менее четырех цепей. В этом случае среди ребер графа  $G$ , соединяющих концы различных цепей тура  $K_1$ , найдется ребро, не принадлежащее туру  $K_2$ . Добавим это ребро к туру  $K_1$ . Будем действовать так до тех пор, пока в  $K_1$  не останется ровно три цепи. После этого перейдем к Случаю 3.

Нетрудно убедиться, что время работы описанной процедуры преобразования смешанного тура  $K_1$  в цикловое покрытие  $Z_1$  не превосходит  $O(n^2)$ .

### 6.2. Доказательство теоремы 3.

Трудоёмкость алгоритма  $A_{2/3-\varepsilon}$  определяется временем отыскания цикловых покрытий  $C_1, C_2, F_1, F_2$  на Этапах 1.1 и 1.2, которое оценивается как  $O(n^3)$ .

Докажем оценку точности  $\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}$ . Рассмотрим в графе  $G$  пару реберно непересекающихся цикловых покрытий  $C_1^*, C_2^*$ , составляющих оптимальное решение задачи 2-СС- $\max$ -2W. Согласно ранее введенным обозначениям имеем  $c_1^* = w_1(C_1^*)$ ,  $c_2^* = w_2(C_2^*)$  и  $c^* = c_1^* + c_2^*$  — это оптимум задачи 2-СС- $\max$ -2W. Тогда для найденных алгоритмом на Этапах 1.1 и 1.2 цикловых покрытий  $C_1$  и  $C_2$  справедливы оценки  $w_i(C_i) \geq c_i^*$ ,  $i = 1, 2$ .

Определим следующие множества ребер (смешанные туры) в  $G$ :  $X_1 = C_1^* \setminus C_2$ ;  $Y_1 = C_1^* \cap C_2$ ;  $X_2 = C_2^* \setminus C_1$ ;  $Y_2 = C_2^* \cap C_1$ . Тогда для каждого  $i = 1, 2$  множества  $X_i$  и  $Y_i$  образуют разбиение множества ребер циклового покрытия  $C_i^*$ , что влечет равенства  $w_i(X_i) + w_i(Y_i) = c_i^*$ ,  $i = 1, 2$ .

Заметим, что множество ребер  $X_1$  представляет из себя смешанный тур в графе  $G \setminus C_2$ , а построенное на Этапе 1.2 алгоритма цикловое покрытие  $F_1$  также содержится в этом графе и имеет в нем наибольший вес  $w_1(F_1)$ . Так как смешанный тур  $X_1$  с помощью процедуры, описанной в разделе 6.1, можно преобразовать в цикловое покрытие  $F_1'$ , реберно непересекающееся с  $C_2$  (то есть содержащееся в графе  $G \setminus C_2$ ) и имеющее вес  $w_1(F_1') \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(X_1)$ , то для веса максимального циклового покрытия  $F_1$  в  $G \setminus C_2$  выполняется оценка  $w_1(F_1) \geq w_1(F_1') \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_1(X_1)$ .

Аналогично доказывается, что  $w_2(F_2) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) w_2(X_2)$ .

Из определения смешанных туров  $Y_1$  и  $Y_2$  следует, что они не имеют общих ребер, так как первый из них содержится в цикловом покрытии  $C_1^*$ , а второй — в  $C_2^*$ , где  $C_1^* \cap C_2^* = \emptyset$ . Кроме того, тур  $Y_1$  содержится в цикловом покрытии  $C_2$ , а тур  $Y_2$  — в  $C_1$ . На Этапе 2 алгоритма было установлено, что определенная на этом этапе пара смешанных туров  $K_1, K_2$  имеет наибольший вес  $w_1(K_1) + w_2(K_2)$  среди всех таких пар реберно непересекающихся смешанных туров, что первый из них содержится в  $C_2$ , а второй — в  $C_1$ . Отсюда следует, что  $w_1(K_1) + w_2(K_2) \geq w_1(Y_1) + w_2(Y_2)$ . Поэтому для построенных на Этапе 3 цикловых покрытий  $Z_1$  и  $Z_2$  справедлива оценка  $w_1(Z_1) + w_2(Z_2) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) (w_1(K_1) + w_2(K_2)) \geq \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) (w_1(Y_1) + w_2(Y_2))$ .

Предположим, что заявленная оценка точности алгоритма  $A_{2/3-\varepsilon}$  неверна. Тогда для построенных на Этапе 4 цикловых покрытий  $J_1$  и  $J_2$  справедливо неравенство  $w_1(J_1) + w_2(J_2) < \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$ . Из определения покрытий  $J_1$  и  $J_2$ , следует, что  $w_1(C_1) + w_2(F_2) < \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$ ,  $w_1(F_1) + w_2(C_2) < \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$  и  $w_1(Z_1) + w_2(Z_2) < \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$ . Складывая последние три неравенства и используя ранее полученные соотношения, приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{3}{n-3}\right) c^* &> (w_1(C_1) + w_2(C_2)) + (w_1(F_1) + w_2(F_2)) + (w_1(Z_1) + w_2(Z_2)) \geq \\ &(c_1^* + c_2^*) + \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) (w_1(X_1) + w_2(X_2)) + \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) (w_1(Y_1) + w_2(Y_2)) = \\ &c^* + \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) (w_1(X_1) + w_1(Y_1)) + w_2(X_2) + w_2(Y_2) = \\ &c^* + \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) (c_1^* + c_2^*) = c^* + \left(1 - \frac{3}{n-3}\right) c^* = \left(2 - \frac{3}{n-3}\right) c^*. \end{aligned}$$

Из полученного противоречия следует, что  $w_1(J_1) + w_2(J_2) \geq \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}\right) c^*$ , то есть заявленная оценка точности  $\frac{2}{3} - \frac{1}{n-3}$  верна. Теорема 3 доказана.

## 7. АЛГОРИТМ $A_{>1/2}$ ДЛЯ ЗАДАЧИ 2-PSP- $\max$ -2W

В этом разделе, как и в разделе 3, через  $H_1^*, H_2^*$  обозначается пара реберно непересекающихся гамильтоновых циклов, составляющих оптимальное решение задачи

2-PSP-max-2W. Положим  $w_i^* = w_i(H_i^*)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $w^* = w_1^* + w_2^*$ . Для каждого гамильтонова цикла  $C$  в  $G$  обозначим через  $w_i^C$  весовую функцию ребер, которая совпадает с  $w_i$  на всех ребрах не из цикла  $C$  и равна нулю на всех ребрах из  $C$ . Назовем *про-туром* любой частичный тур или гамильтонов цикл в  $G$ .

В представленном ниже алгоритме  $A_{>1/2}$  в качестве вспомогательной процедуры может использоваться любой известный полиномиальный алгоритм  $A'$  для задачи одного коммивояжера на максимум, обладающий гарантированной оценкой точности  $L > 2/3$ . Примером такого алгоритма может служить разработанный Сердюковым [18] алгоритм с оценкой точности  $3/4$ , а наилучшей на сегодня оценкой  $4/5$  обладает алгоритм из [8]. Трудоемкость этих и многих других приближенных алгоритмов для задачи TSP-max оценивается как  $O(n^3)$ . При этом важно отметить, что большинство этих алгоритмов корректно работает лишь при условии, что входной граф  $G$  является полным. Это не позволяет применить подход, ранее использованный в алгоритме  $A_{2/3-\varepsilon}$ , при котором цикловое покрытие максимального веса находилось в графе, из которого были удалены ребра другого циклового покрытия. Вместо этого в предложенном здесь алгоритме  $A_{>1/2}$  обнуляются веса ребер, принадлежащих некоторому гамильтонову циклу, однако сами эти ребра не удаляются из графа. Оценка точности алгоритма  $A_{>1/2}$  является асимптотической, со значениями в пределах от  $1/2$  до  $4/7$ , и зависит от оценки  $L$  алгоритма  $A'$  для задачи TSP-max (точное значение оценки точности приводится ниже в теореме 4).

Приступим к описанию алгоритма  $A_{>1/2}$ . Если  $n \leq 5$ , то с помощью полного перебора находим в графе  $G$  два реберно непересекающихся гамильтонова цикла  $H_1^*, H_2^*$ , составляющие оптимальное решение задачи 2-PSP-max-2W. Предположим, что  $n \geq 6$ .

*Этап 1.1.* Применяя  $L$ -приближенный алгоритм  $A'$  для задачи TSP-max к графу  $G$  с весовой функцией  $w_1$ , находим в  $G$  гамильтонов цикл  $C_1$ , имеющий вес  $w_1(C_1) \geq Lw_1^*$ . Далее применяя тот же алгоритм к графу  $G$  с весовой функцией  $w_2^{C_1}$ , находим гамильтонов цикл  $F_2'$ . Если циклы  $C_1$  и  $F_2'$  не имеют общих ребер, то полагаем  $F_2 = F_2'$  и переходим на Этап 2. Иначе удаляем из  $F_2'$  все ребра цикла  $C_1$  и получаем частичный тур  $T_2 = F_2' \setminus C_1$ , реберно непересекающийся с  $C_1$  и имеющий вес  $w_2(T_2) = w_2^{C_1}(F_2')$ . Применяя к туру  $T_2$  процедуру из раздела 7.1, преобразуем  $T_2$  в гамильтонов цикл  $F_2$ , не содержащий ребер из  $C_1$  и имеющий вес  $w_2(F_2) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_2(T_2) = \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_2^{C_1}(F_2')$ .

*Этап 1.2.* Применяя алгоритм  $A'$  к графу  $G$  с весовой функцией  $w_2$ , находим в  $G$  гамильтонов цикл  $C_2$  веса  $w_2(C_2) \geq Lw_2^*$ . Далее применяя тот же алгоритм к графу  $G$  с весовой функцией  $w_1^{C_2}$ , находим гамильтонов цикл  $F_1'$ . Если циклы  $C_2$  и  $F_1'$  не имеют общих ребер, то полагаем  $F_1 = F_1'$  и переходим на Этап 2. Иначе формируем частичный тур  $T_1 = F_1' \setminus C_2$ , реберно непересекающийся с  $C_2$  и имеющий вес  $w_1(T_1) = w_1^{C_2}(F_1')$ . С помощью процедуры из раздела 7.1 преобразуем тур  $T_1$  в гамильтонов цикл  $F_1$ , не содержащий ребер из  $C_2$  и имеющий вес  $w_1(F_1) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(T_1) = \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1^{C_2}(F_1')$ .

*Этап 2.* Формируем про-тур  $K_1$ , состоящий из всех ребер гамильтонова цикла  $C_2$ , не принадлежащих циклу  $C_1$ , и из всех таких ребер  $e \in C_1 \cap C_2$ , что  $w_1(e) \geq w_2(e)$ . Аналогично формируем про-тур  $K_2$ , состоящий из всех ребер цикла  $C_1$ , не принадлежащих  $C_2$  и из всех таких ребер  $e \in C_1 \cap C_2$ , что  $w_2(e) > w_1(e)$ . Тогда про-туры  $K_1$  и  $K_2$  не имеют общих ребер, при этом  $K_1 \subseteq C_2$ ,  $K_2 \subseteq C_1$  и  $K_1 \cup K_2 = C_1 \cup C_2$ . Ясно, что пара про-туров  $K_1, K_2$  обладает наибольшим весом  $w_1(K_1) + w_2(K_2)$  среди всех таких пар реберно непересекающихся про-туров, что первый из них содержится в  $C_2$ , а второй — в  $C_1$ .

*Этап 3.* С помощью процедуры из раздела 7.1 преобразуем про-тур  $K_1$  в гамильтонов цикл  $Z_1$ , не содержащий ребер из  $K_2$  и имеющий вес  $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(K_1)$ . Далее с помощью той же процедуры преобразуем про-тур  $K_2$  в гамильтонов цикл  $Z_2$ , не содержащий ребер из уже построенного цикла  $Z_1$  и имеющий вес  $w_2(Z_2) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_2(K_2)$ .

*Этап 4.* Обозначим через  $(H_1, H_2)$  ту из пар реберно непересекающихся гамильтоновых циклов  $(C_1, F_2)$ ,  $(F_1, C_2)$ ,  $(Z_1, Z_2)$ , которая имеет наибольший вес  $w_1(H_1) + w_2(H_2)$ . Предъявляем пару циклов  $(H_1, H_2)$  в качестве искомого приближенного решения задачи 2-PSP-max-2W.

Основным результатом данного раздела является следующая

**Теорема 4.** *Представленный выше алгоритм  $A_{>1/2}$  находит в полном взвешенном графе  $G = G(V, E, w_1, w_2)$  два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла  $H_1, H_2$ , для которых выполняется неравенство  $w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq \frac{2L}{2+L} \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w^*$ , где  $L$  — оценка точности алгоритма  $A'$ , применяемого на Этапах 1.1. и 1.2. Время работы алгоритма  $A_{>1/2}$  оценивается как  $O(n^3)$ , где  $n$  — число вершин графа  $G$ .*

Доказательство этой теоремы приводится в разделе 7.2.

### 7.1. Преобразование про-туров в реберно непересекающиеся гамильтоновы циклы.

Описанная в этом разделе процедура получает на вход два реберно непересекающихся про-тура  $K_1$  и  $K_2$  (любой из них может быть гамильтоновым циклом) и преобразует про-тур  $K_1$  в гамильтонов цикл  $Z_1$ , не имеющий общих ребер с  $K_2$  и такой, что  $w_1(Z_1) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(K_1)$ . Процедура корректно работает при условии  $n \geq 6$ .

Если про-тур  $K_1$  является гамильтоновым циклом, то полагаем  $Z_1 = K_1$  и завершаем работу. Пусть  $K_1$  является частичным туром в  $G$ . Рассмотрим следующие случаи.

*Случай 1.* Тур  $K_1$  состоит из единственной (гамильтоновой) цепи  $P = u_1, u_2, \dots, u_n$ . Тогда  $|K_1| = n - 1$ . Если ребро  $u_1 u_n$  не принадлежит про-туру  $K_2$ , то, добавляя это ребро к  $K_1$ , получаем искомым гамильтонов цикл  $Z_1$ .

Пусть  $u_1 u_n \in K_2$ . Тогда существует не более одной такой вершины  $u_i \in V \setminus \{u_1, u_n\}$ , что ребро  $u_1 u_i$  принадлежит про-туру  $K_2$ , и существует не более одной такой вершины  $u_j \in V \setminus \{u_1, u_n\}$ , что  $u_n u_j \in K_2$ . Положим  $R = \{u_1 u_2, u_{n-1} u_n, u_{i-1} u_i, u_j u_{j+1}\}$  — это подмножество ребер тура  $K_1$  мощности не более 4. Тогда  $|K_1 \setminus R| \geq n - 5$ . Выберем во множестве  $K_1 \setminus R$  ребро  $e = u_{k-1} u_k$  наименьшего веса  $w_1(e) \leq w_1(K_1)/(n - 5)$ . Удалим ребро  $e$  из тура  $K_1$ . Полученный частичный тур  $K_1 - e$  состоит ровно из двух цепей:  $P_1 = u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$  и  $P_2 = u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ . Из условия  $e \notin R$  следует, что все четыре вершины  $u_1, u_{k-1}, u_k, u_n$  попарно различны и ни одно из ребер  $u_1 u_k, u_{k-1} u_n$  не принадлежит ни одному из про-туров  $K_1, K_2$ . Добавляя эти два ребра к туру  $K_1 - e$ , получаем искомым гамильтонов цикл  $Z_1$  веса  $w_1(Z_1) \geq w_1(K_1) - w_1(e) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(K_1)$ .

*Случай 2.* Тур  $K_1$  состоит из двух цепей:  $P_1 = u_1, u_2, \dots, u_k$  и  $P_2 = v_1, v_2, \dots, v_l$ . Тогда  $|K_1| = n - 2$ . Если обе цепи  $P_1$  и  $P_2$  являются нетривиальными, то есть  $k \geq 2, l \geq 2$ , то все вершины  $u_1, u_k, v_1, v_l$  попарно различны. Поскольку про-тур  $K_2$  не может содержать цикл  $(u_1, v_1, u_k, v_l, u_1)$  длины 4, то хотя бы одно из ребер  $u_1 v_1, u_1 v_l, u_k v_1, u_k v_l$  не принадлежит  $K_2$ . Добавляя это ребро к туру  $K_1$ , получаем частичный тур, состоящий ровно из одной цепи, и переходим к Случаю 1.

Пусть какая-то из цепей  $P_1$  или  $P_2$ , скажем  $P_2$ , является синглом в  $K_1$ . Тогда  $k = n - 1, l = 1$ . Если хотя бы одно ребро  $u_1 v_1$  или  $u_{n-1} v_1$  не принадлежит  $K_2$ , то добавим это ребро к туру  $K_1$  и снова перейдем к Случаю 1. Пусть  $u_1 v_1, u_{n-1} v_1 \in K_2$ .



Так как про-тур  $K_2$  не может содержать цикл  $(u_1, v_1, u_{n-1}, u_1)$ , то  $u_1 u_{n-1} \notin K_2$ . Также вершина  $v_1$  несмежна в  $K_2$  ни с одной вершиной  $u_2, u_3, \dots, u_{n-2}$ . Выберем во множестве  $K_1 \setminus \{u_1 u_2, u_{n-2} u_{n-1}\}$  ребро  $e = u_{i-1} u_i$  наименьшего веса  $w_1(e)$ . Так как  $|K_1 \setminus \{u_1 u_2, u_{n-2} u_{n-1}\}| = n - 4$ , то  $w_1(e) \leq w_1(K_1)/(n - 4)$ . Частичный тур  $K_1 - e$  состоит из трех цепей:  $P'_1 = u_1, u_2, \dots, u_{i-1}$ ,  $P''_1 = u_i, u_{i+1}, \dots, u_{n-1}$  и  $P_2 = v_1$ . При этом ни одно из ребер  $u_1 u_{n-1}, u_{i-1} v_1, u_i v_1$  не принадлежит ни одному из про-туров  $K_1, K_2$ . Добавляя эти три ребра к туру  $K_1 - e$ , получаем искомый гамильтонов цикл  $Z_1$  веса  $w_1(Z_1) \geq w_1(K_1) - w_1(e) \geq \left(1 - \frac{1}{n-4}\right) w_1(K_1) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(K_1)$ .

*Случай 3.* Тур  $K_1$  содержит не менее трех цепей. Так как в про-туре  $K_2$  степень каждой вершины не превосходит 2, то среди ребер графа  $G$ , соединяющих концы различных цепей тура  $K_1$ , найдется ребро, не принадлежащее  $K_2$ . Добавим это ребро к туру  $K_1$ . Будем действовать так до тех пор, пока в  $K_1$  не останется ровно две цепи. После этого перейдем к Случаю 2.

Нетрудно убедиться, что время работы описанной процедуры преобразования про-тура  $K_1$  в гамильтонов цикл  $Z_1$  не превосходит  $O(n^2)$ .

### 7.2. Доказательство теоремы 4.

Трудоёмкость алгоритма  $A_{>1/2}$  определяется временем работы  $L$ -приближенного алгоритма  $A'$  для задачи TSP-мах на Этапах 1.1 и 1.2. Для большинства известных алгоритмов это время оценивается как  $O(n^3)$ .

Докажем оценку точности  $\frac{2L}{2+L} \left(1 - \frac{1}{n-5}\right)$ . Рассмотрим в графе  $G$  пару реберно непересекающихся гамильтоновых циклов  $H_1^*, H_2^*$ , составляющих оптимальное решение задачи 2-PSP-мах-2W. Тогда  $w_1^* = w_1(H_1^*)$ ,  $w_2^* = w_2(H_2^*)$  и  $w^* = w_1^* + w_2^*$  — это оптимум задачи 2-PSP-мах-2W. Как было отмечено выше, для найденных алгоритмом  $A'$  на Этапах 1.1 и 1.2 гамильтоновых циклов  $C_1$  и  $C_2$  выполняются оценки  $w_i(C_i) \geq L w_i^* \geq L \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_i^*$ ,  $i = 1, 2$ .

Определим следующие множества ребер (про-туры) в  $G$ :  $X_1 = H_1^* \setminus C_2$ ;  $Y_1 = H_1^* \cap C_2$ ;  $X_2 = H_2^* \setminus C_1$ ;  $Y_2 = H_2^* \cap C_1$ . Для каждого  $i = 1, 2$  множества  $X_i$  и  $Y_i$  образуют разбиение множества ребер гамильтонова цикла  $H_i^*$ , а значит,  $w_i(X_i) + w_i(Y_i) = w_i^*$ ,  $i = 1, 2$ . Рассмотрим в графе  $G$  какой-нибудь гамильтонов цикл  $F'_1$ , содержащий все ребра про-тура  $X_1$ . Так как про-тур  $X_1$  не содержит ребер гамильтонова цикла  $C_2$ , то  $w_1^{C_2}(F'_1) \geq w_1(X_1)$ . Найденный на Этапе 1.2 гамильтонов цикл  $F'_1$  получен  $L$ -приближенным алгоритмом  $A'$  с весовой функцией  $w_1^{C_2}$ , поэтому  $w_1^{C_2}(F'_1) \geq L w_1^{C_2}(F'_1) \geq L w_1(X_1)$ . Следовательно, для построенного к концу Этапа 1.2 гамильтонова цикла  $F_1$  выполняется оценка  $w_1(F_1) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1^{C_2}(F'_1) \geq L \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_1(X_1)$ . Аналогично доказывается, что  $w_2(F_2) \geq L \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w_2(X_2)$ . Отсюда и из доказанных выше неравенств для  $C_1$  и  $C_2$  следует, что  $w_1(C_1) + w_2(F_2) \geq L \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) (w_1^* + w_2(X_2))$  и  $w_1(F_1) + w_2(C_2) \geq L \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) (w_2^* + w_1(X_1))$ .

Из определения про-туров  $Y_1$  и  $Y_2$  следует, что они не имеют общих ребер, так как первый из них содержится в гамильтоновом цикле  $H_1^*$ , а второй — в  $H_2^*$ , где  $H_1^* \cap H_2^* = \emptyset$ . Кроме того, про-тур  $Y_1$  содержится в гамильтоновом цикле  $C_2$ , а про-тур  $Y_2$  — в  $C_1$ . На Этапе 2 алгоритма было установлено, что определенная на этом этапе пара про-туров  $K_1, K_2$  имеет наибольший вес  $w_1(K_1) + w_2(K_2)$  среди всех таких пар реберно непересекающихся про-туров, что первый из них содержится в  $C_2$ , а второй — в  $C_1$ . Отсюда следует, что  $w_1(K_1) + w_2(K_2) \geq w_1(Y_1) + w_2(Y_2)$ . Поэтому для построенных на Этапе 3 гамильтоновых циклов  $Z_1$  и  $Z_2$  справедлива оценка  $w_1(Z_1) + w_2(Z_2) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) (w_1(K_1) + w_2(K_2)) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) (w_1(Y_1) + w_2(Y_2))$ .

Предположим, что заявленная оценка точности алгоритма  $A_{>1/2}$  неверна. Тогда для построенных на Этапе 4 гамильтоновых циклов  $H_1$  и  $H_2$  выполняется неравенство

$w_1(H_1) + w_2(H_2) < \frac{2L}{2+L} \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w^*$ . Отсюда и из ранее доказанных неравенств следует, что

$$\begin{aligned} \frac{2L}{2+L} \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w^* &> w_1(C_1) + w_2(F_2) \geq L \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) (w_1^* + w_2(X_2)); \\ \frac{2L}{2+L} \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w^* &> w_1(F_1) + w_2(C_2) \geq L \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) (w_2^* + w_1(X_1)); \\ \frac{2L}{2+L} \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w^* &> w_1(Z_1) + w_2(Z_2) \geq \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) (w_1(Y_1) + w_2(Y_2)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$w_1^* + w_2(X_2) < \frac{2}{2+L} w^*; \quad w_2^* + w_1(X_1) < \frac{2}{2+L} w^*; \quad w_1(Y_1) + w_2(Y_2) < \frac{2L}{2+L} w^*.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} 2w^* = w_1^* + w_2^* + w_1^* + w_2^* &= w_1^* + w_2^* + (w_1(X_1) + w_1(Y_1)) + (w_2(X_2) + w_2(Y_2)) = \\ (w_1^* + w_2(X_2)) + (w_2^* + w_1(X_1)) &+ (w_1(Y_1) + w_2(Y_2)) < \left(\frac{2}{2+L} + \frac{2}{2+L} + \frac{2L}{2+L}\right) w^* = 2w^*. \end{aligned}$$

Из полученного противоречия следует, что  $w_1(H_1) + w_2(H_2) \geq \frac{2L}{2+L} \left(1 - \frac{1}{n-5}\right) w^*$ , то есть заявленная оценка точности  $\frac{2L}{2+L} \left(1 - \frac{1}{n-5}\right)$  верна. Теорема 4 доказана.

В заключение заметим, что если на Этапах 1.1 и 1.2 алгоритма  $A_{>1/2}$  в качестве вспомогательного  $L$ -приближенного алгоритма  $A'$  для задачи TSP-мак используется простейший алгоритм с оценкой точности  $L = 2/3$ , то главный член  $\frac{2L}{2+L}$  оценки точности алгоритма  $A_{>1/2}$  принимает значение  $1/2$ , что соответствует оценке алгоритма  $A_{1/2}$ , описанного в разделе 3. Если в качестве алгоритма  $A'$  использовать алгоритм Сердюкова [18] с оценкой  $L = 3/4$ , то получаем  $\frac{2L}{2+L} = \frac{6}{11}$ . Наконец, если в качестве  $A'$  использовать алгоритм из [8] с рекордной на сегодня оценкой точности  $L = 4/5$ , то получаем  $\frac{2L}{2+L} = 4/7$ . Отметим также, что если  $A'$  — это точный алгоритм решения задачи TSP-мак, то есть  $L = 1$ , то  $\frac{2L}{2+L} = 2/3$ , что является принципиальной верхней границей для оценки точности алгоритма  $A_{>1/2}$ .

Авторы благодарны анонимному рецензенту за внимательное изучение статьи и сделанные им ценные замечания!

#### REFERENCES

- [1] A.A. Ageev, A.E. Baburin, E.Kh. Gimadi, *A polynomial algorithm with an accuracy estimate of 3/4 for finding two nonintersecting Hamiltonian cycles of maximum weight*, Discret. Anal. Issled. Oper., Ser. 1, **13**:2 (2006), 11–20. Zbl 1249.05232
- [2] A.A. Ageev, A.V. Pyatkin, *A 2-approximation algorithm for the metric 2-peripatetic salesman problem*, Discret. Anal. Issled. Oper., **16**:4 (2009), 3–20. Zbl 1249.90296
- [3] A.E. Baburin, E.Kh. Gimadi, *On the asymptotic optimality of an algorithm for solving the maximum  $m$ -PSP in a multidimensional Euclidean space*, Proc. Steklov Inst. Math., Suppl. 1, **272**, 2011, 1–13. Zbl 1230.65065
- [4] J.B.J.M. de Kort, *Lower bounds for symmetric  $K$ -PSP*, Optimization, **22**:1 (1991), 113–122. Zbl 0717.90048
- [5] J.B.J.M. De Kort, *Upper bounds for the symmetric 2-PSP*, Optimization, **23**:4 (1992), 357–367. Zbl 0814.05066
- [6] J.B.J.M. De Kort, *A branch and bound algorithm for symmetric 2-PSP*, Eur. J. Oper. Res., **70**:2 (1993), 229–243. Zbl 0799.90114
- [7] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2000. Zbl 0945.05002

- [8] S. Dudycz, J. Marcinkowski, K. Paluch, B.A. Rybicki, *A 4/5-approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem*, in Eisenbrand, Friedrich (ed.) et al., *Integer programming and combinatorial optimization. 19th international conference, IPCO 2017, Waterloo, ON, Canada, June 26–28, 2017. Proceedings*, Lect. Notes Comput. Sci., **10328**, Springer, Cham., 2017, 173–185. Zbl 1418.90222
- [9] H.N. Gabow, *An efficient reduction technique for degree-restricted subgraph and bidirected network flow problems*, Proc. 15th Annu. ACM Symp. Theory of Comput. (Boston, April 25–27, 1983), ACM, New York, 1983, 448–456.
- [10] E.Kh. Gimadi, Yu.V. Glazkov, A.N. Glebov, *Approximation algorithms for solving 2-peripatetic salesman problem on a complete graph with edge weights 1 and 2*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2, **14**:2 (2007), 41–61. Zbl 1249.05364
- [11] A.N. Glebov, A.V. Gordeeva *An algorithm with approximation ratio 5/6 for the metric maximum m-PSP*, In Kochetov Yu. (ed.) et al., *Discrete optimization and operations research. 9th international conference, DOOR 2016*, Lect. Notes Comput. Sci., **9869**, Springer, Cham, 2016, 159–170. Zbl 1392.90096
- [12] A.N. Glebov, A.V. Gordeeva, D.Zh. Zambalaeva, *7/5-approximation algorithm for 2-PSP on minimum with different weight functions*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **8** (2011), 296–309. Zbl 1329.90120
- [13] A.N. Glebov, S.G. Toktokhoeva, *A polynomial algorithm with asymptotic ratio 2/3 for the asymmetric maximization version of the m-PSP*, J. Appl. Ind. Math., **14**:3 (2020), 456–469. Zbl 1495.90152
- [14] A.N. Glebov, D.Zh. Zambalaeva, *Polynomial algorithm with approximation ratio 7/9 for the maximum 2-peripatetic salesman problem*, Discret. Anal. Issled. Oper., **18**:4 (2011), 17–48. Zbl 1249.90300
- [15] A.N. Glebov, D.Zh. Zambalaeva, *An approximation algorithm for the minimum 2-peripatetic salesman problem with different weight functions*, Discret. Anal. Issled. Oper., **18**:5 (2011), 11–37. Zbl 1249.90301
- [16] A.N. Glebov, D.Zh. Zambalaeva, A.A. Skretneva, *A polynomial algorithm with approximation ratio 2/3 for the asymmetric maximum 2-peripatetic salesman problem*, J. Appl. Ind. Math., **9**:1 (2015), 61–67. Zbl 1324.90182
- [17] A.V. Gordeeva, *Polynomial algorithms with guaranteed approximation ratios for the metric maximum 2-PSP*, Graduation thesis of a specialist, Novosibirsk State University, 2010.
- [18] A.I. Serdyukov, *An algorithm with estimation for the travelling salesman maximum problem*, Upr. Sist., **25** (1984), 80–86. Zbl 0569.90089

GLEBOV ALEKSEY NIKOLAEVICH  
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
PR. KOPTYUGA, 4,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address: angle@math.nsc.ru*

LYLOVA SOPHYA SERGEEVNA  
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,  
PIROGOVA STREET, 2,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address: sophyal@mail.ru*

ТОКТОКХОЕВА СУРЕНА ГАРМАЗХАПОВНА  
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,  
PIROGOVA STREET, 2,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address: s.toktokhoeva@yandex.ru*