S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 20, №2, стр. 981-986 (2023) УДК 517.911.5, 517.927
DOI 10.33048/semi.2023.20.059 MSC 34A36, 34B24

ВАРИАЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Д.К. Потапов

Abstract. We study a variational inequality for the Sturm–Liouville problem with a nonlinearity that is discontinuous in the phase variable. Previously obtained results for variational inequalities with a spectral parameter and discontinuous operators are applied to this problem. For the variational inequality in the Sturm–Liouville problem with discontinuous nonlinearity, we have established theorems on the existence of semiregular solutions and some bound for the parameter. As an application, we consider the variational inequality for a one-dimensional analog of the Gol'dshtik model for separated flows of an incompressible fluid.

Keywords: variational inequality, Sturm–Liouville's problem, discontinuous nonlinearity, Gol'dshtik's model.

Введение

Существование решений задач Штурма–Лиувилля с разрывными нелинейностями рассматривалось в работах [1]–[7]. О прикладном аспекте таких задач см., например, работы [8]–[10]. Вариационные неравенства со спектральным параметром и разрывными правыми частями изучались в работах [11], [12].

Данная работа является продолжением этих исследований. По сравнению с работами других авторов в данной статье ослаблены ограничения на точки разрыва нелинейности, рассматриваются полуправильные решения, получена

Potapov, D.K., A variational inequality for the Sturm–Liouville problem with discontinuous nonlinearity.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00069, https://rscf.ru/project/23-21-00069/.

Поступила 13 января 2023 г., опубликована 14 ноября 2023 г.

оценка параметра, изучаются обобщения уравнений на вариационные неравенства. В отличие от [11], [12] в данной работе исследуются вариационные неравенства для обыкновенных дифференциальных уравнений, а не эллиптические вариационные неравенства.

1. Постановка задачи. Определения и обозначения

Рассматривается задача нахождения функции $u \in K$, удовлетворяющей неравенству

$$\int_a^b p(x)u'(x)(v-u)'dx + \int_a^b q(x)u(x)(v-u)(x)dx - \lambda \int_a^b g(x,u(x))(v-u)(x)dx \geq 0 \quad \forall v \in K, \tag{1}$$

где $-\infty < a < b < +\infty$, $p \in C_{1,\alpha}([a,b])$, $q \in C_{0,\alpha}([a,b])$ $(0 < \alpha \leq 1)$; λ – положительный параметр; функция $g : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суперпозиционно измеримая, для почти всех $x \in (a,b)$ сечение $g(x,\cdot)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода, $g(x,u) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$ для любого $u \in \mathbb{R}$, $g_-(x,u) = \varliminf_{\eta\to u} g(x,\eta)$, $g_+(x,u) = \varlimsup_{\eta\to u} g(x,\eta)$ и $|g(x,u)| \leq \beta(x)$ для любого $u \in \mathbb{R}$, $\beta \in L_q((a,b))$, $q > 1$; K – выпуклое замкнутое непустое множество в соболевском пространстве $W_2^1((a,b))$.

Вариационному неравенству (1) поставим в соответствие эквивалентную задачу Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью

$$Lu(x) \equiv -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = \lambda g(x,u(x)), \;\; x \in (a,b), \tag{2}$$

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{3}$$

Задача (2), (3) при приведенных выше ограничениях на $p(x)$, $q(x)$, λ и $g(x,u)$ изучалась в работах [4], [5].

Нам потребуются следующие определения.

Определение 1. *Сильным решением* неравенства (1) называется функция $u \in K$, удовлетворяющая (1).

Определение 2. *Сильным решением* задачи (2), (3) называется функция $u \in W_q^2((a,b))$, $q > 1$, удовлетворяющая для почти всех $x \in (a,b)$ уравнению (2) и граничным условиям (3).

Отметим, что каждое сильное решение краевой задачи (2), (3) является сильным решением вариационного неравенства (1).

В дальнейшем используются также следующие определения.

Определение 3. *Полуправильным решением* неравенства (1) называется такое сильное его решение u, значение которого $u(x)$ для почти всех $x \in (a,b)$ является точкой непрерывности функции $g(x,\cdot)$.

Определение 4. *Прыгающим разрывом* функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется такое $u \in \mathbb{R}$, что $f(u-) < f(u+)$, где $f(u\pm) = \lim_{s\to u\pm} f(s)$.

Положим

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b p(x)(u'(x))^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_a^b q(x)u^2(x)dx, \quad J_2(u) = \int\limits_a^b dx \int\limits_0^{u(x)} g(x,s)ds,$$

$$J^\lambda(u) = J_1(u) - \lambda J_2(u), \quad U = \{u \in K : J_2(u) > 0\}.$$

2. Теоретические результаты

Применение основного результата из работы [12] к исследуемой задаче дает нижеследующую теорему о существовании решений вариационного неравенства (1).

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $J_1(u) \geq 0$ *для любого* $u \in K$;

2) *для почти всех* $x \in (a,b)$ *функция* $g(x,0) = 0$ *и* $|g(x,u)| \leq \beta(x)$ *для любого* $u \in \mathbb{R}$, *где* $\beta \in L_q((a,b))$, $q > 1$;

3) *найдется* $u_0 \in K$, *для которого* $J_2(u_0) > 0$;

4) *если пространство* $N(L)$ *решений задачи* $Lu = 0$, $u(a) = u(b) = 0$ *ненулевое (резонансный случай), то дополнительно предполагается, что*

$$\lim_{u \in N(L),\ ||u|| \to +\infty} J_2(u) = -\infty;$$

5) *множество* $K \subset H^1_\circ((a,b))$ *и ограничено.*

Тогда существует

$$0 < \lambda_0 \leq \inf_{u \in U} \frac{J_1(u)}{J_2(u)}$$

такое, что $\inf\limits_{v \in K} J^\lambda(v) < 0$ *для любого* $\lambda > \lambda_0$ *и найдется* $u_\lambda \in K$, *для которого*

$$J^\lambda(u_\lambda) = \inf_{v \in K} J^\lambda(v). \tag{4}$$

Если дополнительно для почти всех $x \in (a,b)$ *функция* $g(x,\cdot)$ *имеет только прыгающие разрывы, то любое* u_λ, *удовлетворяющее условию* (4), *является ненулевым полуправильным решением неравенства* (1).

Доказательство. Доказательство теоремы 1 сводится к проверке выполнения условий теоремы 1.1 из работы [12]. В работе [13] проверено выполнение данных условий в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями. Для вариационного неравенства (1) (точнее эквивалентной задачи (2), (3)) эти условия проверяются аналогично. Таким образом, выполнены условия 1)–3) теоремы 1.1 из [12]. Условие 4) теоремы 1.1 из [12] не требует выполнения, поскольку соответствующее отображение T – компактное, а не антимонотонное. Поэтому утверждение теоремы 1 справедливо согласно теореме 1.1 из [12]. Теорема 1 доказана. □

Следствие. *Пусть выполнены условия* 1)–4) *теоремы* 1 *с* $K = H^1_\circ((a,b))$. *Тогда утверждение теоремы* 1 *справедливо для задачи* (2), (3).

Доказательство. Если $J_1(u) \geq \gamma||u||^2$ для любого $u \in H^1_\circ((a,b))$, где γ – положительная константа, независящая от u (коэрцитивный случай), то доказываемое следствие справедливо в силу теоремы из работы [4]. В резонансном случае справедливость следствия вытекает из теоремы 4 из работы [13]. Следствие доказано. $\square$

В коэрцитивном случае имеет место нижеследующая теорема об оценке параметра λ.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 2), 3), 5) *теоремы* 1 *и дополнительно существует постоянная* $\gamma > 0$, *для которой* $J_1(u) \geq \gamma ||u||^2$ *для любого* $u \in K$. *Тогда для параметра* λ *справедлива следующая оценка:*

$$\lambda > C \cdot \inf_{u \in U} ||u||,$$

где положительная константа $C = \gamma/\delta$, *а постоянная* δ *равна произведению* $||\beta||_{L_q((a,b))}$ *на норму оператора* P *вложения* K *в* $L_p((a,b))$, $p = q/(q-1)$, $q > 1$.

Доказательство. В силу условия 2) теоремы 1 для любого $u \in K$ имеем

$$|J_2(u)| = \left| \int\limits_a^b dx \int\limits_0^{u(x)} g(x,s)ds \right| \leq \int\limits_a^b \beta(x)|u(x)|dx \leq \delta ||u||,$$

где $\delta = ||\beta||_{L_q((a,b))} \cdot ||P||$, P – оператор вложения K в $L_p((a,b))$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

По условию 3) теоремы 1 множество U непусто. Для

$$u \in U = \{u \in K : J_2(u) > 0\}$$

справедливо неравенство $J_2(u) \leq \delta ||u||$, а в силу дополнительного условия доказываемой теоремы выполняется неравенство $J_1(u) \geq \gamma ||u||^2$ с положительной константой γ.

Согласно теореме 1 неравенство (1) разрешимо при $\lambda > \frac{J_1(u)}{J_2(u)}$. Поэтому $\lambda > \frac{\gamma}{\delta} ||u||$ для $u \in U$. Положив $C = \gamma/\delta$, получим $\lambda > C||u||$. Поскольку последнее неравенство установлено для произвольного $u \in U$, то получаем искомую оценку $\lambda > C \cdot \inf\limits_{u \in U} ||u||$. Теорема 2 доказана. $\square$

3. Приложения

В качестве приложения установленных теорем приведем одномерный аналог модели Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости [8].

Одномерная задача Гольдштика имеет вид

$$-u'' = \omega g(x, u(x)), \quad x \in (0,1), \tag{5}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{6}$$

где параметр $\omega > 0$ – завихренность, а нелинейность

$$g(x,u) = \begin{cases} -1, & \text{если } \ u < x - 1, \\ 0, & \text{если } \ u \geq x - 1. \end{cases}$$

Рассмотрим вариационное неравенство для задачи (5), (6). Имеем задачу нахождения функции $u \in K$, удовлетворяющей неравенству

$$\int\limits_0^1 u'(x)(v-u)'dx - \omega \int\limits_0^1 g(x,u(x))(v-u)(x)dx \geq 0 \ \ \forall v \in K, \tag{7}$$

где K – выпуклое замкнутое непустое множество в соболевском пространстве $W_2^1((0,1))$. Дополнительно потребуем, что $K \subset \overset{\circ}{H}{}^1((0,1))$ и ограничено.

Для неравенства (7) будут выполнены условия теорем 1, 2 данной статьи.

Действительно, для почти всех $x \in (0,1)$ выполнены соотношения $g(x,0) = 0$ и $|g(x,u)| \leq 1$ для любого $u \in \mathbb{R}$, $1 \in L_q((0,1))$, $q > 1$. Тем самым выполнено условие 2) теоремы 1.

Аналогично [14] показывается, что найдется $u_0 \in K$, для которого $J_2(u_0) > 0$, т.е. выполняется условие 3) теоремы 1.

Условие 5) теоремы 1 выполнено согласно постановке задачи.

Для любого $u \in K$ имеем

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u'^2 dx = \frac{1}{2}||u||^2 \geq 0.$$

Выполнено условие 1) теоремы 1.

Более того, существует константа $\gamma > 0$ (например, $\gamma = \frac{1}{4}$), для которой $J_1(u) \geq \gamma ||u||^2$ для любого $u \in K$. Последнее означает, что имеет место коэрцитивный случай (т.е. условие 4) теоремы 1 не требует выполнения) и выполнено дополнительное условие теоремы 2.

Таким образом, для неравенства (7) выполнены как условия теоремы 1, так и условия теоремы 2. Поэтому утверждения теорем 1, 2 справедливы для одномерной задачи Гольдштика. Полученные теоремы проиллюстрированы прикладной задачей.

References

[1] S. Carl, S. Heikkilä, *On the existence of minimal and maximal solutions of discontinuous functional Sturm-Liouville boundary value problems*, J. Inequal. Appl., **2005**:4 (2005), 403–412. Zbl 1108.34020

[2] G. Bonanno, G. Molica Bisci, *Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities*, Bound. Value Probl., (2009), Article ID 670675. Zbl 1177.34038

[3] G. Bonanno, S.M. Buccellato, *Two point boundary value problems for the Sturm-Liouville equation with highly discontinuous nonlinearities*, Taiwanese J. Math., **14**:5 (2010), 2059–2072. Zbl 1237.34026

[4] D.K. Potapov, *Sturm-Liouville's problem with discontinuous nonlinearity*, Differ. Equ., **50**:9 (2014), 1272–1274. Zbl 1310.34037

[5] D.K. Potapov, *Existence of solutions, estimates for the differential operator, and a "separating" set in a boundary value problem for a second-order differential equation with a discontinuous nonlinearity*, Differ. Equ., **51**:7 (2015), 967–972. Zbl 1326.34051

[6] G. Bonanno, G. D'Agui, P. Winkert, *Sturm-Liouville equations involving discontinuous nonlinearities*, Minimax Theory Appl., **1**:1 (2016), 125–143. Zbl 1357.34048

[7] V.N. Pavlenko, E.Yu. Postnikova, *Sturm-Liouville problem for an equation with a discontinuous nonlinearity*, Chelyabinskiĭ Fiz.-Mat. Zh., **4**:2 (2019), 142–154. Zbl 1516.34055

[8] D.K. Potapov, *A continuous approximation for a 1D analog of the Gol'dshtik model for separated flows of incompressible fluid*, Numer. Anal. Appl., **4**:3 (2011), 234–238. Zbl 1299.35240

[9] D.K. Potapov, V.V. Yevstafyeva, *Lavrent'ev problem for separated flows with an external perturbation*, Electron. J. Differ. Equ., **2013** (2013), Paper No. 255. Zbl 1290.35134

[10] S. Bensid, J. Ildefonso Díaz, *Stability results for discontinuous nonlinear elliptic and parabolic problems with a S-shaped bifurcation branch of stationary solutions*, Disc. Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **22**:5 (2017), 1757–1778. Zbl 1359.35009

[11] D.K. Potapov, *On a class of elliptic variational inequalities with a spectral parameter and discontinuous nonlinearity*, Sib. Math. J., **53**:1 (2012), 168–173. Zbl 1241.49009

[12] D.K. Potapov, *Spectral problems for variational inequalities with discontinuous operators*, Math. Notes, **93**:2 (2013), 288–296. Zbl 1262.49013

[13] V.N. Pavlenko, D.K. Potapov, *Existence of a ray of eigenvalues for equations with discontinuous operators*, Sib. Math. J., **42**:4 (2001), 766–773. Zbl 0986.47049

[14] D.K. Potapov, *Continuous approximations of Gol'dshtik's model*, Math. Notes, **87**:2 (2010), 244–247. Zbl 1198.35199

Dmitriy Konstantinovich Potapov
Saint Petersburg State University,
Universitetskaya nab., 7/9,
199034, St. Petersburg, Russia
Email address: d.potapov@spbu.ru