S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 1, стр. 1–16 (2024) УДК 519.218.27
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.001 MSC 60J80

ЛОКАЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ НИЖНИХ УКЛОНЕНИЙ СИЛЬНО НАДКРЕТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ЧИСЕЛ ПОТОМКОВ ОДНОЙ ЧАСТИЦЫ

К.Ю. Денисов

Представлено В.И. Вахтелем

Abstract: We consider local probabilities of lower deviations for branching process $Z_n = X_{n,1}+\cdots+X_{n,Z_{n-1}}$ in random environment $\boldsymbol{\eta}$. We assume that $\boldsymbol{\eta}$ is a sequence of independent identically distributed variables and for fixed $\boldsymbol{\eta}$ the distribution of variables $X_{i,j}$ is geometric. We suppose that the associated random walk $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ has positive mean μ and satisfies left-hand Cramer's condition $\mathbf{E}\exp(h\xi_i) < \infty$ as $h^- < h < 0$ for some $h^- < -1$. Under these assumptions, we find the asymptotic representation for local probabilities $\mathbf{P}\left(Z_n = \lfloor \exp\left(\theta n\right)\rfloor\right)$, where θ is near the boundary of the first and the second deviations zones.

Keywords: branching processes, random environment, random walk, Cramer's condition, large deviations, local theorems.

Denisov K.Y., Local Lower Large Deviations of Strongly Supercritical BPREG.

Работа поддержана РНФ (грант №19-11-00111-П).

Поступила 8 июля 2023 г., опубликована 29 января 2024 г.

1 Введение

Пусть $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, ...)$ — последовательность независимых одинаково распределённых (н.о.р.) случайных величин (с.в.), а $\{\phi_y\}_{y\in\mathbb{R}}$ — семейство производящих функций (п.ф.). При фиксированной среде $\boldsymbol{\eta}$ рассмотрим набор независимых случайных величин $X_{i,j}, j \in \mathbb{N}$, имеющих п.ф. ϕ_{η_i} при каждом $i \in \mathbb{N}$.

Ветвящимся процессом $(Z_n, n \geq 0)$ в случайной среде $\boldsymbol{\eta}$ (ВПСС) назовём последовательность случайных величин, заданную соотношениями:

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = X_{n+1,1} + \dots + X_{n+1,Z_n},\ n \geq 0.$$

Положим $\xi_i = \ln \phi'_{\eta_i}(1)\,, \mathbf{E}\xi_i = \mu$. Сопровождающим случайным блужданием ВПСС назовём последовательность случайных величин $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, n \geq 1$. Процесс и его сопровождающее блуждание тесно связаны: $\mathbf{E}\left(Z_n | \,\boldsymbol{\eta}\right) = e^{S_n}$. Кроме того, в работе Агрести [8] для ВПССГ получены следующие соотношения:

$$\mathbf{P}\left(Z_n > k | \,\boldsymbol{\eta}\right) = \frac{1}{U_n + V_n}\left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k},$$

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k | \,\boldsymbol{\eta}\right) = \frac{1}{U_n + V_n}\left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k}\frac{U_n}{V_n}, \tag{1}$$

при всех натуральных k, где $U_n = e^{-S_n},\ V_n = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-S_i}$.

В работе рассматривается случай геометрического семейства п.ф.:

$$\phi_y(s) = 1 - \left(1 + \frac{1}{\phi'_y(1)\,(1-s)}\right)^{-1}. \tag{2}$$

ВПСС, в котором п.ф. числа потомков одной частицы задаются соотношением (2), будем называть ветвящимся процессом в случайной среде с геометрическим числом потомков (ВПССГ).

Назовём с.в. ζ решётчатой, если существуют такие вещественные числа a и b, $b > 0$, что

$$\mathbf{P}\left(\zeta \in \{a + bn, n \in \mathbb{Z}\}\right) = 1,$$

и нерешетчатой в ином случае. В работе рассматриваются ВПСС, шаги ξ сопровождающих блужданий S_n которых имеют нерешетчатые распределения.

Для ВПСС хорошо изучена задача о верхних больших уклонениях размера популяции, то есть исследована асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(Z_n > \exp(\theta n))$, где $\theta > \mu$. В частности, для ВПССГ асимптотика такого рода вероятностей была получена М.В. Козловым ([1], [2]). В общем случае (без предположения о том, что число потомков имеет геометрическое распределение) известны как логарифмическая асимптотика таких вероятностей ([3]), так и точная асимптотика ([4], [5]).

Для вероятностей нижних больших уклонений $\mathbf{P}(1 \leq Z_n < \exp(\theta n))$, где $\theta < \mu$, исследована логарифмическая асимптотика ([6]). Для случая

$\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (m(-1); \mu)$ для некоторого $m(-1)$, которое будет определено далее — то есть для случая первой зоны нижних больших уклонений — автором получена локальная асимптотика вероятностей $\mathbf{P}\left(Z_n = \lfloor \exp\left(\theta n\right) \rfloor\right)$ ([9]). Также локальная асимптотика $\mathbf{P}\left(Z_n = \lfloor \exp\left(\theta n\right) \rfloor\right)$ исследована для случая второй зоны нижних больших уклонений — то есть для $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\mu^-; m(-1))$, где μ^- также будет определена далее ([10]). В данной работе рассматривается задача об асимптотике вероятностей нижних больших уклонений в локальной форме $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp\left(\theta n\right) \rfloor)$ для значений θ, принадлежащих некоторому отрезку $[\theta_1; \theta_2]$, где θ_1 и θ_2 стремятся к $m(-1)$. Иными словами, рассматриваются переходные явления на границе первой и второй зон нижних больших уклонений. Для указанных вероятностей в работе получено асимптотическое представление.

Работа организована следующим образом: в разделе 2 даются предварительные сведения о сопряженных распределениях и ВПСС, а также необходимые нам теорема 1 и лемма 1, в разделе 3 сформулирована основная теорема 2 об асимптотике локальных вероятностей нижних уклонений ВПССГ, а также теоремы 3 и 4, следующие из теоремы 2, в разделе 4 приведено доказательство основной теоремы 2, а в разделе 5 — доказательство теоремы 3.

2 Предварительные сведения

Рассмотрим случайное блуждание $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, где ξ_i — независимые одинаково распределенные нерешетчатые случайные величины с функцией распределения $F(x)$, удовлетворяющие условию $0 < \mu := \mathbf{E}\xi < \infty$. Здесь и далее мы будем использовать символ ξ для обозначения случайной величины, имеющей такое же распределение, что и ξ_i.

Будем предполагать, что выполнено левостороннее условие Крамера: найдется число $h^- < 0$, такое что $R\left(h\right) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ при $h^- < h < 0$. Для указанных значений параметра h положим

$$m\left(h\right) = \left(\ln R\left(h\right)\right)' = \mathbf{E}\xi e^{h\xi}/R\left(h\right), \quad \sigma^2\left(h\right) = m'\left(h\right),$$
$$F^{(h)}\left(x\right) = R^{-1}\left(h\right) \int\limits_{-\infty}^{x} e^{hu}\mathbf{P}\left(\xi \in \mathrm{d}u\right). \tag{3}$$

Распределение, порожденное функцией $F^{(h)}$, назовем сопряженным к распределению с.в. ξ с параметром h. Независимые одинаково распределённые величины, имеющие сопряженное распределение с параметром h, будем обозначать $\xi_i^{(h)}$. Нам также понадобится обозначение $S_n^{(h)} = \xi_1^{(h)} + \cdots + \xi_n^{(h)}$. Из определения сопряженного распределения следует, что

$$\mathbf{E}\xi_i^{(h)} = m\left(h\right), \ \mathbf{D}\xi_i^{(h)} = \sigma^2\left(h\right) > 0. \tag{4}$$

Следовательно, функция $m\left(h\right)$ монотонно возрастает при $h \in (h^-; 0)$. Обозначим $m^- := \lim_{h \downarrow h^-} m\left(h\right)$. Таким образом, при всех $\theta \in (m^-; \mu)$ найдётся единственное число h_θ, принадлежащее $(h^-, 0)$, такое что $m\left(h_\theta\right) =$

θ. Положим $\Lambda(\theta) = h_\theta \theta - \ln R(h_\theta)$. Функцию Λ назовем функцией уклонений.

Величины с сопряженным распределением также удовлетворяют условию Крамера. А именно, если $\widetilde{h} \in (h^-, 0)$, то

$$R^{(\widetilde{h})}(h) := \mathbf{E}\exp\left(h\xi^{(\widetilde{h})}\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{hx}\mathbf{P}\left(\xi^{(\widetilde{h})} \in \mathrm{d}x\right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(h+\widetilde{h}\right)x} \frac{\mathbf{P}(\xi \in \mathrm{d}x)}{R\left(\widetilde{h}\right)} = \frac{R\left(\widetilde{h}+h\right)}{R\left(\widetilde{h}\right)} \tag{5}$$

при $h \in \left(h^- - \widetilde{h}; -\widetilde{h}\right)$. Положим

$$m^{(\widetilde{h})}(h) = \left(\ln R^{(\widetilde{h})}(h)\right)'_h = \left(\ln R(h+\widetilde{h}) - \ln R(\widetilde{h})\right)'_h = m\left(h+\widetilde{h}\right).$$

По определению при каждом $\widetilde{h} \in (h^- - h_\theta; -h_\theta)$ величина $h_\theta^{(\widetilde{h})}$ должна удовлетворять уравнению

$$m^{(\widetilde{h})}\left(h_\theta^{(\widetilde{h})}\right) = \theta = m\left(h_\theta^{(\widetilde{h})} + \widetilde{h}\right).$$

Таким образом,

$$h_\theta^{(\widetilde{h})} = h_\theta - \widetilde{h}, \quad m^{(\widetilde{h})}\left(h_\theta^{(\widetilde{h})}\right) = m(h_\theta), \quad \sigma^{(\widetilde{h})}\left(h_\theta^{(\widetilde{h})}\right) = \sigma(h_\theta). \tag{6}$$

Нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 1 ([7]). *Пусть ξ — нерешетчатая с.в. с математическим ожиданием $\mathbf{E}\xi = \mu < \infty$, для которой выполнено условие Крамера: $R(h) < \infty$ при $h^- < h < 0$. Пусть $\xi_i^{(h)}$ — н.о.р. с.в., сопряженные к ξ с параметром h, $\mathbf{E}\xi^{(h)} = m(h)$ и $\mathbf{D}\xi^{(h)} = \sigma^2(h) < \infty$. Тогда при любом фиксированном $\triangle > 0$ и $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}\left(S_n^{(h)} \in [x; x+\triangle)\right) = \frac{\triangle}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)} \exp\left(\frac{-(x-m(h)n)^2}{2n\sigma^2(h)}\right) + \frac{o(1)}{\sqrt{n}},$$

где $o(1)$ равномерно мало по всем действительным x и $h \in [h_1; h_2] \subset (h^-; 0)$.

Теорема 1 доказана в более общем виде в [7] (теорема 1.5.3, параграф 1.5, страница 48), где также рассмотрен и случай сопряженных величин (теорема 2.2.1, параграф 2.2, страница 56). Также нам понадобится следующий результат, доказанный в [10] как лемма 2.

Лемма 1 ([10]). *Пусть $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ — случайное блуждание, причем величина ξ предполагается нерешетчатой, а $\mathbf{E}\xi = \mu > 0$. Предположим, что распределение с.в. ξ удовлетворяет условию Крамера: $R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ при $h^- < h < 0$, где $h^- < -1$. Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$*

таково, что $\theta(n) = \theta := \ln k/n$. *Для произвольной константы* a, *а также произвольных последовательностей* g_n *и* d_n *таких, что* $|g_n| < D\sqrt{n}$ *и* $G < d_n - g_n < D\sqrt{n}$ *для всех* n *и некоторых положительных констант* D *и* G, *верно, что*

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{V}_n < a \middle| \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\right) \to \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty < a\right)$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \mu)$ *при* $n \to \infty$, *где*

$$\widetilde{V}_n := \sum_{i=0}^{n} e^{-S_i^{(h_\theta)}},\ \widetilde{V}_\infty := \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-S_i^{(h_\theta)}},\ \widetilde{S}_n = S_n^{(h_\theta)} - \theta n.$$

3 Основной результат

В дальнейшем нам будет удобно обозначать через $\rho_n = \rho_n(\theta, \theta_1, \theta_2)$ величины, стремящиеся к нулю при $n \to \infty$ равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$. При этом в разных местах ρ_n будет, вообще говоря, обозначать различные функции. Кроме того, в некоторых случаях мы будем использовать это обозначение для величин, стремящихся к нулю при $n \to \infty$ и не зависящих от θ.

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение данной работы.

Теорема 2 (локальная теорема о нижних уклонениях ВПССГ). *Пусть* $(Z_n, n \geq 0)$ — *ВПССГ со средой* $\boldsymbol{\eta}$, *порожденной последовательностью н.о.р. величин,* $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ — *его сопровождающее случайное блуждание. Пусть величина* ξ *предполагается нерешетчататой,* $\mu > 0$ *и* $m(-1) > 0$. *Также пусть для* ξ *выполнено условие Крамера:* $R(h) < \infty$ *при* $h^- < h < 0$, *где* $h^- < -1$.

Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$, *а* $\theta(n) = \theta := \ln k/n \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \mu)$, *где* $\theta_1 = \theta_1(n) \to m(-1)$ *и* $\theta_2 = \theta_2(n) \to m(-1)$ *при* $n \to \infty$.

Тогда

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = (1 + \rho_n)\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \times \\ \times \exp\left(\frac{\sigma^2(h_\theta)n(1 + h_\theta)^2}{2}\right)\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - m(-1))}{\sigma(h_\theta)}\right)\right), \tag{7}$$

где

$$\widetilde{V}_\infty := \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-S_i^{(h_\theta)}}.$$

Используя теорему 2, мы получим следующий важный результат.

Теорема 3. *Пусть верны условия теоремы 2. Пусть* ε_n — *некоторая положительная последовательность, стремящаяся к бесконечности, но являющаяся* $o(\sqrt{n})$ *при* $n \to \infty$. *Положим* $\theta_1 = \theta_1(n) = m(-1) +$

$n^{-1/2}\varepsilon_n$, а $\theta_2 \in (m(-1); \mu)$ и фиксированным. Тогда

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \frac{(1+\rho_n)\Gamma(1+h_\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1}.$$

Данная теорема обобщает результат, полученный в работе [9] для первой зоны больших нижних уклонений. Кроме того, объединяя теоремы 3 и 2, а также теорему 2 из [10], получим следующий результат.

Теорема 4. *Пусть $(Z_n, n \geq 0)$ — ВПССГ со средой $\boldsymbol{\eta}$, представляющей собой последовательность н.о.р. величин, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ — его сопровождающее случайное блуждание. Пусть величина ξ предполагается нерешетчататой, $\mu > 0$ и $m(-1) > 0$. Также пусть для ξ выполнено условие Крамера: $R\left(h\right) < \infty$ при $h^- < h < 0$, где $h^- < -1$. Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$, а $\theta(n) = \theta := \ln k/n \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \mu)$.*

Тогда

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \left(1 + \rho_n\right) R^n(-1) \mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - m(-1))}{\sigma(-1)}\right)\right),$$

если $\theta_1 \in (\max(m^-, 0); m(-1))$ фиксировано, а $\theta_2 = \theta_2(n) \leq m(-1) + cn^{-1/2}$ для некоторого фиксированного $c > 0$,

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = (1+\rho_n)\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \times \\ \times \exp\left(\frac{\sigma^2(h_\theta)n(1+h_\theta)^2}{2}\right)\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - m(-1))}{\sigma(h_\theta)}\right)\right),$$

если $\theta_1 = \theta_1(n) \to m(-1)$ и $\theta_2 = \theta_2(n) \to m(-1)$ при $n \to \infty$, и

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \frac{(1+\rho_n)\Gamma(1+h_\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1},$$

если $\theta_1 = \theta_1(n) \geq m(-1) + n^{-1/2}\varepsilon_n$ для некоторой положительной последовательности ε_n, стремящейся к бесконечности, но являющейся $o(\sqrt{n})$ при $n \to \infty$, а $\theta_2 \in (m(-1); \mu)$ фиксировано, где

$$\widehat{V}_\infty := \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-S_i^{(-1)}}, \ \widetilde{V}_\infty := \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-S_i^{(h_\theta)}}.$$

Заметим, что среднее из трёх представлений для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ в теореме 4 пересекается по области определения с остальными двумя. Таким образом, теорема 4 полностью описывает переходное явления между первой и второй зоной больших нижних уклонений.

4 Доказательство основного результата

Оценим $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ при $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \mu)$, где $\theta_1 = \theta_1(n) \to m(-1)$ и $\theta_2 = \theta_2(n) \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Для этого воспользуемся теоремой 2 из [10]:

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \left(1+\rho_n\right) R^n(-1)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} \times$$
$$\times \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - m(-1))}{\sigma(-1)}\right)\right) := P_{1,n}(k) \qquad (8)$$

равномерно по $\theta \in [\theta_3; \theta_4] \subset (\max(m^-, 0); \theta_4]$, где θ_3 — фиксировано, а $\theta_4 = \theta_4(n, c) = m(-1) + cn^{-1/2}$ для некоторого фиксированного $c > 0$. Заметим, что утверждение (8) верно для любого фиксированного $c > 0$. Следовательно, для любой положительной величины ε и последовательности $\widehat{c}(i) = 2^i$ при $i \in \mathbb{N}$ существует такая величина n_i, что

$$\left|\frac{\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)}{P_{1,n}(k)} - 1\right| < \varepsilon$$

при всех $\theta \in [\theta_3; \theta_4(n, \widehat{c}(i))]$, $n > n_i$. Для каждого $\varepsilon = 1/2^j$ и $\widehat{c}(i)$ обозначим соответствующее n_i как $n_i(j)$. Составим последовательность $c(n)$ следующим образом:

$$c(1) = c(2) = \cdots = c(n_1(1)) = 1,$$
$$c(n_1(1)+1) = \cdots = c(n_2(2)) = \widehat{c}(1),$$
$$c(n_2(2)+1) = \cdots = c(n_3(3)) = \widehat{c}(2),$$
$$c(n_3(3)+1) = \cdots = c(n_4(4)) = \widehat{c}(3)\cdots$$

Из построения выше получим, что утверждение (8) выполнено равномерно по $\theta \in [\theta_3; \theta_4(n, c(n))]$, где $c(n)$ — некоторая положительная последовательность, стремящаяся к бесконечности, пусть и с неизвестной скоростью. Положим

$$\theta_1 = \theta_1(n) = m(-1) + \frac{c(n)n^{-1/2}}{2}. \qquad (9)$$

Вначале будет доказано, что утверждение (7) равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, где θ_1 определяется соотношением (9), а $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Далее будет показано, что выражение для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$, полученное в теореме 2, совпадает с выражением для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$, полученным в (8) для отрезка $[\theta_1; m(-1) + cn^{-1/2}]$, где c — произвольная положительная константа, а $\theta_1 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Отсюда, аналогично рассуждениям (8)-(9), получим, что эта эквивалентность будет верна при $\theta \in [\theta_1; m(-1) + c(n)n^{-1/2}]$. Таким образом, теорема 2 будет верна для θ из двух пересекающихся отрезков, откуда получим, что эта теорема верна для всех $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \mu)$, где $\theta_1 \to m(-1)$ и $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть верны условия теоремы 2, θ_1 определяется соотношением (9), а $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Тогда*

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \frac{1+\rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1}}{1 + h_\theta} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n}$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, *где*

$$\widetilde{V}_\infty := \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-S_i^{(h_\theta)}}.$$

Доказательство. Разобьём вероятность $\mathbf{P}(Z_n = k)$ на две части:

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = \mathbf{P}(Z_n = k,\ S_n \le \theta n - 1) + \\ + \mathbf{P}(Z_n = k,\ S_n > \theta n - 1). \tag{10}$$

Доказательство того, что

$$\mathbf{P}(Z_n = k,\ S_n \le \theta n - 1) < \frac{2}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)(-h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} e^{h_\theta + 1} \tag{11}$$

полностью аналогично пункту 2 доказательства теоремы 3 из [9]. При $S_n > \theta n - 1$ справедливы следующие неравенства:

$$k\frac{U_n^2}{V_n^2} < kU_n^2 \le e^{\theta n - 2S_n} \le e^{\theta n - 2\theta n + 2}.$$

Следовательно, при $S_n > \theta n - 1$ из (1) получаем, что

$$\mathbf{P}(\,Z_n = k|\,\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{U_n + V_n}\left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k}\frac{U_n}{V_n} = \\ = \frac{1}{U_n + V_n} e^{-k\ln\left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)}\frac{U_n}{V_n} = \frac{U_n}{V_n^2} e^{-k\frac{U_n}{V_n}}(1 + o(1)) \tag{12}$$

при $n \to \infty$, где $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым $\boldsymbol{\eta}$. Используя (12), а также определение сопряженного распределения, получим, что

$$\mathbf{P}(Z_n = k,\ S_n > \theta n - 1) = \\ = R^n(h_\theta)\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_{\theta n - 1}^{+\infty} e^{-(1+h_\theta)y}\frac{1}{x(x + e^{-y})}\exp\left(-\frac{\exp(-y)k}{x}\right) \times \\ \times \mathbf{P}\left(S_n^{(h_\theta)} \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) = (1 + \rho_n)\,e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \times \\ \times \int\limits_1^{+\infty}\int\limits_{-1}^{+\infty} e^{-(1+h_\theta)y}\frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{\exp(-y)}{x}\right)\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right), \tag{13}$$

где $\widetilde{S}_n := S_n^{(h_\theta)} - \theta n$, а $\widetilde{V}_n = \sum_{i=0}^{n-1}\exp(-S_i^{(h_\theta)})$. Обозначим интеграл в правой части (13) через I_1 и положим $a_n := \sqrt{1/(\theta_2(n) - m(-1))}$. Разобьем интеграл I_1 на четыре интеграла I_2, I_3, I_4 и I_5 по промежуткам $(-1; 0]$, $(0; a_n]$, $(a_n; \sqrt{n})$ и $[\sqrt{n}; +\infty)$ соответственно. Отметим, что при достаточно больших n выполнены неравенства $0 < a_n < \sqrt{n}$, поскольку $\theta_2 - m(-1) > c(n)/\sqrt{n}$ при всех n, где $c(n)$ — положительная последовательность. Оценим интеграл I_2, используя то, что $1 + h_\theta \to 0$ при $n \to \infty$

равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$:

$$I_2 := \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{-1}^{0} e^{-(1+h_\theta)y} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{\exp(-y)}{x}\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \le$$

$$\le 2e^e \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in (-1, 0],\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \le 4e^e \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in (-1, 0]\right)$$

при всех достаточно больших n, где в последнем переходе мы воспользовались леммой 1. Далее, применив теорему 1, получаем, что

$$I_2 \le \frac{8}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} e^e \tag{14}$$

при всех достаточно больших n. Оценим интеграл I_3, также используя лемму 1 и теорему 1:

$$I_3 = \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{0}^{a_n} e^{-(1+h_\theta)y} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{\exp(-y)}{x}\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \le$$

$$\le 2 \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in (0, a_n],\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \le 4\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in (0, a_n]\right) \le$$

$$\le \frac{8a_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} = \rho_n \frac{1}{\sqrt{n}(1+h_\theta)}. \tag{15}$$

при всех достаточно больших n, где в последнем переходе мы воспользовались тем, что $a_n(1+h_\theta) \to 0$ при $n \to \infty$. Далее оценим интеграл I_5:

$$I_5 = \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-(1+h_\theta)y} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{\exp(-y)}{x}\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \le$$

$$\le 2 \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-(1+h_\theta)y} \frac{1}{x^2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \tag{16}$$

при всех достаточно больших n. Заметим, что так как $m(h_\theta) = \theta$, то $h'_\theta = 1/\sigma^2(h_\theta)$, откуда, согласно формуле Тейлора, получаем, что при $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$

$$h_\theta + 1 = (1 + \rho_n) \frac{\theta - m(-1)}{\sigma^2(h_\theta)}. \tag{17}$$

Используя (9), получаем, что

$$(1 + h_\theta)\sqrt{n} \to +\infty \tag{18}$$

при $n \to \infty$. В свою очередь из (18) получаем, что

$$I_5 \le 2e^{-(1+h_\theta)\sqrt{n}} \tag{19}$$

при всех достаточно больших n.

Теперь оценим I_4:

$$I_4 = \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{a_n}^{\sqrt{n}} e^{-(1+h_\theta)y} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{\exp(-y)}{x}\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) =$$

$$= (1+\rho_n) \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{a_n}^{\sqrt{n}} e^{-(1+h_\theta)y} \frac{1}{x^2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right). \tag{20}$$

Оценим I_4 сверху:

$$I_4 \le (1+\rho_n) \sum_{\lfloor a_n \rfloor}^{\lceil \sqrt{n} \rceil} e^{-(1+h_\theta)i} \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in [i, i+1),\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) =$$

$$= (1+\rho_n) \mathbf{E} \widetilde{V}_\infty^{-2} \sum_{\lfloor a_n \rfloor}^{\lceil \sqrt{n} \rceil} e^{-(1+h_\theta)i} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in [i, i+1)\right), \tag{21}$$

где в последнем переходе мы вновь воспользовались леммой 1. Применим к правой части (21) теорему 1:

$$I_4 \le (1+\rho_n) \mathbf{E} \widetilde{V}_\infty^{-2} \sum_{\lfloor a_n \rfloor}^{\lceil \sqrt{n} \rceil} e^{-(1+h_\theta)i} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \exp\left(-\frac{i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) + \frac{\rho_n}{\sqrt{n}} \right). \tag{22}$$

Заметим, что

$$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2(h_\theta)}\right) \le \exp\left(-\frac{i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) \le 1,$$

$$e^{1+h_\theta} \exp\left(\frac{(i+1)^2 - i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) = 1 + \rho_n, \tag{23}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $i/n \to 0$ и $1+h_\theta \to 0$ при $n \to \infty$. Используя (23), из (22) получим, что

$$I_4 \le (1+\rho_n)\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\sum_{\lfloor a_n\rfloor}^{\lceil\sqrt{n}\rceil} e^{-(1+h_\theta)i}\exp\left(-\frac{i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) \le$$

$$\le (1+\rho_n)\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\sum_{\lfloor a_n\rfloor}^{\lceil\sqrt{n}\rceil} e^{-(1+h_\theta)(i+1)}\exp\left(-\frac{(i+1)^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right)\times$$

$$\times e^{1+h_\theta}\exp\left(\frac{(i+1)^2-i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) \le$$

$$\le (1+\rho_n)\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\int\limits_{a_n-1}^{\sqrt{n}+2} e^{-(1+h_\theta)y}\exp\left(\frac{-y^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right)\mathrm{d}y. \qquad (24)$$

Сделаем замену $u = (1+h_\theta)y$ в правой части (24):

$$I_4 \le (1+\rho_n)\frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\times$$

$$\times\int\limits_{(a_n-1)(1+h_\theta)}^{(\sqrt{n}+2)(1+h_\theta)} e^{-u}\exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right)\mathrm{d}u. \qquad (25)$$

Обозначим отрезок $[(a_n-1)(1+h_\theta);(\sqrt{n}+2)(1+h_\theta)]$ через D_n. Рассмотрим интеграл в правой части (25):

$$\int\limits_{(a_n-1)(1+h_\theta)}^{(\sqrt{n}+2)(1+h_\theta)} e^{-u}\exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right)\mathrm{d}u =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-u}\exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right)\mathrm{I}\left(u\in D_n\right)\mathrm{d}u = \mathbf{E}f_n(T), \qquad (26)$$

где T — стандартная экспоненциальная с.в. Согласно (18) отметим, что

$$a_n(1+h_\theta) = (1+\rho_n)\sqrt{\frac{1}{\theta_2(n)-m(-1)}}\frac{\theta-m(-1)}{\sigma^2(h_\theta)} \to 0$$

при $n \to \infty$. Также заметим, что $\sqrt{n}(1+h_\theta) \to \infty$ по условию леммы 2. Следовательно,

$$f_n(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right)\mathrm{I}\left(u\in D_n\right)$$

ограничена и поточечно сходится к 1 при всех $u \in (0;\infty)$ и $n \to \infty$. Откуда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости из (26) получаем,

что
$$\mathbf{E}f_n(T) = 1 + \rho_n. \tag{27}$$
Подставляя (27) в (25), получаем, что:
$$I_4 \le (1+\rho_n)\frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}. \tag{28}$$
Оценка снизу для I_4 получается с помощью рассуждений, аналогичных (21)-(28). Таким образом, получаем, что
$$I_4 = (1+\rho_n)\frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}. \tag{29}$$
Из (19), (15) и (14) получим, что
$$\begin{aligned} I_2 \le \frac{8}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}e^e = \rho_n\frac{1}{\sqrt{n}(1+h_\theta)}, \\ I_3 \le \rho_n\frac{1}{\sqrt{n}(1+h_\theta)}, \\ I_5 \le 4e^{-\sqrt{n}(1+h_\theta)} = \rho_n\frac{1}{\sqrt{n}(1+h_\theta)}, \end{aligned} \tag{30}$$
где во втором выражении мы воспользовались тем, что $a_n(1+h_\theta) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, из (30) и (29) следует, что
$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = (1+\rho_n)I_4. \tag{31}$$
Используя (31), (29) и (12), имеем
$$\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n > \theta n - 1\right) = \frac{1+\rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta}e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n}. \tag{32}$$
Из (11) получаем, что
$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n \le \theta n - 1\right) < \frac{2}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)(-h_\theta)}e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n}e^{h_\theta+1} = \\ = \rho_n\frac{1}{\sqrt{n}(1+h_\theta)}e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n} = \rho_n\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n > \theta n - 1\right). \end{aligned} \tag{33}$$
Следовательно, подставляя (33) и (32) в (10), имеем, что
$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \frac{1+\rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta}e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n}. \tag{34}$$
Лемма 2 доказана. □

Для доказательства теоремы нам необходимо показать, что соотношение
$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = (1+\rho_n)\,\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n}\exp\left(n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)/2\right) \times \\ \times\left(1 - \Phi\left(\sqrt{n}(1+h_\theta)\sigma(h_\theta)\right)\right) \end{aligned} \tag{35}$$

выполнено равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, где $\theta_1 \to m(-1)$ и $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Покажем, что выражения для $\mathbf{P}(Z_n = k)$, полученные в лемме 2 и соотношении (35), совпадают на общей области определения — то есть для $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, где θ_1 определяется соотношением (9), а $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Для этого достаточно доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \frac{1}{1+h_\theta} = (1+\rho_n) \exp\left(n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)/2\right) \times \\ \times \left(1 - \Phi\left(\sqrt{n}(1+h_\theta)\sigma(h_\theta)\right)\right) \qquad (36)$$

при $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$. Заметим, что при таких θ верно, что

$$\int_0^\infty e^{-u} \exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right) \mathrm{d}u = 1 + \rho_n. \qquad (37)$$

Преобразуем подынтегральную функцию в левой части (37):

$$e^{-u} \exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right) = \exp\left(-\frac{(u + n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta))^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right) \times \\ \times \exp\left(n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)/2\right). \qquad (38)$$

Подставляя (38) в (37), а (37) в (36), получаем, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \frac{1}{1+h_\theta} = (1+\rho_n) \exp\left(n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)/2\right) \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{2\pi n}(1+h_\theta)\sigma(h_\theta)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(u + n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta))^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right) \mathrm{d}u = \\ = (1+\rho_n) \exp\left(n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)/2\right) \times \\ \times \left(1 - \Phi\left(\sqrt{n}(1+h_\theta)\sigma(h_\theta)\right)\right) \qquad (39)$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$. Таким образом, мы показали, что представление $\mathbf{P}(Z_n = k)$ из (35) верно для $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, где θ_1 определяется соотношением (9), а $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$.

Для доказательства теоремы 2 осталось показать, что выражение для $\mathbf{P}(Z_n = k)$ из (35) совпадает с выражением $\mathbf{P}(Z_n = k)$, полученным в (8), на отрезке $[\theta_1; m(-1)+cn^{-1/2}]$, где $\theta_1 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Покажем, что из (39) следует, что

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = (1+\rho_n) R^n(-1) \mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - m(-1))}{\sigma(-1)}\right)\right), \qquad (40)$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1; m(-1) + cn^{-1/2}]$, где $\theta_1 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Напомним, что

$$\widehat{V}_\infty := \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-S_i^{(-1)}}.$$

Заметим, что при рассматриваемых в (40) $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$ верно, что

$$\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} = (1+\rho_n)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2},\ \sigma(h_\theta) = (1+\rho_n)\sigma(-1). \qquad (41)$$

Используя (41), (17) и (39), получаем, что при $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \left(1+\rho_n\right)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n} \exp\left(\frac{n(\theta - m(-1))^2}{2\sigma^2(-1)}\right) \times$$
$$\times \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - m(-1))}{\sigma(-1)}\right)\right) =$$
$$= \left(1+\rho_n\right) R^n(h_\theta)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - m(-1))}{\sigma(-1)}\right)\right) \times$$
$$\times e^{-(1+h_\theta)\theta n} \exp\left(\frac{n\sigma^2(-1)(1+h_\theta)^2}{2}\right). \qquad (42)$$

Из (3) и формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем, что

$$\ln R(-1) = \ln R(h_\theta) + (-1-h_\theta)\left(\ln R(h_\theta)\right)' + \frac{(-1-h_\theta)^2}{2}\left(\ln R(h_\zeta)\right)'' =$$
$$= \ln R(h_\theta) + (-1-h_\theta)\theta + \frac{(-1-h_\theta)^2}{2}\sigma^2(h_\zeta) =$$
$$= \ln R(h_\theta) - (1+h_\theta)\theta + (1+\rho_n)\frac{(1+h_\theta)^2}{2}\sigma^2(-1), \qquad (43)$$

где ζ лежит между θ и -1, а значит, $\zeta \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Таким образом, из (43) получаем, что

$$R^n(-1) = R^n(h_\theta)\exp\left(-(1+h_\theta)\theta n\right)\exp\left((1+\rho_n)\frac{n(1+h_\theta)^2\sigma^2(-1)}{2}\right) =$$
$$= (1+\rho_n)R^n(h_\theta)\exp\left(-(1+h_\theta)\theta n\right)\exp\left(\frac{n(1+h_\theta)^2\sigma^2(-1)}{2}\right), \qquad (44)$$

где в последнем переходе мы воспользовались тем, что

$$1 + h_\theta = (1+\rho_n)\frac{\theta - m(-1)}{\sigma^2(h_\theta)} \le \frac{2c}{\sqrt{n}\sigma^2(h_\theta)},$$

то есть $n(1+h_\theta)^2 \le C_2$ для всех n и некоторой константы $C_2 > 0$. Подставляя (44) в (42), получаем (40).

Из утверждения (40) следует, что выражения (35) и (8) совпадают на отрезке $[\theta_1; m(-1) + cn^{-1/2}]$, где $\theta_1 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Следовательно, они совпадают и на отрезке $[\theta_1; m(-1) + c(n)n^{-1/2}]$ для некоторой положительной последовательности $c(n)$, стремящейся к бесконечности, и $\theta_1 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Таким образом, соотношение (35) верно для всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, где $\theta_1 \to m(-1)$ и $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$.

Теорема 2 доказана.

5 Доказательство теоремы 3

Для доказательства воспользуемся теоремой 3 из [9]:

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \frac{1+\rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma\left(h_\theta\right)} e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n} \Gamma\left(1+h_\theta\right) \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta-1} \tag{45}$$

равномерно по $\theta \in [\theta_3; \theta_4] \subset (m(-1); \mu)$, где θ_3 и θ_4 фиксированы. Откуда, аналогично рассуждениям (8)-(9), получим, что утверждение (45) верно равномерно по $\theta \in [\widetilde{\theta}(n); \theta_4]$, где $\widetilde{\theta}(n)$ — некоторая последовательность, стремящаяся к $m(-1)$, пусть и с неизвестной скоростью.

Заметим, что результат, полученный в лемме 2, верен для всех $\theta_1 = m(-1) + c(n)/(2\sqrt{n})$ при любом $c(n)$, таком что $c(n) = o(\sqrt{n})$ и $c(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Таким образом, взяв $c(n) = 2\varepsilon_n$, из леммы 2 получим, что в условиях теоремы 2

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \frac{1+\rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta} e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n} \tag{46}$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, где $\theta_1 = m(-1) + n^{-1/2}\varepsilon_n$ для некоторой фиксированной положительной последовательности $\varepsilon_n = o(\sqrt{n})$, такой, что $\varepsilon_n \to \infty$ при $n \to \infty$, а $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Пусть

$$\theta_2 = \theta_2(n) = m(-1) + 2\left(\widetilde{\theta}(n) - m(-1)\right).$$

Отметим, что $\Gamma(x) = (1+o(1))/x$ при $x \to 0$. Кроме того, при $\theta \in [\widetilde{\theta}(n); \theta_2]$ выполнено соотношение $\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} = (1+\rho_n)\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta-1}$. Используя эти тождества, получим, что выражения для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$, полученные в (45) и (46), совпадают на общей области определения $[\widetilde{\theta}(n); \theta_2]$. Таким образом, их можно объединить в один результат.

Теорема 3 доказана.

Автор выражает признательность А. В. Шкляеву за постоянное внимание и полезные обсуждения, а также анонимному рецензенту за ценные замечания.

References

[1] M.V. Kozlov, *On large deviations of branching processes in a random environment: geometric distribution of descendants*, Discrete Math. Appl., **16**:2 (2006), 155–174. Zbl 1126.60089

[2] M.V. Kozlov, *On large deviations of strictly subcritical branching processes in a random environment with geometric distribution of progeny*, Theory Probab. Appl., **54**:3 (2010), 424–446. Zbl 1213.60162

[3] V. Bansaye, J. Berestycki, *Large deviations for branching processes in random environment*, Markov Process. Relat. Fields, **15**:4 (2009), 493–524. Zbl 1193.60098

[4] D. Buraczewski, P. Dyszewski, *Precise large deviation estimates for branching process in random environment*, arXiv: 1706.03874, 2017.

[5] A.V. Shklyaev, *Large deviations of branching process in a random environment. II*, Diskrete Math. Appl, **31**:6 (2021), 431–447. Zbl 1490.60063

[6] V. Bansaye, C. Böinghoff, *Lower large deviations for supercritical branching processes in random environment*, Proc. Steklov Inst. Math., **282**:1 (2013), 15–34. Zbl 1288.60106

[7] A.A. Borovkov, *Asymptotic analysis of random walks. Rapidly decreasing distributions of increments*, Fizmatlit, Moscow, 2013. Zbl 1351.60003

[8] A. Agresti, *On the extinction times of varying and random environment branching processes*, J. Appl. Probab., **12**:1 (1975), 39–46. Zbl 0306.60052

[9] K.Yu. Denisov, *Asymptotical local probabilities of lower deviations for branching process in random environment with geometric distributions of descendants*, Diskrete Math. Appl., **32**:5 (2022), 313–323. Zbl 1509.60083

[10] K.Yu. Denisov, *Local lower deviations of strictly supercritical branching process in random environment with geometric number of descendants*, Diskretnaya Matematika, **34**:4 (2022), 14–27.

Konstantin Yuryvich Denisov
Steklov Mathematical Institute of RAS,
Gubkin St., 8,
119991, Moscow, Russia
Email address: denisovkonstan@yandex.ru