S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 1, стр. 41–54 (2024) УДК 512.57
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.003 MSC 17D20, 17D25, 17A30

О КОНСТРУКЦИИ МИЦУХАРЫ ДЛЯ ЭНДОМОРФОВ

А.П. Пожидаев

Представлено В. Пржиялковским

Abstract: We consider Mizuhara's construction for the endomorphs. It is shown that this construction gives almost simple algebras, which are used to construct new examples of simple right-symmetric algebras. To investigate the Mizuhara extensions we give a description of the derivations of the endomorphs constructed on nonunital algebras, which generalizes a result obtained earlier in the unital case.я

Keywords: right-symmetric algebra, simple algebra, pre-Lie algebra, Mizuhara's construction, endomorph, derivation.

1 Конструкция Мицухары

Алгебра $\mathcal{A}$ называется *правосимметрической*, если ассоциатор $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$ на $\mathcal{A}$ является правосимметричным, т. е. он симметричен относительно двух последних элементов: $(x, y, z) = (x, z, y)$ для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$ (далее символ $:=$ означает равенство по определению). Аналогично определяются левосимметрические (прелиевы) алгебры, которые оказываются антиизоморфными правосимметрическим.

Pozhidaev, A.P., On Mizuhara's construction for Endomorphs.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

Поступила 6 октября 2023 г., опубликована 29 января 2024 г.

В работе [1] была введена конструкция одномерного расширения левосимметрической алгебры и построены различные примеры простых левосимметрических алгебр, в основном исходя из “вырожденных” алгебр. Случай, когда исходная алгебра является простой, остался в [1] неисследован. Изучение данного случая началось в работе [2], где рассматривалась конструкция Мицухары для матричной алгебры и алгебр Бурдэ. Также в [2] построены различные обобщения конструкции Мицухары и новые примеры простых прелиевых алгебр, полученных при помощи данной конструкции, в частности построен простой дубль Витта ассоциативной коммутативной унитальной алгебры. Из вышеуказанной работы видно, что конструкция Мицухары играет важную роль при построении и изучении простых прелиевых алгебр. В [4] было введено понятие эндоморфа произвольной неассоциативной алгебры, и, в частности, было показано, что эндоморфы право(лево)симметрических алгебр дают огромнейший класс простых право(лево)симметрических алгебр. В настоящей работе изучается конструкция Мицухары для эндоморфов произвольных неассоциативных алгебр.

Зафиксируем произвольное основное поле F. В дальнейшем, $\langle\Upsilon\rangle := \langle\Upsilon\rangle_F$ — линейная оболочка множества Υ над F, где символ F опускается, если поле ясно из контекста. Для данной алгебры $\mathcal{A}$ через L_a и R_a обозначаются операторы левого и правого умножения на элемент $a \in \mathcal{A}$, т. е. $L_a(b) = ab = R_b(a)$ для любого $b \in \mathcal{A}$. Всюду далее через e_{ij} обозначаются обычные матричные единицы, $E := 1$ — единичная матрица (или тождественное преобразование); δ_{ij} — символ Кронекера; $\mathrm{tr}(A)$ — след A; $(x, y, z)_{rs} := (x, y, z) - (x, z, y)$; $[x, y] := xy - yx$ — коммутатор элементов x, y. Если V — векторное пространство над F, то через V^* обозначается дуальное пространство к V, а через $\mathrm{End}\,(V)$ — алгебра всех F-линейных операторов на V, образ элемента $x \in V$ под действием $\phi \in \mathrm{End}\,(V)$ часто обозначается $\phi_x := \phi(x)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра над полем F. Следуя [3], симметрическую билинейную форму $H(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{A}$ со значениями в F будем называть *Гессианом*, если

$$H(xy, z) - H(x, yz) \quad = \quad H(xz, y) - H(x, zy) \tag{1}$$

для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$.

Приведём конструкцию Мицухары [1] расширения алгебры $\mathcal{A}$ при помощи 2-нильпотента или идемпотента, т. е. такого элемента u, что $u^2 = \varepsilon u$, где $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $u \notin \mathcal{A}$. Гессиан H и дифференцирование D на $\mathcal{A}$ назовём *ε-согласованными*, если

$$\varepsilon H(x, y) \quad = \quad H(D_x, y) + H(x, D_y) \tag{2}$$

для любых $x, y \in \mathcal{A}$ (при этом согласованные пары $(H, 0)$ и $(0, D)$ назовём *тривиальными*). Рассмотрим одномерное расширение $\mathcal{A}$ при помощи $\langle u\rangle$ и *ε-согласованной* пары (H, D), на котором произведение определяется правилами

$$\begin{aligned} u \cdot u &= \varepsilon u, \ u \cdot x = 0, \ x \cdot u = D_x, \\ x \cdot y &= xy + H(x,y)u \end{aligned} \tag{3}$$

для всех $x, y \in \mathcal{A}$. Обозначим полученную алгебру через $\mathcal{A}(H,D)$. Алгебру $\mathcal{A}(H,D)$ будем называть *ε-расширением Мицухары* алгебры $\mathcal{A}$. Как следует из [1], $\mathcal{A}(H,D)$ является правосимметрической алгеброй, если такова исходная алгебра.

Обозначим через $M^{\perp} := \{x \in \mathcal{A} : H(x,m) = 0$ для любого $m \in M\}$ *ортогональное дополнение* к множеству M в алгебре $\mathcal{A}$ относительно Гессиана H алгебры $\mathcal{A}$.

Лемма 1.1. [1] *Подпространство $I = Fu \oplus J$ является идеалом в $\mathcal{A}(H,D)$ тогда и только тогда, когда J — такой идеал в $\mathcal{A}$, что $D(\mathcal{A}) \subseteq J$. Подпространство J из $\mathcal{A}$ является идеалом в $\mathcal{A}(H,D)$ тогда и только тогда, когда J — такой идеал в $\mathcal{A}$, что $D(J) \subseteq J$ и $J \subseteq \mathcal{A}^{\perp}$.*

Данная лемма не даёт описание всех идеалов в $\mathcal{A}(H,D)$ при $\varepsilon = 0$. В этом случае возможны также “неоднородные” идеалы, описываемые леммой 1.2 ниже, для формулировки которой удобно ввести следующее определение. Пусть (H,D) — 0-согласованная пара на алгебре $\mathcal{A}$. Правый D-инвариантный идеал I алгебры $\mathcal{A}$ назовём (H,D)-*идеалом с компаньоном* $\alpha \in I^*$, если

$$xa + \alpha_a D_x \in I, \ \alpha(ax) = \alpha(xa + \alpha_a D_x) = H(a,x), \ \alpha(D_a) = 0 \tag{4}$$

для всех $a \in I, x \in \mathcal{A}$. Следующая лемма была доказана в [2] для левосимметрического случая; правосимметрический случай абсолютно аналогичен, однако, так как данная лемма имеет принципиальное значение для данной работы, то мы приведём её доказательство.

Лемма 1.2. *Пусть J — подпространство в 0-расширении Мицухары $\mathcal{A}(H,D)$ алгебры $\mathcal{A}$ такое, что $J \not\subseteq \mathcal{A}$, $u \notin J$. Тогда J является идеалом в $\mathcal{A}(H,D)$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{A}$ существует (H,D)-идеал I с компаньоном α такой, что*

$$J = \langle a + \alpha_a u : a \in I \rangle .$$

Доказательство. Пусть J — идеал в $\mathcal{A}(H,D)$, $J \not\subseteq \mathcal{A}$, $u \notin J$. Тогда $c + u \in J$ для некоторого ненулевого $c \in \mathcal{A}$. Пусть $I = \{x \in \mathcal{A} : x + \alpha_x u \in J$ для некоторого $\alpha_x \in F\}$. Заметим, что I — подпространство в $\mathcal{A}$ и α_x определён единственным образом для любого $x \in \mathcal{A}$. Таким образом, естественно определяется $\alpha \in I^*$. Если $a + \alpha_a u \in J$, то $(a + \alpha_a u) \cdot u = D_a \in J$, т. е. $D_I \subseteq I$, $\alpha(D_I) = 0$. Далее, обозначим $(a,x) := H(a,x)$, тогда

$$(a + \alpha_a u) \cdot x = ax + (a,x)u \in J, \quad x \cdot (a + \alpha_a u) = xa + (a,x)u + \alpha_a D_x \in J,$$

откуда

$$ax \in I, \ xa + \alpha_a D_x \in I, \ \alpha(ax) = \alpha(xa + \alpha_a D_x) = (a,x)$$

для любых $a \in I, x \in \mathcal{A}$.

Обратно, если I — D-инвариантный (H,D)-идеал в $\mathcal{A}$ с компаньоном α, то $J=\langle a+\alpha_a u : a\in I\rangle$ — идеал алгебры $\mathcal{A}(H,D)$. Действительно, $(a+\alpha_a u)\cdot u = D_a\in J$, $u\cdot(a+\alpha_a u)=0$, $(a+\alpha_a u)\cdot x = ax+(a,x)u\in J$, $x\cdot(a+\alpha_a u)=xa+(a,x)u+\alpha_a D_x\in J$, что и требовалось. $\square$

Зафиксируем $\varepsilon\in\{0,1\}$. Пусть $\mathcal{A}_i(H_i,D_i)$ — ε-расширения Мицухары алгебр $\mathcal{A}_i, i=1,2$. Рассмотрим прямую сумму $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1\oplus\mathcal{A}_2$ алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ (как идеалов). Обозначим через $\mathcal{D}$ (соответственно, H) дифференцирование (Гессиан) алгебры $\mathcal{A}$, определённые правилами:

$$\mathcal{D}_{|\mathcal{A}_i}=D_i,\ H_{|\mathcal{A}_i}=H_i,\ H(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2)=0,\ i=1,2.$$

Как следует из [1], $(H,\mathcal{D})$ является согласованной парой на $\mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}(H,D)$ называется прямым *расширением Мицухары* алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *разложимой*, если существуют нетривиальные алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ такие, что $\mathcal{A}$ является прямым расширением Мицухары алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. В противном случае $\mathcal{A}$ называется *неразложимой*. Важность ε-расширения Мицухары объясняет следующее

Предложение 1.1. [1] *Пусть $\mathcal{A}$ является прямым расширением Мицухары левосимметрических алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Если $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ просты, то и $\mathcal{A}$ является простой левосимметрической алгеброй.*

Алгебру $\mathcal{A}(H,D)$ назовём *почти простой*, если она либо проста, либо любой её собственный идеал не совпадает с $\mathcal{A}$, имеет коразмерность 1 и не содержит элемента u. Предложение 1.1 было усилено в [2] следующим образом.

Теорема 1.1. [2] *Пусть $\mathcal{A}_1(H_1,D_1)$ и $\mathcal{A}_2(H_2,D_2)$ — расширения Мицухары алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, и пусть $\mathcal{A}$ — прямое расширение Мицухары алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Алгебра $\mathcal{A}$ является простой тогда и только тогда, когда одна из алгебр $\mathcal{A}_1(H_1,D_1)$, $\mathcal{A}_2(H_2,D_2)$ проста, а другая почти проста.*

Если $\mathcal{A}$ — алгебра, то $\mathcal{A}^{(-)}:=\langle [x,y] : x,y\in\mathcal{A}\rangle$.

Лемма 1.3. *Пусть $\mathcal{A}$ — правосимметрическая алгебра с 1, $H:=(\,,)$ — Гессиан на $\mathcal{A}$, и $\mathcal{A}=\mathcal{A}^{(-)}\oplus\mathcal{B}$ для некоторого подпространства $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$. Тогда H полностью определяется своими значениями на 1 и базисе подпространства $\mathcal{B}$, при этом $\mathcal{A}^{(-)}\subseteq F^{\perp}$ и $(x,y)=(1,xy)$ для любых $x,y\in\mathcal{A}$.*

Доказательство. Полагая $x=1$ в (1), получаем $(1,yz)=(1,zy)$ для любых $y,z\in\mathcal{A}$. Полагая $y=1$ в (1), получаем $(xz,1)=(x,z)$ для любых $x,z\in\mathcal{A}$.

Обратно, пусть $\mathcal{A}=\mathcal{A}^{(-)}\oplus\mathcal{B}$ и $\{b_i : i\in I\}$ — базис $\mathcal{B}$. Определим $(1,b_i)=(b_i,1)=\beta_i\in F$ для всех $i\in I$, $(1,a)=(a,1)=0$ при $a\in\mathcal{A}^{(-)}$, и $(x,y)=(1,xy)$ для любых $x,y\in\mathcal{A}$. Тогда форма $(\,,)$ является Гессианом на $\mathcal{A}$. Действительно, $(\,,)$ симметрична на $\mathcal{A}$ и

$$(xy,z)-(x,yz)=(1,xy\cdot z-x\cdot yz)=(1,xz\cdot y)-(1,x\cdot zy)=(xz,y)-(x,zy)$$

для любых $x,y,z\in\mathcal{A}$, что следует из правосимметричности $\mathcal{A}$. $\square$

2 Дифференцирования эндоморфов неунитальных алгебр

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра над полем F. Рассмотрим прямую сумму (как векторных пространств) алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$: $E(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \oplus \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Наделим $E(\mathcal{A})$ произведением по правилу

$$A \cdot a \quad = \quad aA + [A, R_a] \tag{5}$$

для всех $a \in \mathcal{A},\ A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, где по определению $\mathcal{A}$ и $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ являются подалгебрами в $E(\mathcal{A})$, а $\mathcal{A}$ — это стандартный правый модуль над $\mathrm{End}\,(\mathcal{A}) : a \cdot A = aA$. Построенная алгебра называется *эндоморфом* алгебры $\mathcal{A}$ [4].

В [4] было доказано, что эндоморф правосимметрической алгебры является правосимметрической алгеброй и были описаны дифференцирования алгебры $E(\mathcal{A})$ в случае, когда алгебра $\mathcal{A}$ унитальна. В следующей теореме мы снимаем ограничение на унитальность алгебры.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}^\sharp$, полученную из $\mathcal{A}$ присоединением единицы 1. Очевидно, любое дифференцирование на $\mathcal{A}^\sharp$ имеет вид $D + \mu$, где $D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, $\mu \in \mathcal{A}^*$, продолженные на $\mathcal{A}^\sharp$ правилом $(D + \mu)(1) = 0$. Легко заметить, что при этом $\mu(\mathcal{A}^2) = 0$ и

$$(ab)D \quad = \quad aD \cdot b + a \cdot bD + \mu_a b + \mu_b a \tag{6}$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}^2 := \langle \sum_{i=1}^n x_i y_i : x_i y_i \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \rangle$ — *квадрат* алгебры $\mathcal{A}$.

Определим *индуцированное* дифференцирование $\mathcal{D}$ эндоморфа $E(\mathcal{A})$ правилом $a\mathcal{D} = aD + a^D$, $A\mathcal{D} = [A, D]$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, при этом действие a^D определяется единственным образом из соотношения $xa^D = \mu_x a$. Будем говорить, что дифференцирование $\mathcal{D}$ *индуцируется* дифференцированием $D + \mu$ алгебры $\mathcal{A}^\sharp$. Как легко проверить, в этом случае $(xA)^D = x^D A$ для любых $x \in \mathcal{A}$, $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Далее также будем использовать более удобное обозначение $I_\mu^a := a^D$ для данного отображения и будем обозначать через I_μ отображение из $\mathcal{A}$ в $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ такое, что $I_\mu(a) = I_\mu^a$. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{D}$ является дифференцированием алгебры $E(\mathcal{A})$, а именно, это будет сделано в следующей теореме.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра над полем F. Отображение $\mathcal{D}$ является дифференцированием $E(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}$ индуцируется дифференцированием алгебры $\mathcal{A}^\sharp$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}$ — дифференцирование алгебры $E(\mathcal{A})$. Обозначим $a\mathcal{D} := a_\mathcal{D} + a^\mathcal{D}$, где $a \in E(\mathcal{A}),\ a_\mathcal{D} \in \mathcal{A},\ a^\mathcal{D} \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Докажем, что $A_\mathcal{D} = 0$ для всех $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Для всех $A, B \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ имеем

$$(AB)\mathcal{D} \quad = \quad (A_\mathcal{D} + A^\mathcal{D})B + A(B_\mathcal{D} + B^\mathcal{D}), \tag{7}$$

$$(AB)_\mathcal{D} \quad = \quad A_\mathcal{D} B + B_\mathcal{D} A. \tag{8}$$

Из (8) следует, что $[A,B]_{\mathcal{D}} = 0$ для любых $A,B \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Так как $\mathrm{End}\,(\mathcal{A}) = [\mathrm{End}\,(\mathcal{A}), \mathrm{End}\,(\mathcal{A})] + \langle E\rangle$, а $E\mathcal{D} = 0$ по (7)–(8), то $A_{\mathcal{D}} = 0$ для всех $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Значит, $\mathcal{D}$ действует инвариантно на $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ и его ограничение D на $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ является дифференцированием $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ по (7). Следовательно, D является внутренним (см., например, [5]) и мы также обозначим через D отображение из $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, для которого $A^{\mathcal{D}} = [A,D]$.

Если $\dim \mathcal{A} = 1$, то либо $\mathcal{A} \cong F$, либо $\mathcal{A}^2 = 0$. По доказанному выше $A_{\mathcal{D}} = 0$ и $A^{\mathcal{D}} = 0$ для любой $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, поэтому $(a+A)\mathcal{D} = aD + I^a_\mu$ для любых $a \in \mathcal{A}, A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ и некоторых $D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}), \mu \in \mathcal{A}^*$, и непосредственная проверка показывает справедливость теоремы в данном случае.

Далее, пусть $x \in \mathcal{A}$ произвольный, а $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ выберем так, что $\mathrm{Ker}\,(A) = \langle x\rangle$. Тогда $0 = (xA)_{\mathcal{D}} = x_{\mathcal{D}}A + x[A,D]$, откуда $x_{\mathcal{D}}A = xDA$ и $x_{\mathcal{D}} = xD + \alpha_x x$ для некоторого $\alpha \in \mathcal{A}^*$. Аналогично, для любого $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ имеем $(xA)_{\mathcal{D}} = (xD + \alpha_x x)A + x[A,D] = xAD + \alpha_{xA}xA$, откуда $\alpha_{xA}xA = \alpha_x xA$ и $\alpha_x = \alpha$ для некоторого $\alpha \in F$ и любого $x \in \mathcal{A}$. Тогда $x_{\mathcal{D}} = x(D + \alpha E)$. Рассматривая вместо D отображение $D + \alpha E$, можно изначально считать, что $x_{\mathcal{D}} = xD$.

Из равенств

$$\begin{aligned}(xA)\mathcal{D} &= (xD + x^{\mathcal{D}})A + x[A,D] = xAD + x^{\mathcal{D}}A,\\ (xA)\mathcal{D} &= (xA)_{\mathcal{D}} + (xA)^{\mathcal{D}} = xAD + (xA)^{\mathcal{D}},\end{aligned}$$

получаем $(xA)^{\mathcal{D}} = x^{\mathcal{D}}A$. Из равенств

$$\begin{aligned}(Ax)\mathcal{D} &= [A,D]x + A(xD + x^{\mathcal{D}}) = x[A,D] + [[A,D],R_x] + xDA +\\ &+ [A, R_{xD}] + Ax^{\mathcal{D}},\\ (Ax)\mathcal{D} &= (xA + [A,R_x])\mathcal{D} = xAD + x^{\mathcal{D}}A + [[A,R_x],D]\end{aligned}$$

следует $[A,[D,R_x] + R_{xD} + x^{\mathcal{D}}] = 0$, откуда $[D,R_x] + R_{xD} + x^{\mathcal{D}} + \mu_x E = 0$ для некоторого $\mu \in \mathcal{A}^*$. Действуя последним равенством на произвольный $y \in \mathcal{A}$, выводим

$$yD \cdot x - (yx)D + y \cdot xD + yx^{\mathcal{D}} + \mu_x y = 0. \tag{9}$$

Далее,

$$\begin{aligned}(yx)\mathcal{D} &= (yD + y^{\mathcal{D}})x + y(xD + x^{\mathcal{D}}) = yD\cdot x + xy^{\mathcal{D}} + [y^{\mathcal{D}}, R_x] +\\ &+ y\cdot xD + yx^{\mathcal{D}},\\ (yx)\mathcal{D} &= (yx)D + (yR_x)^{\mathcal{D}} = (yx)D + y^{\mathcal{D}}R_x,\end{aligned}$$

откуда $R_x y^{\mathcal{D}} = 0$ и $(yx)D = yD\cdot x + y\cdot xD + xy^{\mathcal{D}} + yx^{\mathcal{D}}$. Принимая во внимание (9), получаем $xy^{\mathcal{D}} = \mu_x y$ для любых $x,y \in \mathcal{A}$. Соотношение $R_x y^{\mathcal{D}} = 0$ даёт $\mu_x = 0$ для любого $x \in \mathcal{A}^2$. Продолжим D и μ на $\mathcal{A}^\sharp$ так, что $(D+\mu)(1) = 0$. Тогда полученное соотношение на D говорит о том, что отображение $D + \mu$ является дифференцированием на $\mathcal{A}^\sharp$.

Обратно, пусть отображение $\mathcal{D} \in \mathrm{End}\,(E(\mathcal{A}))$ индуцируется дифференцированием $D+\mu$ алгебры $\mathcal{A}^\sharp$. Заметим, что (6) и равенство $\mu(A^2)=0$ влекут следующие операторные равенства на $\mathcal{A}$:

$$[R_x, D] \;=\; R_{xD} + I_\mu^x + \mu_x E, \quad R_x I_\mu^y = 0 \tag{10}$$

для любых $x, y \in \mathcal{A}$. Имеем

$$\begin{aligned}
(a+A)(b+B)\mathcal{D} &= (ab + aB + bA + [A, R_b] + AB)\mathcal{D} = \\
&= abD + aBD + bAD + I_\mu^{ab+aB+bA} + \\
&+ [[A, R_b], D] + [AB, D]; \\
(a+A)\mathcal{D}\cdot(b+B) &= (aD + I_\mu^a + [A, D])\cdot(b+B) = aD\cdot b + aDB + \\
&+ bI_\mu^a + [I_\mu^a, R_b] + I_\mu^a B + b[A, D] + [[A, D], R_b] + \\
&+ [A, D]B; \\
(a+A)\cdot(b+B)\mathcal{D} &= (a+A)\cdot(bD + I_\mu^b + [B, D]) = a\cdot bD + a[B, D] + \\
&+ aI_\mu^b + bDA + [A, R_{bD}] + AI_\mu^b + A[B, D].
\end{aligned}$$

Используя (6), (10) и тождество Якоби, получаем следующее условие, при котором $\mathcal{D}$ является дифференцированием:

$$I_\mu^{ab+aB+bA} \;=\; I_\mu^a R_b + I_\mu^a B + I_\mu^b A.$$

Очевидно, что последнее равенство выполняется всегда, что и доказывает теорему. □

3 О конструкции Мицухары для эндоморфов

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра. Предположим, что существует $\lambda \in \mathcal{A}^*$ такой, что $ab = \lambda_b a$ (или $ab = \lambda_a b$) для всех $a, b \in \mathcal{A}$. В этом случае обозначаем $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}_\lambda$ и говорим, что $\mathcal{A}_\lambda$ — это *алгебра скалярного умножения*.

В [4] было показано, что эндоморф правосимметрической алгебры $\mathcal{A}$ является простой алгеброй, если $\mathcal{A}$ не является алгеброй скалярного умножения. Рассмотрим расширения Мицухары для алгебр $E(\mathcal{A}_\lambda)$. При этом рассмотрим отдельно самый вырожденный случай алгебр с нулевым умножением $\mathcal{A}_0$, когда $\lambda = 0$, в частности, из-за того, что результаты в этом случае отличаются от результатов случая алгебры ненулевого умножения. Отметим, что алгебра $E(\mathcal{A}_0)$ имеет следующее умножение:

$$a\cdot b = 0, a\cdot A = A\cdot a = aA, A\cdot B = AB$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}, A, B \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$; при этом алгебра $E(\mathcal{A}_0)$ неассоциативна: $(A, B, a) = a[A, B] \neq 0$ в общем случае.

Далее обозначаем через $\mathrm{End}_0(\mathcal{A})$ подалгебру Ли всех линейных преобразований в $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ со следом 0.

Легко видеть, что $E(\mathcal{A}_0)$ имеет единственный собственный идеал, совпадающий с $\mathcal{A}_0$. Действительно, пусть J — идеал отличный от $\mathcal{A}_0$. Если $0 \neq A \in \mathrm{End}(\mathcal{A}_0) \cap J$, то $\mathrm{End}(\mathcal{A}_0) \subseteq J$, а потому $J = E(\mathcal{A}_0)$. Значит, если

$K = \langle A \in \mathrm{End}(\mathcal{A}_0) : a + A \in J$ для некоторого $a \in \mathcal{A}_0\rangle$, то K — ненулевой двухсторонний идеал в $\mathrm{End}(\mathcal{A}_0)$, откуда вновь получаем $J = E(\mathcal{A}_0)$.

Из теоремы 2.1 легко получается, что любое дифференцирование алгебры $E(\mathcal{A}_0)$ над полем характеристики не 2 имеет вид $\mathcal{D} = D + [\,\cdot, D]$ для некоторого $D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}_0)$: в этом случае получаем соотношение $a\mu_b + b\mu_a = 0$, откуда $\mu = 0$. Идеал $\mathcal{A}_0$ инвариантен относительно любого дифференцирования алгебры $\mathcal{A}_0$ и он даёт идеал в $E(\mathcal{A}_0)(H, \mathcal{D})$, если $\mathcal{A}_0 \subseteq F^\perp$. Если $D \in \langle E\rangle$, то $\langle u\rangle \oplus \mathcal{A}_0$ — идеал в $E(\mathcal{A}_0)(H, \mathcal{D})$. Поэтому далее считаем, что $\mathcal{A}_0 \not\subseteq F^\perp$ и $D \notin \langle E\rangle$. Так как любая матрица C сравнима по модулю коммутатора с $\mathrm{tr}(C)\Gamma$ для некоторой фиксированной матрицы Γ, то по лемме 1.3 любой Гессиан H на $E(\mathcal{A}_0)$ задаётся условиями

$$H(E, a) = \alpha_a,\ H(A, B) = \gamma \mathrm{tr}(AB)$$

для некоторых фиксированных $\alpha \in \mathcal{A}_0^*, \gamma \in F$ и для всех $a \in \mathcal{A}_0, A, B \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}_0)$.

Описание нетривиальных согласованных пар на эндоморфах даёт следующая

Лемма 3.1. *Пусть $(H, \mathcal{D})$ — нетривиальная ε-согласованная пара на $E(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра над полем F. Тогда* $\mathrm{Im}\,(\mathcal{D} - \varepsilon E) \subseteq F^\perp$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\varepsilon = 1$. Заметим, что (2) можно переписать в следующем виде $H(xy(E - \mathcal{D}), 1) = 0$ для любых $x, y \in E(\mathcal{A})$, так как любой эндоморф является унитальной алгеброй. Так как $E(\mathcal{A})^2 = E(\mathcal{A})$, то $\mathrm{Im}\,(\mathcal{D} - E) \subseteq F^\perp$. При $\varepsilon = 0$ соотношение (2) записывается в виде $H(xy(\mathcal{D}), 1) = 0$, откуда $\mathrm{Im}\,(\mathcal{D}) \subseteq F^\perp$. □

Теорема 3.1. *0-Расширение Мицухары $E(\mathcal{A}_0)(H, \mathcal{D})$ над полем характеристики не 2 является простой алгеброй тогда и только тогда, когда $D(\mathcal{A}_0) \subseteq F^\perp$ и $H(\mathcal{A}_0, E(\mathcal{A}_0)) \neq 0$.*

Доказательство. По лемме 1.1 для доказательства простоты 0-расширения Мицухары алгебры $E(\mathcal{A}_0)$ достаточно проверить отсутствие $(H, \mathcal{D})$-идеалов в $E(\mathcal{A}_0)$. Пусть I — $(H, \mathcal{D})$-идеал в $E(\mathcal{A}_0)$. Легко видеть, что любой правый идеал в $E(\mathcal{A}_0)$ имеет вид $\mathcal{A}_0 \oplus J$ для некоторого правого идеала J в $\mathrm{End}\,(\mathcal{A}_0)$. Пусть $\mathcal{D} = D + [\,\cdot, D]$ для некоторого $D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}_0), D \notin \langle E\rangle$. Условие $xa + \alpha_a \mathcal{D}_x \in I$ для всех $a \in I, x \in E(\mathcal{A}_0)$ даёт

$$aA + \alpha_a[A, D] \in I \tag{11}$$

при $x = A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}_0)$ и $a \in \mathcal{A}_0$ таком, что $\alpha_a \neq 0$ (заметим, что $\alpha_a = H(a, 1)$ для любого $a \in I$). Пусть $K := \langle A \in \mathrm{End}(\mathcal{A}_0) : a + A \in I$ для некоторого $a \in \mathcal{A}_0\rangle$. Так как $D \notin \langle E\rangle$ и $H(\mathcal{A}_0, E(\mathcal{A}_0)) \neq 0$, то из (11) следует, что K — это ненулевой двухсторонний идеал в $\mathrm{End}(\mathcal{A}_0)$. Таким образом, $K = \mathrm{End}(\mathcal{A}_0)$. В итоге, $I = E(\mathcal{A}_0)$. □

В частности, если $0 \neq D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}_0)$ не является обратимым, то на $E(\mathcal{A}_0)$ определяется Гессиан H так, что пара $(H, \mathcal{D}), \mathcal{D} := D + [\,\cdot, D]$, является 0-согласованной. Действительно, достаточно записать $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B} \oplus D(\mathcal{A}_0)$ и определить $H(E, \mathcal{B})$ ненулевым. Таким образом, справедливо

Следствие 3.1. *Если D — ненулевое вырожденное отображение на $\mathcal{A}_0$, то существует Гессиан H на $E(\mathcal{A}_0)$ такой, что 0-расширение Мицухары $E(\mathcal{A}_0)(H, \mathcal{D})$ является простой алгеброй, где $\mathcal{D} := D + [\,\cdot, D]$.*

Комбинируя леммы 1.1 и 3.1, получаем, что справедлива

Теорема 3.2. *Пусть $(H, \mathcal{D})$ — нетривиальная 1-согласованная пара на $E(\mathcal{A}_0)$. Тогда 1-расширение Мицухары алгебры $E(\mathcal{A}_0)$ является простой правосимметрической алгеброй.*

Доказательство. Достаточно заметить, что из условия нетривиальности и 1-согласованности пары $(H, \mathcal{D})$ следует $\mathrm{Im}\,(\mathcal{D} - E) \subseteq F^{\perp}$ и $H(\mathcal{A}_0, E(\mathcal{A}_0)) \neq 0$. В частности, $D \notin \langle E \rangle$, $\mathcal{A}_0 \not\subseteq F^{\perp}$ и $H(A, B) = 0$ для любых $A, B \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}_0)$. Так как единственный собственный идеал в $E(\mathcal{A}_0)$ — это $\mathcal{A}_0$, то 1-расширение Мицухары алгебры $E(\mathcal{A}_0)$ по лемме 1.1 является простой правосимметрической алгеброй, поскольку $\mathcal{D}(E(\mathcal{A}_0)) \not\subseteq \mathcal{A}_0$ и $H(\mathcal{A}_0, E(\mathcal{A}_0)) \neq 0$. □

Далее рассматриваем только конечномерные алгебры скалярного умножения $\mathcal{A}_\lambda$, а также считаем, что $\lambda \neq 0$ и $\dim(\mathcal{A}_\lambda) := n > 1$, так как иначе $\mathrm{Der}\,(\mathcal{A}_\lambda) = 0$. Также предполагаем, что умножение в $\mathcal{A}_\lambda$ задаётся правилом $xy = \lambda_y x, \lambda \in \mathcal{A}_\lambda^*$.

Пусть $\mathrm{Ann}\,_r(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A} : \mathcal{A}x = 0\}$ — правый аннулятор алгебры $\mathcal{A}$.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathcal{A} := (\mathcal{A}_\lambda; \cdot)$ — алгебра со скалярным ненулевым умножением. Отображение $\mathcal{D}$ является дифференцированием $\mathcal{A}^\sharp$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Ann}\,_r(\mathcal{A})$, $\mathcal{D}(1) = 0$.*

Доказательство. Заметим, что $x \in \mathrm{Ann}\,_r(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \lambda_x = 0$. Как в § 2 имеем $\mathcal{D} = D + \mu$, где $D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, $\mu \in \mathcal{A}^*$. Для любых $x, y \in \mathcal{A}$ по (6) справедливо

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \in \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}^\sharp) \quad &\Leftrightarrow \quad (x \cdot y)\mathcal{D} = x\mathcal{D} \cdot y + x \cdot y\mathcal{D} + \mu_y x + \mu_x y \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_y x\mathcal{D} = \lambda_y x\mathcal{D} + \lambda_{y\mathcal{D}} x + \mu_y x + \mu_x y \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_{y\mathcal{D}} x + \mu_y x + \mu_x y = 0 \Leftrightarrow \mu = 0,\ y\mathcal{D} \in \mathrm{Ann}\,_r(\mathcal{A}), \end{aligned}$$

что и доказывает лемму. □

Легко видеть, что в любой алгебре $\mathcal{A} := \mathcal{A}_\lambda$ размерности $n \in \mathbb{N}$ можно выбрать *стандартный базис* $e_1, \ldots, e_n$ так, что все ненулевые произведения являются следующими $e_i e_n = e_i, i = 1, \ldots, n$. Действительно, так как $\lambda \in \mathcal{A}^*$, то можно положить $\mathrm{Ker}\,\lambda = \langle e_i : i = 1, \ldots, n-1 \rangle$ и выбрать e_n так, что $\lambda(e_n) = 1$. Любой Гессиан на $E(\mathcal{A})$ задаётся условиями $H(e_n, E) = \alpha, H(e_i, E) = 0, H(A, B) = \beta\mathrm{tr}(AB)$ для некоторых $\alpha, \beta \in F$ и для любого $i \neq n$. Поэтому далее считаем $\alpha \neq 0$, так как иначе $\mathcal{A}$ будет идеалом в $E(\mathcal{A})(H, \mathcal{D})$. По лемме 3.2 $\mathcal{D} = D + [\,\cdot, D]$ для некоторого

$D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}, \mathrm{Ann}\,_r(\mathcal{A}))$. Теперь легко видеть, что $H(x\mathcal{D}, y) + H(x, y\mathcal{D}) = 0$ для любых $x, y \in E(\mathcal{A})$.

Покажем, что любой ненулевой $(H, \mathcal{D})$-идеал I, для нетривиальной согласованной пары $(H, \mathcal{D})$, совпадает с $E(\mathcal{A})$. Пусть $0 \neq x = a + B_0 \in I, 0 \neq a \in \mathcal{A}, B_0 \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Домножая x справа на e_{ji} можно получить, что $e_i + B_i \in I$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и некоторых $B_i \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Если $B_0 \in I$, то, домножая B_0 справа на e_i, $i = 1, \ldots, n$, приходим к случаю выше. Таким образом, $I = \mathcal{A} + J$ для некоторого правого идеала $J \subseteq \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Покажем, что $\mathcal{A} \subseteq I$. Легко видеть, что если $e_n + A \in I$ при $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, то можно считать $A = -e_{nn}$ (рассматривая $(e_n + A)e_j \in I$ при $j = 1, \ldots, n-1$). Но тогда $(e_n - e_{nn})e_{ni} = e_i - e_{ni} \in I$ для любого i, и из (4) получаем $e_n(e_i - e_{ni}) = -e_i \in I$, так как $\alpha_{e_i - e_{ni}} = 0$, т. е. $\mathcal{A} \subseteq I$. Таким образом, $I = \mathcal{A} \oplus J$. Используя (4) при произвольном $x = B \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ и $a \in \mathcal{A}$ таком, что $\alpha_a \neq 0$, получаем $Ba + \alpha_a[B, D] \in I$, т. е. $[\mathrm{End}\,(\mathcal{A}), D] \subseteq I$. Снова применяя (4) при произвольных $x = B \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ и $a = y + A \in I, y \in \mathcal{A}, A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, выводим, что J — это левый идеал в $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, откуда $I = E(\mathcal{A})$. Таким образом, справедлива

Теорема 3.3. *0-Расширение Мицухары алгебры $E(\mathcal{A}_\lambda)$ является простой алгеброй тогда и только тогда, когда $H(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_\lambda) \neq 0$ и $\mathcal{D} = D + [\,\cdot, D]$ для некоторого ненулевого $D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}_\lambda, \mathrm{Ann}\,_r(\mathcal{A}_\lambda))$.*

Лемма 3.3. *В любом 1-расширении Мицухары алгебры $E(\mathcal{A}_\lambda)$ подалгебра $\mathcal{A}_\lambda$ является идеалом.*

Доказательство. Пусть $(H, \mathcal{D})$ — 1-согласованная пара на $U := E(\mathcal{A}_\lambda)$ и $\mathcal{D} = D + [\,\cdot, D]$ для некоторого $D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}_\lambda, \mathrm{Ann}\,_r(\mathcal{A}_\lambda))$. Покажем тривиальность H, что, совместно с леммой 1.1, и докажет лемму. По лемме 3.1 $\mathrm{Im}\,(\mathcal{D} - E) \subseteq F^\perp$. Так как $\mathrm{Im}\,(D) \subseteq F^\perp$, то $E(\mathcal{A}_\lambda) \subseteq F^\perp$ и $H = 0$. □

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное векторное пространство над полем F, $\mathcal{B}$ — подпространство в $\mathcal{A}$ коразмерности 1 и $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B}, a \rangle$ для некоторого $a \in \mathcal{A}$. Возьмём $D \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\alpha \in F$, и определим на $\mathcal{A}$ произведение правилом

$$x \cdot a \;=\; \alpha x - xD, \quad x \cdot y = 0$$

для всех $x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{B}$. Обозначим полученную алгебру через $\mathcal{B}_{\alpha,D}$ и назовём *одномерным расширением абелевой алгебры* при помощи дифференцирования.

Лемма 3.4. *Алгебра $\mathcal{B}_{\alpha,D}$ является правосимметрической, при этом $D \in \mathrm{Der}\,(\mathcal{B}_{\alpha,D})$.*

Доказательство. Пусть $X = x + \delta a, Y = y + \beta a, Z = z + \gamma a$ — произвольные элементы из $\mathcal{B}_{\alpha,D}$, где $x, y, x \in \mathcal{B}, \delta, \beta, \gamma \in F$. Покажем, что

$(X,Y,Z)_{rs}=0$. Имеем

$$\begin{aligned}
(XY)Z &= (\beta(\alpha x-D_x)+\beta\delta(\alpha a-D_a))(z+\gamma a)=\\
&= \alpha\beta\gamma(\alpha x-D_x)-\beta\gamma(\alpha D_x-xD^2)+\alpha\beta\gamma\delta(\alpha a-D_a)-\\
&- \beta\gamma\delta(\alpha D_a-aD^2);\\
X(YZ) &= (x+\delta a)(\gamma(\alpha y-D_y)+\beta\gamma(\alpha a-D_a))=\alpha\beta\gamma(\alpha x-D_x)+\\
&+ \alpha\beta\gamma\delta(\alpha a-D_a);\\
(X,Y,Z) &= \beta\gamma(xD^2-\alpha D_x)+\beta\gamma(\delta aD^2-\alpha\delta D_a),
\end{aligned}$$

откуда получаем $(X,Y,Z)_{rs}=0$.

Проверим включение $D\in \mathrm{Der}\,(\mathcal{B}_{\alpha,D})$. Имеем

$$\begin{aligned}
(X\cdot Y)D &= \beta(\alpha D_x-xD^2)+\beta\delta(\alpha D_a-aD^2),\ X\cdot YD=0,\\
XD\cdot Y &= (D_x+\delta D_a)(y+\beta a)=\beta(\alpha D_x-xD^2)+\beta\delta(\alpha D_a-aD^2),
\end{aligned}$$

что и доказывает лемму. □

Пусть $(H,\mathcal{D})$ — нетривиальная 0-согласованная пара на эндоморфе $E(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — алгебра над полем F, $\mathcal{D}=D+[\,\cdot,D]+I_\mu$, $D\in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}),\mu\in\mathcal{A}^*$. Предположим, что существует невырожденный гомоморфизм правых $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$-модулей $\phi:\mathcal{A}\mapsto \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ такой, что $I_\mu^a=Da^\phi,\ R_a+a^\phi+\alpha_aD=\gamma\alpha_aE$, $\alpha_aI_\mu^b=\gamma\alpha_ab^\phi$ для любых $a,b\in\mathcal{A}$ и для некоторого ненулевого $\gamma\in F$, где $\alpha_a=H(a+a^\phi,1)$, $\alpha(aD)=0$ для всех $a\in\mathcal{A}$. В этом случае $\mathcal{A}$ назовём *модульной алгеброй пары* $(H,\mathcal{D})$.

Лемма 3.5. *Пусть $(H,\mathcal{D})$ — нетривиальная 0-согласованная пара на $E(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — алгебра над полем F, $\mathcal{D}=D+[\,\cdot,D]+I_\mu$, $D\in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}),\mu\in\mathcal{A}^*$.*

1. *Если $J=\langle x+H(x,1)u:x\in\mathcal{A}\rangle$ является идеалом алгебры $E(\mathcal{A})(H,\mathcal{D})$, то либо $\mathcal{A}$ — это алгебра скалярного умножения, либо $\mathcal{A}$ — одномерное расширение абелевой алгебры при помощи дифференцирования.*

2. *Если $K=\left\langle x+x^\phi+\alpha_xu:x\in\mathcal{A}\right\rangle$ является идеалом алгебры $E(\mathcal{A})(H,\mathcal{D})$ для некоторого ненулевого линейного отображения $\phi:\mathcal{A}\mapsto \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ и некоторого $\alpha\in\mathcal{A}^*$, то $\mathcal{A}$ — это модульная алгебра пары $(H,\mathcal{D})$.*

Доказательство. 1. Для любого $A\in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ имеем

$$A\cdot(x+H(x,1)u)=xA+[A,R_x]+H(A,x)u+H(x,1)[A,D]\in J,$$

откуда $[A,R_x+H(x,1)D]=0$ для любого $x\in\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}\subseteq F^\perp$, то $\mathcal{A}$ — алгебра скалярного умножения. Пусть $\mathcal{A}\nsubseteq F^\perp$. Представим $\mathcal{A}$ в виде $\mathcal{A}=\mathcal{B}\oplus\langle a\rangle$, где $H(a,1)=1,H(b,1)=0$ для любого $b\in\mathcal{B}$. Тогда $[A,R_b]=0$ для любых $b\in\mathcal{B}$ и $A\in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, т. е. $R_b=\gamma_bE$ для некоторого $\gamma\in\mathcal{B}^*$. Имеем $R_a+D=\alpha E$ для некоторого $\alpha\in F$. Так как $a+u\in J$, то $(a+u)\cdot u\in J$, откуда $aD\in\mathcal{B}$ и $I_\mu^a=0$. Если $x\in\mathcal{B}$, то $x\in J$ и $x\cdot u=x\mathcal{D}=xD+I_\mu^x\in J$, откуда $I_\mu=0,\mathcal{B}D\subseteq\mathcal{B}$. Так как $xa=\alpha x-xD$

для любого $x \in \mathcal{B}$, то $xa \in \mathcal{B}$. Тогда

$$0 = H(xa, 1) = H(x, a) = H(a, x) = H(ax, 1) = \gamma(x)$$

для любого $x \in \mathcal{B}$, т. е. $\gamma = 0$. Таким образом, получили, что $\mathcal{A}$ — одномерное расширение абелевой алгебры при помощи дифференцирования.

2. Пусть $K = \langle a + a^{\phi} + \alpha_a u : a \in \mathcal{A} \rangle$, $\phi : \mathcal{A} \mapsto \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, $\alpha \in \mathcal{A}^*$. Тогда

$$(a + a^{\phi} + \alpha_a u) \cdot A = aA + a^{\phi} A + H(a + a^{\phi}, A)u \in K$$

для любых $a \in \mathcal{A}$, $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, откуда $\alpha_a = H(a + a^{\phi}, 1)$, $(aA)^{\phi} = a^{\phi} A$. Таким образом, ϕ — это гомоморфизм правых $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$-модулей. Так как $\phi \neq 0$, то ϕ, как легко видеть, является невырожденным. С другой стороны,

$$A \cdot (a + a^{\phi} + \alpha_a u) = aA + [A, R_a] + Aa^{\phi} + H(a + a^{\phi}, A)u +$$
$$+ \alpha_a [A, D] \in K$$

для любых $a \in \mathcal{A}$, $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, откуда $R_a + a^{\phi} + \alpha_a D = \beta_a E$ для некоторого $\beta \in \mathcal{A}^*$. Также имеем $(a + a^{\phi} + \alpha_a u) \cdot u = aD + I^a_{\mu} + [a^{\phi}, D] \in K$, откуда $\alpha(aD) = 0$, $(aD)^{\phi} = I^a_{\mu} + [a^{\phi}, D]$ и $I^a_{\mu} = Da^{\phi}$. Более того,

$$(a + a^{\phi} + \alpha_a u) \cdot b = ab + a^{\phi} b + H(a + a^{\phi}, b)u = ab + ba^{\phi} + [a^{\phi}, R_b] +$$
$$+ H(a + a^{\phi}, b)u \in K,$$

откуда $(ab + ba^{\phi})^{\phi} = [a^{\phi}, R_b]$ и $b^{\phi} a^{\phi} + R_b a^{\phi} = 0$ для любых $a, b \in \mathcal{A}$. Домножая равенство $R_a + a^{\phi} + \alpha_a D = \beta_a E$ справа на b^{ϕ}, из полученных равенств выводим $\alpha_a I^b_{\mu} = \beta_a b^{\phi}$ для любых $a, b \in \mathcal{A}$, откуда $\beta = \gamma\alpha$ для некоторого ненулевого $\gamma \in F$. Таким образом, $\mathcal{A}$ является модульной алгеброй пары $(H, \mathcal{D})$. $\square$

При доказательстве теоремы 3.4 нам понадобится следующий простой результат из линейной алгебры.

Лемма 3.6. *Пусть $A \in M_n(F), n \geq 2, A \neq 0$. Тогда существует $B \in M_n(F)$ со следом 0 такая, что $AB \neq 0$, а $\mathrm{tr}(AB) = 0$.*

Теорема 3.4. *Пусть $(H, \mathcal{D})$ — нетривиальная ε-согласованная пара на эндоморфе $E(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — алгебра над полем F, не являющаяся алгеброй скалярного умножения, одномерным расширением абелевой алгебры при помощи дифференцирования или модульной алгеброй пары $(H, \mathcal{D})$. Тогда расширение Мицухары алгебры $E(\mathcal{A})$ является почти простой неразложимой алгеброй, которая проста при $\varepsilon = 1$ и локальна при $\varepsilon = 0$ с единственным собственным идеалом $I_u = \langle a + H(a, 1)u : a \in E(\mathcal{A}) \rangle$ коразмерности 1. При этом I_u — это простая неразложимая правосимметрическая алгебра.*

Доказательство. Из [4] следует, что $E(\mathcal{A})$ является простой алгеброй. Теперь при $\varepsilon = 1$ утверждение следует из нетривиальности пары и леммы 1.1. Пусть $\varepsilon = 0$, I — собственный идеал в $E(\mathcal{A})(H, \mathcal{D})$ и $\mathcal{D} = D + [\,\cdot\,, D] + I_{\mu}$ для некоторых $D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}), \mu \in A^*$.

Заметим, что если $u \in I$, то $\mathcal{D}(E(\mathcal{A})) \subseteq I$ и $I = E(\mathcal{A})(H, \mathcal{D})$.

Предположим, что ненулевая матрица C лежит в I. Если $C \in \langle E\rangle$, то $E \cdot B = B + tr\,(B)u \in I$ для любой матрицы B, откуда, в частности, получаем $\mathrm{End}_0(\mathcal{A}) \subseteq I$. Включение $E \cdot E = E + H(E,E)u \in I$ даёт $\langle E + H(E,E)u\rangle \oplus \mathrm{End}_0(\mathcal{A}) \subseteq I$. Если $C \notin \langle E\rangle$, то легко видеть, что лиев идеал, порождённый C, лежит в I. Тогда $\mathrm{End}_0(\mathcal{A}) \subseteq I$, и для любых $i \neq j$ получаем $e_{ij} \cdot e_{ji} = e_{ii} + H(e_{ii}, E)u \in I$, откуда $\langle E + H(E,E)u\rangle \oplus \mathrm{End}_0(\mathcal{A}) \subseteq I$. Тогда $(a + H(a,E)u) \cdot A = aA + H(a,A)u \in I$ для любых $a \in \mathcal{A}$ и $A \in \mathrm{End}_0(\mathcal{A})$, т. е. $I = I_u$.

Если $A + u \in I$ для некоторой ненулевой $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, то, так как $\dim(\mathcal{A}) > 1$, по лемме 3.6 существует $B \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ такая, что $AB \neq 0$ и $\mathrm{tr}(AB) = 0$, откуда $AB \in I$, и мы приходим к случаю выше. Если I содержит только элементы вида $a + \gamma u, \gamma \in F$, то I совпадает с J из леммы 3.5, а это невозможно по условиям теоремы.

Возьмём ненулевой $u + a + A \in I$, $0 \neq a \in \mathcal{A}, A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Тогда для любых $b \in \mathcal{A}, B \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ имеем

$$\begin{aligned} &(b+B)\cdot(u+a+A) = (b+B)(a+A) + H(b+B, a+A)u + \\ +\quad &D(b) + I^b_\mu + [B,D] \in I. \end{aligned} \tag{12}$$

Полагая $b = 0$, получаем, что $x + x^\phi + \alpha_x u \in I$ для любого $x \in \mathcal{A}$, некоторого $\alpha \in \mathcal{A}^*$ и некоторого линейного отображения $\phi : \mathcal{A} \mapsto \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Легко видеть, что в этом случае I совпадает с K из леммы 3.5, что невозможно по условиям теоремы.

Докажем простоту алгебры I_u. Пусть I — ненулевой идеал в I_u. Если $C \in I \cap \mathrm{End}_0(\mathcal{A})$, то, как и ранее, $\mathrm{End}_0(\mathcal{A}) \subseteq I$. Выбирая обратимую $A \in \mathrm{End}_0(\mathcal{A})$ получаем $(A^{-1} + H(A^{-1}, 1)u) \cdot A = E + H(E, 1)u \in I$ и, аналогично предыдущему, $I = I_u$.

Если $A + u \in I$ для некоторой ненулевой $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, то, так как $\dim(\mathcal{A}) > 1$, по лемме 3.6 существует $B \in \mathrm{End}_0(\mathcal{A})$ такая, что $AB \neq 0$ и $\mathrm{tr}(AB) = 0$, откуда $AB \in I$, и мы приходим к случаю выше.

Предположим, что $a + H(a,E)u \in I$ для некоторого ненулевого $a \in \mathcal{A}$. Тогда $(a + H(a,E)u) \cdot A = aA + H(aA,E)u \in I$ для любого $A \in \mathrm{End}_0(\mathcal{A})$. Таким образом, можно считать, что $a \in \mathcal{A}$ произвольный. По лемме 3.5 $J = \langle x + H(x,1)u : x \in \mathcal{A}\rangle$ не является собственным идеалом алгебры $E(\mathcal{A})(H, \mathcal{D})$, поэтому можно предполагать, что $a + A + H(a+A, E)u \in I$ для некоторых ненулевых $a \in \mathcal{A},\ A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. По доказанному выше, мы можем считать, что $I = \left\langle a + a^\phi + \alpha_a u : a \in \mathcal{A}\right\rangle$ для некоторого линейного отображения $\phi : \mathcal{A} \mapsto \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ и некоторого $\alpha \in \mathcal{A}^*$. Опять приходим к случаю $I = K$ из леммы 3.5, что невозможно.

Так как $\mathcal{A}$ не является алгеброй скалярного умножения, то $n = \dim(A) > 1$. Легко видеть, что в $E(\mathcal{A})$ нет ненулевых элементов, у которых размерность правого аннулятора равна $\dim(E(\mathcal{A})) - 1 = n + n^2 - 1$. Действительно, если $a + A$ — произвольный ненулевой элемент из $E(\mathcal{A})$, $a \neq 0$ и $b \notin \langle a\rangle$, то $(a+A)E \neq 0$ и $(a+A)B \neq 0$, где B такое, что $B(a) = b$;

если же $a = 0$, то это утверждение очевидно. Отсюда легко следуют все утверждения про неразложимость полученных алгебр. $\square$

Автор благодарен рецензенту за ряд ценных замечаний, позволивших улучшить изложение данной статьи.

References

[1] A. Mizuhara, *On simple left symmetric algebras over a solvable Lie algebra*, Sci. Math. Jpn., **57**:2 (2003), 325–337. Zbl 1043.17019

[2] A.P. Pozhidaev, *On generalized Mizuhara's construction*, submitted to Sib. Math. J. (2023).

[3] H. Shima, *Homogenous Hessian manifold*, Ann. Inst. Fourier, **30** (1980), 91–128. Zbl 0424.53023

[4] A.P. Pozhidaev, *On endomorphs of right-symmetric algebras*, Sib. Math. J., **61**:5 (2020), 859–866. Zbl 1477.17106

[5] R. Słowik, *Derivations of rings of infinite matrices*, Commun. Algebra, **43**:8 (2015), 3433–3441. Zbl 1321.16029

Aleksandr Petrovich Pozhidaev
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: app@math.nsc.ru