S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 1, стр. 62–69 (2024) УДК 510.652
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.005 MSC 11U99

О СЛОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАД ГРАФАМИ

А.Н. Рыбалов

Представлено С.В. Судоплатовым

Abstract: In this paper the computational complexity of the problem of determining the compatibility of systems of equations without constants over an arbitrary fixed finite graph is studied. In this case, the graph is fixed, and the input is an arbitrary system of equations in the graph language without constants. A criterion is given for NP-completeness and polynomial decidability of this problem. Also its generic decidability in polynomial time is proved.

Keywords: NP-completeness, generic complexity, graphs, equations.

1 Введение

Решение уравнений и систем уравнений над вещественными, комплексными, рациональными, целыми числами является классической темой исследований в различных областях математики в течение уже нескольких тысяч лет. Классическая алгебраическая геометрия изучает множества решений алгебраических уравнений над полями вещественных и комплексных чисел. В рамках диофантовой геометрии и диофантова анализа изучаются решения алгебраических уравнений над целыми

Rybalov, A.N., On complexity of solving of equations over graphs.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

Поступила 29 ноября 2023 г., опубликована 13 февраля 2024 г.

и рациональными числами. В XX веке большую роль начали играть вычислительные аспекты этих теорий. Изучение алгоритмических проблем, связанных с определением наличия решения у систем уравнений, а также с нахождением и описанием множества решений, является темой многочисленных теоретических и практических исследований.

Другим направлением исследований, возникшим в XX веке, является изучение и решение систем уравнений над алгебраическими системами, отличными от классических полей вещественных и комплексных чисел и кольца целых чисел. К ярким результатам такого типа можно отнести алгоритм Г. С. Маканина [10], решающий проблему разрешимости систем уравнений в свободных полугруппах, а также результат В. А. Романькова [11] о неразрешимости проблемы решения систем уравнений над некоторыми нильпотентными группами. Дальнейшее изучение уравнений над группами и перенос идей классической алгебраической геометрии на произвольные алгебраические системы привел к появлению в работах Э. Ю. Данияровой, А. Г. Мясникова и В. Н. Ремесленникова универсальной алгебраической геометрии [1].

Важнейшими объектами изучения в дискретной математике и информатике являются графы. Уравнения над графами в духе универсальной алгебраической геометрии изучались в работах А. В. Ильева, В. П. Ильева и В. Н. Ремесленникова [5, 6, 7, 8]. В частности, в [7] было доказано, что проблема определения разрешимости (совместности) систем уравнений над конечными графами является NP-полной. При этом и система и граф варьируются и являются частью входа. В [8] была доказана NP-полнота проблемы совместности систем уравнений без констант над фиксированным конечным полным p-дольным графом при $p \geq 3$ и ее полиномиальная разрешимость при $p < 3$.

В данной работе исследуется проблема определения совместности систем уравнений без констант над произвольным фиксированным конечным графом. При этом граф фиксирован, а входом является произвольная система уравнений в языке графов без констант. Дается критерий NP-полноты и полиномиальной разрешимости этой проблемы. Также доказывается ее генерическая разрешимость за полиномиальное время.

2 Предварительные сведения

На протяжении всей статьи будем рассматривать неориентированные графы без петель и кратных ребер. Такие графы называются *простыми*. Граф G – это пара (V, E), где V – множество вершин, а $E \subseteq V \times V$ – множество ребер графа G. Для любого множества A через $|A|$ будем обозначать его мощность.

Каждому конечному графу $G = (V, E)$ сопоставим конечную алгебраическую систему $\mathfrak{A}_G = \langle V, L_{\mathcal{G}} \rangle$, носитель которой есть множество вершин V, а язык $L_{\mathcal{G}} = \{E^{(2)}, =\}$ состоит из бинарного предиката смежности вершин $E(x,y)$ и предиката равенства. Предикат смежности в алгебраической системе $\mathfrak{A}_G$ интерпретируется следующим образом: для любых вершин $v_1, v_2 \in V$ имеет место $E(v_1,v_2) \Leftrightarrow (v_1,v_2) \in E$. Причем предикат смежности удовлетворяет следующим аксиомам:

(1) $\forall x\ \neg E(x,x)$,
(2) $\forall x,y\ E(x,y) \to E(y,x)$.

Уравнением языка графов $L_{\mathcal{G}}$ называется либо предикат $E(x_i,x_j)$, либо равенство $x_i = x_j$. Иногда в язык добавляют также все элементы носителя в качестве констант, такой язык называется *диофантовым.* В этом случае появляются уравнения вида $E(x_i,v_j)$, $E(v_i,v_j)$, $x_i = v_j$ и $v_i = v_j$. Однако в данной статье мы будем рассматривать уравнения над графами в языке без констант, учитывая то, что аналогичные результаты можно получить и в диофантовом случае. *Система уравнений* языка графов $L_{\mathcal{G}}$ от переменных $x_1,\ldots,x_n$ есть конечный набор уравнений от этих переменных. Система уравнений S *совместна над графом* G, если существуют значения переменных системы S из носителя алгебраической системы $\mathfrak{A}_G$, при которых каждое уравнение истинно над $\mathfrak{A}_G$. Очевидно, что любую систему S над любым графом G можно легко преобразовать в эквивалентную ей систему S' над G (в том смысле, что обе системы одновременно либо совместны, либо не совместны над G), избавившись от уравнений вида $x_i = x_j$ и от одинаковых (с точностью до перестановки переменных x_i и x_j) уравнений вида $E(x_i,x_j)$. Кроме того, если в системе имеется уравнение $E(x_i,x_i)$, то система несовместна, так как решение ищется над графами без петель. Поэтому будем считать, что в системах нет таких уравнений. Таким образом, в дальнейшем будем предполагать, что системы состоят только из различных уравнений вида $E(x_i,x_j)$, $i<j$.

Пусть граф G – произвольный фиксированный граф. *Проблема проверки совместности систем уравнений над графом* G состоит в следующем. Входом проблемы является произвольная система уравнений S в языке графов. Нужно определить, является ли система S совместной над графом G.

Пусть имеются два графа $G_1 = (V_1,E_1)$ и $G_2 = (V_2,E_2)$. Отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ называется *гомоморфизмом* графа G_1 на граф G_2, если для любых $v_1, v_2 \in V_1$ из того, что $(v_1,v_2) \in E_1$ следует, что $(\varphi(v_1),\varphi(v_2)) \in E_2$. Это определение соответствует определению гомоморфизма алгебраической системы $\mathfrak{A}_{G_1}$ на алгебраическую систему $\mathfrak{A}_{G_2}$. Легко видеть, что если φ – гомоморфизм графа G_1 на граф G_2, а ψ – гомоморфизм графа G_2 на граф G_3, то суперпозиция $\varphi \circ \psi$ – гомоморфизм графа G_1 на граф G_3.

Напомним также, что *раскраской* графа G в m цветов называется присваивание каждой вершине графа одного из m цветов. Раскраска графа называется *правильной*, если любые две вершины графа, соединенные ребром, раскрашены в разные цвета. Если такая правильная раскраска в m цветов существует, граф называется *раскрашиваемым* в m цветов. *Хроматическим числом* графа называется минимальное m такое, что граф раскрашиваем в m цветов.

3 Критерий NP-полноты

Пусть S – система уравнений от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Сопоставим системе S граф $G(S)$ следующим образом. Вершины графа $G(S)$ – это переменные $x_1, \ldots, x_n$. Вершины x_i и x_j соединены ребром тогда и только тогда, когда в системе S имеется уравнение $E(x_i, x_j)$.

Лемма 1. *Система S совместна над графом G тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм графа $G(S)$ на граф G.*

Доказательство. Обозначим множество переменных системы S как $\{x_1, \ldots, x_n\}$, а множество вершин графа G как $\{v_1, \ldots, v_m\}$.

Пусть система S совместна над графом G. Тогда существуют значения переменных $x_1, \ldots, x_n$ из множества $\{v_1, \ldots, v_m\}$, для которых все уравнения системы S истинны над G. Положим $\varphi(x_i) = v_j$, где v_j – соответствующее значение переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$. Легко проверить, что φ – гомоморфизм графа $G(S)$ на граф G.

Обратно, пусть существует гомоморфизм φ графа $G(S)$ на граф G. Тогда $\varphi(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$ есть решение системы S над графом G. □

Доказательство следующей леммы можно найти, например, в [4].

Лемма 2. *Граф G раскрашиваем в m цветов тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм G на полный граф на m вершинах K_m.*

Теорема 1. *Пусть G – фиксированный конечный граф с хроматическим числом m. Тогда если $m \leq 2$, то проблема проверки совместности систем уравнений над G разрешима за полиномиальное время, иначе эта проблема NP-полна.*

Доказательство. Так как m – хроматическое число графа G, то, по лемме 2, существует гомоморфизм χ графа G на полный граф K_m.

Покажем, что проблема проверки совместности систем уравнений S над G эквивалентна проблеме проверки того, что граф $G(S)$ раскрашиваем в m цветов.

Действительно, пусть система $G(S)$ имеет решение над графом G. Тогда, по лемме 1, существует гомомофизм φ графа $G(S)$ на граф G. Таким образом суперпозиция $\varphi \circ \chi$ будет гомоморфизмом графа $G(S)$ на полный граф K_m. Поэтому, по лемме 2, граф $G(S)$ можно раскрасить в m цветов.

Обратно, пусть граф $G(S)$ можно раскрасить в m цветов. По лемме 2, существует гомоморфизм φ графа $G(S)$ на полный граф K_m. Построим гомоморфизм ψ графа K_m на граф G следующим образом.

Заметим, что для каждой вершины v графа K_m найдется вершина u графа G такая, что $\chi(u) = v$. То есть u есть прообраз вершины v при гомомофизме χ. Если бы это было не так, то вершину v, у которой нет прообраза можно было отбросить вместе со всеми ребрами, инцедентными v, и получить гомоморфизм графа G на полный граф K_{m-1}. Значит, по лемме 2, граф G можно раскрасить в $m-1$ цвет, что противоречит тому, что m – хроматическое число графа G.

Теперь покажем, что для любых двух вершин v_1 и v_2 графа K_m, которые, конечно же соединены ребром в K_m, найдутся вершины u_1 и u_2 графа G, прообразы v_1 и v_2, соответственно, соединенные ребром в G. Допустим, что это не так, тогда сделаем следующее. Склеим вершины v_1 и v_2 в графе K_m в одну вершину, при этом удалим все ребра, их соединяющие, а ребра, соединяющие эти две вершины с другими будут соединять новую вершину $\{v_1, v_2\}$ со всеми остальными. Получится граф K_{m-1}. А гомоморфизм χ подправим так, чтобы все прообразы вершин v_1 и v_2 переходили в новую вершину $\{v_1, v_2\}$. Легко видеть, что при этом получается гомоморфизм графа G на граф K_{m-1}. Но это, по лемме 2, опять противоречит тому, что m – хроматическое число графа G.

Теперь получается, что для любых двух вершин v_1 и v_2 графа K_m найдутся две вершины u_1 и u_2 графа G соединенные ребром, такие, что $\chi(u_1) = v_1$ и $\chi(u_2) = v_2$. Положим $\psi(v_1) = u_1$. Легко видеть, что отображение ψ является гомоморфизмом графа K_m на граф G. Теперь гомоморфизм $\varphi \circ \psi$ графа $G(S)$ на граф G, по лемме 1, доказывает совместность системы S над графом G.

Проблема проверки раскраски графа в m цветов является разрешимой за полиномиальное время при $m \leq 2$ и NP-полной при $m > 2$ [3]. Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

Заметим, что, в [7] (теорема 1) была доказана NP-полнота проблемы проверки совместности систем уравнений над графами. При этом варьировались, являясь частью входа, и система уравнений S и граф G, над которым уравнения решались. В теореме же 1 граф G зафиксирован, а варьируется и является входом только система S. Таким образом, в теореме 1 доказывается более сильный результат об NP-полноте более частных проблем. С другой стороны, в [7] (следствие 3) доказано, что проблема проверки совместности произвольной системы уравнений S над произвольным двудольным графом G разрешима за время $O(k^2 n(k+n)^2)$, где k – число переменных системы S, а n – число вершин графа G. Так как раскрашиваемость графа в два цвета эквивалентна его двудольности, то в [7] доказан более сильный результат о полиномиальности более общей проблемы, чем результат о полиномиальной разрешимости частных проблем из теоремы 1.

Из доказательства теоремы 1 следует такое утверждение.

Лемма 3. *Пусть граф G имеет m вершин. Тогда если для системы S ее граф $G(S)$ нельзя раскрасить в m цветов, то система S несовместна над G.*

4 Генерический полиномиальный алгоритм

Под размером системы уравнений S в языке графов будем понимать число переменных $x_1, \ldots, x_n$. Так как системе S размера n соответствует граф $G(S)$ на n вершинах, а простые графы можно представлять матрицей смежности (причем достаточно только верхней ее половины), будем считать, что система задается матрицей смежности (верхней ее половиной). Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех систем, а через $\mathcal{S}_n$ множество систем размера n.

Лемма 4. $|\mathcal{S}_n| = 2^{n(n-1)/2}$.

Доказательство. Простой подсчет. □

Напомним основные определения генерического подхода [9]. Для любого подмножества $A \subseteq \mathcal{S}$ определим следующую последовательность

$$\rho_n(A) = \frac{|A_n|}{|\mathcal{S}_n|},\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $A_n = A \cap \mathcal{S}_n$ – множество систем из A размера n. *Асимптотической плотностью* A назовём предел (если он существует)

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(A).$$

Множество A называется *генерическим*, если $\rho(A) = 1$, и *пренебрежимым*, если $\rho(A) = 0$. Очевидно, что A генерическое тогда и только тогда, когда $\mathcal{S} \setminus A$ пренебрежимо.

Алгоритм $\mathcal{A}$ с множеством входов $\mathcal{S}$ и множеством выходов $\mathbb{N} \cup \{?\}$ называется *генерическим*, если

(1) $\mathcal{A}$ останавливается на всех входах из $\mathcal{S}$;
(2) множество $\{x \in \mathcal{S} : \mathcal{A}(x) = ?\}$ является пренебрежимым.

Генерический алгоритм $\mathcal{A}$ вычисляет функцию $f : \mathcal{S} \to \mathbb{N}$, если для всех $x \in \mathcal{S}$ выполнено

$$(\mathcal{A}(x) \neq ?) \Rightarrow (f(x) = \mathcal{A}(x)).$$

Проблема распознавания множества $A \subseteq \mathcal{S}$ *генерически разрешима за полиномиальное время*, если существует полиномиальный генерический алгоритм, вычисляющий характеристическую функцию множества A. Напомним, что *характеристической функцией* множества $A \subseteq \mathcal{S}$ называется функция $\chi_A : \mathcal{S} \to \{0, 1\}$, определенная следующим образом:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Лемма 5. *Пусть m — фиксированное натуральное число. Тогда множество систем S таких, что граф $G(S)$ содержит клику K_m, является генерическим.*

Доказательство. Докажем, что множество A систем, графы которых не содержат клику K_m, является пренебрежимым. В [2] (следствие из теоремы 1) было доказано, что

$$\log |A_n| = \frac{n^2}{2}\Big(1 - \frac{1}{m-1}\Big) + o(n^2).$$

Откуда

$$|A_n| < 2^{\frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{m-1} + \varepsilon n^2}$$

при достаточно больших n и некотором положительном $\varepsilon < \frac{1}{m-1}$.

Теперь

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{|\mathcal{S}_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{m-1} + \varepsilon n^2}}{2^{n(n-1)/2}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-\frac{n^2}{m-1} + \varepsilon n^2 + n/2} = 0.$$

□

Теорема 2. *Для любого фиксированного графа G проблема проверки совместности систем уравнений над G генерически разрешима за полиномиальное время.*

Доказательство. Пусть граф G имеет m вершин. Полиномиальный генерический алгоритм, решающий проблему проверки совместности систем уравнений над G будет работать на системе S размера n следующим образом.

(1) Ищет в графе $G(S)$ клику размера $m+1$. Это делается перебором всевозможных подмножеств вершин $G(S)$ размера $m+1$ и проверки того, что все они друг с другом соединены ребрами. Число таких подмножеств $C_n^{(m+1)}$ полиномиально, так как число m фиксировано.
(2) Если клика нашлась, то выдает ответ «НЕТ».
(3) Если клики нет, выдает ответ «НЕ ЗНАЮ».

Корректность алгоритма следует из леммы 3, так как если в графе $G(S)$ есть клика размера $m+1$, то его нельзя раскрасить в m цветов. Генеричность алгоритма следует из леммы 5. □

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания и предложения по улучшению текста статьи.

References

[1] E.Y. Daniyarova, A.G. Myasnikov, V.N. Remeslennikov, *Algebraic geometry over algebraic structures*, SB RAS, Novosibirsk, 2016.
[2] P. Erdős, D.J. Kleitman, B.L. Rothschild, *Asymptotic enumeration of K_n-free graphs*, Colloq. Int. Teorie Comb., Roma, 1973, Tomo II, 1976, 19–27. Zbl 0358.05027
[3] M. Garey, D. Johnson, *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1979. Zbl 0411.68039

[4] P. Hell, *Algorithmic aspects of graph homomorphisms*, in Wensley, C.D. (ed.), *Surveys in combinatorics, 2003*, Proceedings of the 19th British combinatorial conference, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser., **307**, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, 239–276. Zbl 1035.05089

[5] A.V. Ilev, *Decidability of universal theories and axiomatizability of hereditary classes of graphs*, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **22**:1 (2016), 100–111.

[6] A.V. Ilev, V.N. Remeslennikov, *Study of the compatibility of systems of equations over graphs and finding their general solutions*, Vestnik Omskogo Universiteta, **2017**:4(86) (2017), 26–32.

[7] A.V. Il'ev, V.P. Il'ev, *Algorithms for solving systems of equations over various classes of finite graphs*, Prikl. Diskretn. Mat., **53** (2021), 89–102. Zbl 7407761

[8] A.V. Ilev, *Study of systems of equations over various classes of finite matroids*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **19**:2 (2022), 1094–1102.

[9] I. Kapovich, A. Myasnikov, P. Schupp, V. Shpilrain, *Generic-case complexity and decision problems in group theory, and random walks*, J. Algebra, **264**:2 (2003), 665–694. Zbl 1041.20021

[10] G.S. Makanin, *The problem of solvability of equations in a free semigroup*, Math. USSR, Sb., **32** (1977), 129–198. Zbl 0396.20037

[11] V.A. Roman'kov, *Universal theory of nilpotent groups*, Math. Notes, **25** (1979), 253–258. Zbl 0425.20027

Alexander Nikolaevich Rybalov
Sobolev Institute of Mathematics,
prospekt Koptyuga 4,
Novosibirsk, 630090, Russia.
Pevtsova 13,
Omsk, 644099, Russia.
Email address: alexander.rybalov@gmail.com