S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 1, стр. 98–104 (2024) УДК 517.95
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.008 MSC 35R30

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Г.В. Гренкин

Представлено М.А. Шишлениным

Abstract: The steady-state complex heat transfer model within the P_1-approximation of the radiative transfer equation is considered. An inverse problem of reconstructing heat sources intensities with given volume densities from the prescribed values of functionals of heat sources densities on the temperature field calculated without taking account of radiative effects is investigated. The uniqueness of the inverse problem solution is proved.

Keywords: radiative heat transfer, inverse problem, integral overdetermination.

1 Введение

Моделирование переноса тепла, учитывающее эффекты, связанные с распространением теплового излучения, актуально как благодаря математической новизне задач, так и в связи с возможным применением результатов теоретического и численного анализа на практике.

Обширное количество литературы посвящено математическому исследованию уравнений сложного теплообмена в рамках P_1-приближения

Grenkin, G.V., Uniqueness of solution of an inverse problem for a complex heat transfer model.

Поступила 27 декабря 2022 г., опубликована 14 февраля 2024 г.

уравнения переноса излучения. В работах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] исследована корректность стационарных и нестационарных моделей, в [8, 9, 10] изучены задачи оптимального управления граничными коэффициентами для этих моделей. В работах [11, 12] рассмотрены обратные задачи восстановления зависящих от времени интенсивностей источников для нестационарных уравнений сложного теплообмена с интегральным переопределением, доказана их однозначная разрешимость, когда в качестве переопределения берется интеграл от температуры, умноженной на функцию, описывающую источники тепла. Наконец, в статьях [13, 14] для стационарных моделей сложного теплообмена поставлены обратные задачи восстановления неизвестных интенсивностей источников тепла по известным их объемным плотностям и заданному интегральному переопределению — значениям функционалов источников на поле температуры. Доказано, что по этим данным всегда восстанавливаются интенсивности источников вместе с полем температуры, но единственность такого восстановления установлена при достаточно большом коэффициенте температуропроводности. Сходные обратные задачи, но для линейных уравнений, изучались, например, в работах [15, 16, 17].

В настоящей работе обратная задача поставлена по-другому — функционалы источников вычисляются на специальном поле температуры, вычисляемом без учета радиационных эффектов. Для такой постановки показано, что якобиан отображения интенсивностей источников в значения функционалов является P-матрицей, отсюда из теоремы Гейла–Никайдо вытекает однозначность этого отображения. Таким образом, установлена единственность решения обратной задачи.

2 Постановка обратной задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — липшицева ограниченная область с границей Γ, в которой происходит процесс радиационно-кондуктивного теплообмена, описываемый функциями θ — установившееся поле температуры, φ — поле интенсивности излучения, усредненной по всем направлениям. Установившийся процесс описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|^3\theta - \varphi) = \sum_{i=1}^{m} q_i f_i, \tag{1}$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3\theta) = 0 \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0 \ \text{ на } \Gamma. \tag{3}$$

Здесь величины θ и φ являются нормированными. Положительные постоянные параметры a, b, α, κ_a характеризуют радиационно-термические свойства среды, граничные функции β, γ характеризуют отражающие свойства границы [3]. Через $\partial/\partial n$ обозначена производная в направлении внешней нормали.

Для нахождения неизвестных интенсивностей источников тепла q_i для поля температуры задается интегральное переопределение:

$$(f_j, S\theta) = r_j,\ j = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Здесь $f_j \in V'$ — заданные функционалы, выражающие объемные плотности источников, S — оператор, который по полю температуры θ дает поле температуры, вычисленное без учета радиационных эффектов, он будет определен ниже.

Для формализации краевой задачи будем использовать пространство Соболева $V = H^1(\Omega)$. Через (f, v) обозначаем значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$, если $f, v \in L^2(\Omega)$. Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

(i) $\beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $\beta \ge \beta_0 > 0$, $\gamma \ge \gamma_0 > 0$, $0 \le \theta_b \in L^\infty(\Gamma)$,

(ii) $f_j \in V'$, f_j линейно независимы.

Определим операторы $A_1, A_2 \colon V \to V'$ и функционалы $h_1, h_2 \in V'$ по формулам:

$$(A_1\theta, v) = a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_\Gamma \beta\theta v\, d\Gamma, \quad (A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_\Gamma \gamma\varphi v\, d\Gamma,$$

$$(h_1, v) = \int_\Gamma \beta\theta_b v\, d\Gamma, \quad (h_2, v) = \int_\Gamma \gamma\theta_b^4 v\, d\Gamma.$$

Определение 1. *Пара $\{\theta, \varphi\}$ называется слабым решением задачи (1)–(3), если*

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|^3\theta - \varphi) = \sum_{i=1}^m q_i f_i + h_1, \quad A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3\theta) = h_2.$$

Теорема 1. [7] *Пусть выполнены условия (i), (ii). Для любых чисел q_j слабое решение задачи (1)–(3) существует и единственно.*

Определим поле температуры η, вычисляемое без учета радиационных эффектов, которое подчиняется уравнению

$$A_1\eta = \sum_{i=1}^m q_i f_i + h_1.$$

Можно показать, что при известных полях θ, φ поле η можно найти по формуле $\eta = \theta + bA_1^{-1}(A_2\varphi - h_2)$. Следовательно, можно определить нелинейный оператор $S \colon V \to V$, который заданному полю θ сопоставляет поле η:

$$\eta = S\theta = \theta + b\kappa_a A_1^{-1}A_2(A_2 + \kappa_a I)^{-1}(|\theta|^3\theta) - b\kappa_a A_1^{-1}(A_2 + \kappa_a I)^{-1}h_2.$$

Определение 2. *Вектор* $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$ *вместе с парой* $\{\theta, \varphi\}$ *есть решение обратной задачи (1)–(4), если для слабого решения* $\{\theta = \theta(\mathbf{q}), \varphi = \varphi(\mathbf{q})\}$ *выполняются равенства*

$$F_j(\mathbf{q}) \equiv (f_j, S\theta) = r_j, \ j = 1, \ldots, m. \tag{5}$$

3 Единственность решения обратной задачи

Метод исследования единственности решения нелинейной системы (5) состоит в анализе якобиана системы. Мы покажем, что якобиан данной системы равен определителю матрицы Грама относительно скалярного произведения, порожденного положительным оператором, откуда следует положительная определенность якобиана. Далее применяется теорема о глобальной однозначности отображения с положительной матрицей Якоби.

Лемма 1. *Справедлива формула*

$$\frac{\partial F_j(\mathbf{q})}{\partial q_i} = \left(f_i, P[\theta(\mathbf{q})](S'_\theta[\theta(\mathbf{q})])^* f_j\right),$$

где $P[\theta]\colon V' \to V$ *— оператор, который по функции* g *дает решение* $p_1 = P[\theta]g$ *сопряженной задачи*

$$A_1 p_1 + 4\kappa_a|\theta|^3(bp_1 - p_2) = g, \quad A_2 p_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) = 0,$$

$S'_\theta[\theta]\colon V \to V$ *— оператор, действующий по формуле:*
$S'_\theta[\theta]h = h + 4b\kappa_a A_1^{-1} A_2 (A_2 + \kappa_a I)^{-1}(|\theta|^3 h)$.

Доказательство. Составляя и дифференцируя стандартным образом функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(\theta, \mathbf{q}, p) = (f_j, S\theta) + (\mathcal{F}(\theta, \mathbf{q}), p),$$

где $\mathcal{F}(\theta, \mathbf{q}) = 0$ — уравнение, связывающее θ и $\mathbf{q}$,

$$(\mathcal{F}(\theta, \mathbf{q}), v) = (A_1\theta, v) + b\kappa_a\left(|\theta|^3\theta - (A_2 + \kappa_a I)^{-1}(b\kappa_a|\theta|^3\theta), v\right) - \sum_{i=1}^m q_i(f_i, v),$$

получим выражение для градиента функционала $F_j(\mathbf{q})$ [18, с. 63]:

$$\frac{\partial F_j(\mathbf{q})}{\partial q_i} = \mathcal{L}'_{\mathbf{q}}(\theta(\mathbf{q}), \mathbf{q}, p(\mathbf{q})),$$

где $p(\mathbf{q})$ — решение сопряженной задачи

$$\mathcal{L}'_\theta(\theta(\mathbf{q}), \mathbf{q}, p) = 0.$$

Отсюда получаем условие леммы. Отметим, что требуемое условие непрерывной обратимости оператора $\mathcal{F}'_\theta(\theta, \mathbf{q})$ следует из результатов [10]. □

Следствие 1. *Справедлива формула*

$$\frac{\partial F_j(\mathbf{q})}{\partial q_i} = \left(f_j, S'_\theta[\theta(\mathbf{q})]P[\theta(\mathbf{q})]^* f_i\right) = \left(f_j, A_1^{-1} f_i\right),$$

где $P[\theta]^*\colon V' \to V$ — *оператор, который по функции* g *дает решение* $u = P[\theta]^* g$ *линеаризованной задачи*

$$A_1 u + b\kappa_a(4|\theta|^3 u - z) = g, \quad A_2 z + \kappa_a(z - 4|\theta|^3 u) = 0.$$

Следствие 2. *Якобиан* $\dfrac{\partial F_j(\mathbf{q})}{\partial q_i}$ *является* P*-матрицей в любой точке* $\mathbf{q}$.

Теорема 2. *Обратная задача (1)–(4) имеет не более одного решения.*

Доказательство. Из теоремы Гейла – Никайдо [19] следует, что отображение $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{q})$ однозначно. □

4 Решение обратной задачи

Применим результат анализа рассмотренной обратной задачи для решения обратной задачи в исходной постановке: найти неизвестные коэффициенты q_i, при которых выполняются условия интегрального переопределения:

$$(f_j, \theta) = r_j, \ \ j = 1, \ldots, m.$$

Для решения указанной задачи предлагается следующий алгоритм.

(1) Полагаем $s_j^{(1)} = r_j$ для $j = 1, \ldots, m$. Считаем $k = 1$.

(2) Решаем обратную задачу

$$A_1 \eta = \sum_{i=1}^{m} q_i f_i + h_1,$$
$$(f_j, \eta) = s_j^{(k)}, \ \ j = 1, \ldots, m,$$

находим коэффициенты $q_i = q_i^{(k)}$.

(3) Находим $\theta = \theta^{(k)}$, $\varphi = \varphi^{(k)}$, где θ, φ — решение задачи (1)–(3) при $q_i = q_i^{(k)}$.

(4) Вычисляем $s_j^{(k+1)} = r_j + b(f_j, A_1^{-1}(A_2\varphi^{(k)} - h_2))$. Поскольку $(f_j, \theta^{(k)}) + b(f_j, A_1^{-1}(A_2\varphi^{(k)} - h_2)) = s_j^{(k)}$, то $s_j^{(k+1)} = s_j^{(k)} + (r_j - (f_j, \theta^{(k)}))$.

(5) Переходим к шагу 2, увеличив k на 1.

По сравнению со стандартным методом Ньютона, который может быть использован для решения данной обратной задачи, представленной в качестве системы нелинейных алгебраических уравнений, в предлагаемом алгоритме на шаге 2 получается невырожденная система линейных уравнений для нахождения коэффициентов q_i.

Другим методом решения исходной обратной задачи может выступить метод квазилинеаризации, аналогичный неполному методу Ньютона для решения прямой задачи [20]. Если на каждой итерации предложенного алгоритма решается линейная обратная задача теплопроводности, то на каждой итерации метода квазилинеаризации будет решаться линеаризованная обратная задача сложного теплообмена, в которой для упрощения теоретического анализа нелинейный член линеаризуется только в уравнении для температуры:

$$A_1\theta + b\kappa_a\left(|\widetilde{\theta}|^3\widetilde{\theta} + 4|\widetilde{\theta}|^3(\theta-\widetilde{\theta}) - \widetilde{\varphi}\right) = \sum_{i=1}^{m} q_i f_i + h_1,$$
$$A_2\widetilde{\varphi} + \kappa_a(\widetilde{\varphi} - |\widetilde{\theta}|^3\widetilde{\theta}) = h_2,$$
$$(f_j,\theta) = r_j,\ j=1,\ldots,m.$$

Здесь $\widetilde{\theta}$ — это приближение для поля температуры с предыдущей итерации.

Наконец, третий способ состоит в замене второго шага алгоритма на решение указанной линеаризованной задачи. В отличие от метода квазилинеаризации, здесь приближение $\widetilde{\theta}$ будет вычисляться как решение прямой задачи при коэффициентах q_i, найденных из линеаризованной обратной задачи.

5 Выводы

Таким образом, для корректной постановки обратной задачи можно отнести данные измерений не к самому полю температуры, а к специальному полю, вычисленному без учета радиационных эффектов. При таком выборе функционалов в переопределении обратная задача для уравнений сложного теплообмена обладает свойствами аналогичной обратной задачи для уравнения теплопроводности и является линейной. Поэтому для ее решения подойдут стандартные численные методы, ориентированные на системы линейных алгебраических уравнений.

References

[1] R. Pinnau, *Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by SP_1-system,* Commun. Math. Sci., **5**:4 (2007), 951–969. Zbl 1145.49015

[2] R. Pinnau, O. Tse, *Optimal control of a simplified natural convection–radiation model*, Commun. Math. Sci., **11**:3 (2013), 679–707. Zbl 1286.35134

[3] G.V. Grenkin, A.Yu. Chebotarev, *A nonhomogeneous nonstationary complex heat tranfer problem*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **12** (2015), 562–576. Zbl 1342.35146

[4] G.V. Grenkin, A.Yu. Chebotarev, *Nonstationary problem of free convection with radiative heat transfer*, Comput. Math. Math. Phys., **56**:2 (2016), 278–285. Zbl 1344.35100

[5] A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, *Stationary free convection problem with radiative heat exchange*, Differ. Equ., **50**:12 (2014), 1592–1599. Zbl 1316.35241

[6] A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **20**:3 (2015), 776–784. Zbl 1308.80002

[7] A.Yu. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk, *Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer*, ESAIM, Math. Model. Numer. Anal., **51**:6 (2017), 2511–2519. Zbl 1387.35122

[8] A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive–convective–radiative heat transfer*, J. Math. Anal. Appl., **412**:1 (2014), 520–528. Zbl 1337.49006

[9] G.V. Grenkin, A.Yu. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Boundary optimal control problem of complex heat transfer model*, J. Math. Anal. Appl., **433**:2 (2016), 1243–1260. Zbl 1326.35412

[10] A.Yu. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk, G.V. Grenkin, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model*, Appl. Math. Comput., **289** (2016), 371–380. Zbl 1410.49004

[11] G.V. Grenkin, A.Yu. Chebotarev, *Inverse problem for equations of complex heat transfer*, Comput. Math. Math. Phys., **59**:8 (2019), 1361–1371. Zbl 1427.80017

[12] A.Yu. Chebotarev, R. Pinnau, *An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer*, J. Math. Anal. Appl., **472**:1 (2019), 314–327. Zbl 1427.35348

[13] A.Yu. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange*, J. Math. Anal. Appl., **460**:2 (2018), 737–744. Zbl 1478.35235

[14] A.Yu. Chebotarev, *Inverse problem for equations of complex heat transfer with Fresnel matching conditions*, Comput. Math. Math. Phys., **61**:2 (2021), 288–296. Zbl 1461.35224

[15] S.G. Pyatkov, *On some inverse problems for elliptic equations and systems*, Sib. Zh. Ind. Mat., **13**:4 (2010), 83–96. Zbl 1240.35578

[16] S.G. Pyatkov, M.V. Uvarova, *On determining the source function in heat and mass transfer problems under integral overdetermination conditions*, J. Appl. Industr. Math., **10**:4 (2016), 549–555. Zbl 1374.35444

[17] A. Kovtanyuk, A. Chebotarev, V. Turova, I. Sidorenko, R. Lampe, *Inverse problem for a linearized model of oxygen transport in brain*, in *2020 Days on Diffraction (DD)*, 2020, 44–49.

[18] M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, S. Ulbrich, *Optimization with PDE constraints*, Springer, Dordrecht, 2009. Zbl 1167.49001

[19] D. Gale, H. Nikaidô, *The Jacobian matrix and global univalence of mappings*, Math. Ann., **159**:2 (1965), 81–93. Zbl 0158.04903

[20] G.V. Grenkin, *Convergence of Newton's method for equations of complex heat transfer*, Dal'nevost. Mat. Zh., **17**:1 (2017), 3–10. Zbl 1395.65123

Gleb Vladimirovich Grenkin
Vladivostok State University,
ul. Gogolya, 41,
690014, Vladivostok, Russia
Email address: `glebgrenkin@gmail.com`