S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 1, стр. 188–195 (2024) УДК 519.174.7
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.013 MSC 05C50

СОВЕРШЕННЫЕ РАСКРАСКИ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ В БОЛЬШОЕ ЧИСЛО ЦВЕТОВ

М.А. Лисицына, С.В. Августинович

Представлено А.В. Пяткиным

Abstract: An infinite circulant graph with a continuous set of distances is a graph, whose set of vertices is the set of integers, and two vertices i and j are adjacent if $|i-j| \in \{1, 2, \ldots, n\}$. We study perfect colorings of such graph with k colors for k at least $3n+3$. A complete description of them is obtained.

Keywords: perfect coloring, infinite circulant graph, k-motley fragment.

Введение

Пусть $G = (V, E)$ – обыкновенный граф. Элементы конечного множества $I = \{1, 2, \ldots, k\}$ будем называть *цветами*. Отображение $\phi : V \to I$ называется *совершенной k-раскраской*, если цветовой состав всякого шара радиуса 1 в G зависит только от цвета его центра.

Бесконечный циркулянтный граф с набором дистанций $d_1 < d_2 < \ldots < d_n$ – это граф Кэли бесконечной циклической группы $\mathbb{Z}$ с системой образующих $\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$. Обозначается такой граф через $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Граф $C_\infty(\widetilde{n}) \overset{def}{=} C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ называется *бесконечным циркулянтным*

Lisitsyna, M.A., Avgustinovich, S.V., The perfect colorings of circulant graphs with a large number of colors.

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0018).

Поступила 24 ноября 2023 г., опубликована 28 февраля 2024 г.

графом со сплошным набором дистанций (см. рис. 1). Всюду далее вершины таких графов будем обозначать v_i для $i \in \mathbb{Z}$.

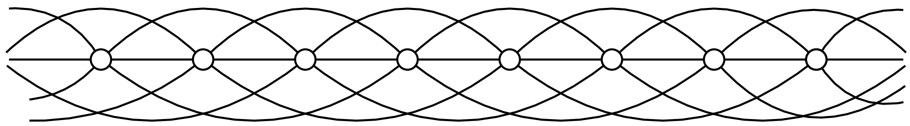

Рис. 1. Локальное строение графа $C_\infty(3)$

Данная статья продолжает изучение совершенных раскрасок графов $C_\infty(\widetilde{n})$. В работе описаны все совершенные раскраски таких графов в k цветов для $k \geq 3n+3$.

Первые результаты о совершенных раскрасках циркулянтных графов принадлежат Д. Б. Хорошиловой [1, 2]. Совершенные 2-раскраски графов $C_\infty(\widetilde{n})$ и $C_\infty(1,3,\ldots,2n-1)$ получены в [3] и [4] соответственно. В [5] описаны совершенные k-раскраски для графа $C_\infty(1,2)$ и произвольного конечного k.

В [6] выдвинута гипотеза о том, что совершенные раскраски графов $C_\infty(\widetilde{n})$ в произвольное количество цветов исчерпываются орбитными сериями и совершенными раскрасками с периодами $2n$, $2n+1$ и $2n+2$. Строгое определение орбитных серий будет дано позднее. В работе [7] получено множество совершенных раскрасок графов $C_\infty(\widetilde{n})$ для $n = 3m+1$ с периодами длины $4n+2$, опровергающее гипотезу.

Пусть G – вершинно транзитивный граф. Произвольное множество его вершин T назовем *фрагментом.* Если для любой k-раскраски G найдется автоморфизм π такой, что сужение раскраски на $\pi(T)$ позволяет эту раскраску однозначно восстановить, то этот фрагмент – *k-тестовый. Длину* T определим равной его мощности. Верхние оценки на длины минимальных k-тестовых фрагментов графа $C_\infty(\widetilde{n})$ для произвольных натуральных k и n получены в [8]. Там же найдена верхняя оценка и для общего случая – для бесконечного циркулянтного графа с дистанциями $d_1, d_2, \ldots, d_n$ и произвольного конечного k.

1 Минимальный k-пестрый фрагмент графа $C_\infty(\widetilde{n})$

Определим *k-пестрый* фрагмент графа G как подмножество вершин T, которое для любой совершенной k-раскраски ϕ может быть переведено в такое положение (с помощью автоморфизма графа G), в котором оно содержит вершины всех k цветов. Всюду далее в качестве k-пестрого фрагмента будем рассматривать множество вершин, номера которых образуют целочисленный отрезок. Не ограничивая общности, считаем, что это множество вида $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_l\}$ для $l \in \mathbb{N}$. В дальнейшем будет показано, что для достаточно больших k ($k \geq 3n{+}3$) минимальные фрагменты такого вида будут минимальными и в множестве всех фрагментов (см. теорему 1).

Известно (см. [2]), что любая совершенная раскраска графа $C_\infty(\widetilde{n})$ является периодической. Значит, для ее описания достаточно указать наименьший период. Записывать такой период будем заключенной в квадратные скобки строкой, количество элементов которой равно длине периода. Для раскраски фрагмента $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_l\}$ будем использовать строку цветов длины l в круглых скобках.

В лемме 1 сформулировано важное свойство минимального k-пестрого фрагмента бесконечного циркулянтного графа с дистанциями $d_1, d_2, \ldots$ и d_n.

Лемма 1. *(Л. 1 в [8]) В любой совершенной k-раскраске графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ цвета вершин v_1 и v_l минимального k-пестрого фрагмента $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_l\}$ различны и в фрагменте $T' = \{v_2, v_3, \ldots, v_{l-1}\}$ не встречаются.*

Рассмотрим совершенную раскраску ϕ исследуемого графа в цвета из $I = \{1, 2, \ldots, k\}$ и его минимальный k-пестрый фрагмент $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_l\}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\phi(v_1) = 1$, а $\phi(v_l) = k$. Наша главная задача в этом параграфе – показать, что при $k \geq 3n + 3$ выполняется $l = k$, т.е. все цвета в $\phi(T)$ различны.

Пусть $k \geq 3n + 3$. Заметим, что $l \geq k \geq 3n + 3$. *Левыми* назовем вершины от v_2 до v_{n+1}, *средними* – от v_{n+2} до v_{l-n-1}, а *правыми* – от v_{l-n} до v_{l-1} (см. рис. 2). Цвета левых, средних и правых вершин в ϕ будем также называть *левыми, средними* и *правыми*. Множества таких цветов обозначим L, M и R соответственно. А цвета, которые встречаются в $\phi(T)$ ровно один раз, назовем *уникальными*.

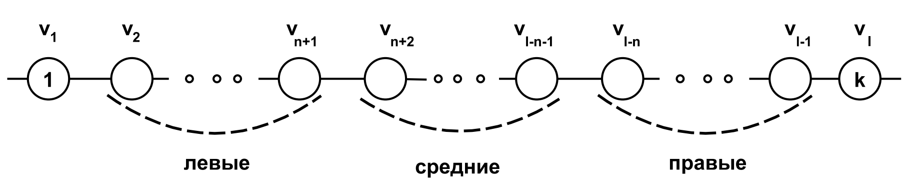

Рис. 2. Левые, средние и правые вершины k-пестрого фрагмента графа $C_\infty(\widetilde{n})$

Множество цветов окружения вершины v цвета i в ϕ назовем *палитрой* цвета i и обозначим его $B_\phi(i)$.

В лемме 2 перечислены свойства сужений совершенных k-раскрасок на минимальный k-пестрый фрагмент для достаточно больших k ($k \geq 3n + 3$).

Лемма 2. *Если $k \geq 3n+3$, то для минимального k-пестрого фрагмента T графа $C_\infty(\widetilde{n})$ и любой его совершенной k-раскраски ϕ верны следующие утверждения:*

1. Множества L, M и R попарно не пересекаются.

2. Каждый средний цвет ϕ является уникальным.

3. $B_\phi(1)$ и $B_\phi(k)$ не содержат средних цветов.

4. Каждый цвет однозначно определяется множеством средних цветов в его палитре.

Доказательство. Справедливость пунктов 1 и 2 следует из лемм 4 и 5 в [8] соответственно. В подробном доказательстве нуждаются только пп. 3 и 4.

3. У вершин средних цветов нет 1- и k-окрашенных соседей. Из чего немедленно получаем утверждение пункта 3.

4. Рассмотрим вершину v_i с $1 < i \leq n+1$ левого цвета. В силу п. 3 данной леммы средними цветами могут быть окрашены только те ее соседи, которые находятся справа. Тогда: $B_\phi(\phi(v_i)) \cap M = \{\phi(v_{n+2}), \phi(v_{n+3}), \ldots, \phi(v_{n+i})\}$. Рассуждая аналогично для правой вершины v_j $(l-n \leq j < l)$, получим: $B_\phi(\phi(v_j)) \cap M = \{\phi(v_{j-n}), \phi(v_{j-n+1}), \ldots, \phi(v_{l-n-1})\}$. По известной раскраске $\phi(T)$ можно определить палитру любого среднего цвета. Как следствие, однозначно определяется и пересечение палитры такого цвета с множеством M. Все такие пересечения различны согласно п. 2. Значит, каждое из них однозначно задаёт свой цвет. Что и требовалось доказать. □

В теореме 1 описана раскраска минимального k-пестрого фрагмента в исследуемом графе при $k \geq 3n+3$.

Теорема 1. *Пусть $k \geq 3n+3$, ϕ – произвольная совершенная k-раскраска графа $C_\infty(\widetilde{n})$, а T – его минимальный k-пестрый фрагмент, тогда длина T равна k и $\phi(T) = (1\ 2\ \ldots\ k)$.*

Доказательство. В силу леммы 1 и п. 4 леммы 2 все вершины T окрашены уникальными цветами. Не теряя общности, можно считать, что $\phi(v_i) = i$ для всех i от 1 до k. Из чего получаем утверждение теоремы 1. □

Следствие 1 позволяет точно восстановить левый (правый) цвет вершины, если известна мощность пересечения его палитры с множеством M.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1, b – некоторый цвет совершенной k-раскраски ϕ и $i > 0$. Если $|B_\phi(b) \cap M| = i$ и $b \in L$, то $b = i+1$; а если $|B_\phi(b) \cap M| = i$ и $b \in R$, то $b = k-i$.*

2 Основной результат

Рассмотрим раскраски графа $C_\infty(\widetilde{n})$ с периодами

$$S_{11}(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2], \tag{1}$$
$$S_{12}(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2], \tag{2}$$
$$S_{21}(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2\ 1], \tag{3}$$
$$S_{22}(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2\ 1], \tag{4}$$
$$S(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ k]. \tag{5}$$

Первые четыре будем называть *зеркальными типов* 1-1, 1-2, 2-1 и 2-2 соответственно, а пятую – *циклической*. Тип зеркальной раскраски определяется количеством вершин крайних цветов (1 и k) в периоде.

Утверждение следующей леммы очевидно.

Лемма 3. *Раскраски циркулянтного графа $C_\infty(\widetilde{n})$ с периодами $S_{11}(k)$, $S_{12}(k)$, $S_{21}(k)$, $S_{22}(k)$ и $S(k)$ являются совершенными для любых натуральных n и k ($n \geq 1, k \geq 1$).*

Циклические и зеркальные совершенные раскраски далее будем называть *орбитными*, поскольку они могут быть получены как результат применения орбитного метода, который является основным способом построения совершенных раскрасок графов (см., например,[9]). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Совершенные k-раскраски графа $C_\infty(\widetilde{n})$ для $k \geq 3n+3$ исчерпываются раскрасками с периодами* (1) – (5).

Доказательство. Пусть ϕ – совершенная раскраска исследуемого графа в k цветов и $k \geq 3n+3$. Согласно теореме 1 имеем $T = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ – его минимальный k-пестрый фрагмент и $\phi(T) = (1\ 2\ \dots\ k)$.

Доказательство проведем перебором допустимых значений $\phi(v_0)$ и $\phi(v_{k+1})$. В силу того, что $\phi(v_1) = 1$, и п. 3 леммы 2 получаем: v_0 имеет в своей 1-окрестности не более одной вершины среднего цвета. Тогда согласно п. 4 той же леммы v_0 окрашена одним из четырех цветов $1, 2, (k-1)$ или k. Аналогичные рассуждения применимы к $\phi(v_{k+1})$. Для наглядности результаты перебора представлены с помощью таблицы (см. таблицу 1). В ее первых двух столбцах перечислены возможные продолжения раскраски фрагмента T влево и вправо на одну вершину. А в третьем столбце – период совершенной раскраски, до которой такое продолжение однозначно восстанавливается.

Случай $\phi(\mathbf{v_0}) = \mathbf{1}$. Окружения вершин v_0 и v_1 цвета 1 отличаются вершинами v_{-n} и v_{n+1}. Значит, $\phi(v_{-n}) = \phi(v_{n+1}) = n+1$. Палитра цвета $n+1$ известна: $B_\phi(n+1) = \{1,\ 2,\ \dots,\ n,\ n+2,\ \dots,\ 2n,\ 2n+1\}$. Половина ее цветов – левые, другая половина – средние. В силу п. 3 леммы 2 вершины $v_{-n},\ v_{-n+1},\ \dots,\ v_{-1}$ окрашены левыми цветами. Тогда $v_{-2n},\ v_{-2n+1},\ \dots,\ v_{-n-1}$ окрашены средними. Применим теперь к

Таблица 1. Схема доказательства Теоремы 2.

$\phi(v_0)$	$\phi(v_{k+1})$	*Совершенная раскраска*
1	$k-1$	$S_{21}(k)$
	k	$S_{22}(k)$
2	$k-1$	$S_{11}(k)$
	k	$S_{12}(k)$
$k-1$	–	–
k	1	$S(k)$

первым следствие 1 и получим продолжение $\phi(T)$ влево на n вершин: $(n\ (n-1)\ \dots\ 2\ 1)$.

Далее рассмотрим допустимые продолжения $\phi(T)$ вправо на n вершин. Т.к. $\phi(v_k) = k$, то согласно п. 3 леммы 2 вершина v_{k+1} имеет не более одного соседа среднего цвета. Принимая во внимание то, что $k \notin B_\phi(1)$ и $k \notin B_\phi(2)$, вершина v_{k+1} окрашена либо цветом $(k-1)$, либо цветом k.

Рассмотрим подслучай $\phi(v_{k+1}) = k-1$. В силу п. 3 леммы 2 и того, что $(k-n-1) \in B_\phi(k-1) \cap M$, получим $\phi(v_{k+n+1}) = k-n-1$. Палитра этого цвета известна: $B_\phi(k-n-1) = \{k-2n-1,\ k-2n,\ \dots,\ k-n-2,\ k-n,\ \dots,\ k-2,\ k-1\}$. Учитывая п. 3 леммы 2, имеем: вершины $v_{k+1},\ v_{k+2},\ \dots,\ v_{k+n}$ окрашены правыми цветами; а $v_{k+n+2},\ v_{k+n+3},\ \dots,\ v_{k+2n+1}$ – средними. Применим теперь к первым следствие 1 и получим продолжение $\phi(T)$ вправо на n вершин: $((k-1)\ (k-2)\ \dots\ (k-n+1)\ (k-n))$.

Рассуждения в подслучае $\phi(v_{k+1}) = k$ такие же, как для продолжения $\phi(T)$ влево вершиной цвета 1. Повторив их, восстановим раскраску ϕ на n вершинах справа от T: $(k\ (k-1)\ \dots\ (k-n+1))$.

Таким образом, получены продолжения $\phi(T)$ влево и вправо на n вершин, что позволяет восстановить палитру каждого цвета. С учетом известных палитр $\phi(T)$ однозначно продолжается до соверщенной раскраски всего графа: в подслучае $\phi(v_{k+1}) = k-1$ период ϕ равен $S_{21}(k)$, а для $\phi(v_{k+1}) = k$ имеет вид $S_{22}(k)$.

Случай $\phi(\mathbf{v_0}) = \mathbf{2}$ доказывается аналогично предыдущему (в силу симметрии). Допустимые продолжения здесь исчерпываются совершенными раскрасками с периодами $S_{11}(k)$ и $S_{12}(k)$.

Случай $\phi(\mathbf{v_0}) = \mathbf{k-1}$. Сравним палитры цвета $k-1$ у вершин v_0 и v_{k-1}. Для v_0 верно $\{1,\ 2,\ \dots,\ n\} \subset B_\phi(k-1)$; а для v_{k-1}: $\{(k-n-1),\ (k-n),\ \dots,\ (k-2),\ k\} \subset B_\phi(k-1)$. Мощность первого такого подмножества равна n, а второго – $(n+1)$. Из п. 1 леммы 2 следует, что они не пересекаются. Но тогда у вершины цвета $(k-1)$ не менее $2n+1$ соседей, что больше мощности 1-окрестности вершины исследуемого графа. Противоречие.

Случай $\phi(\mathbf{v_0}) = \mathbf{k}$. Сопоставим палитры цвета k у вершин v_0 и v_k. С учетом п. 1 леммы 2 получим $B_\phi(k) = \{1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n,\ k-n,\ k-n+1,\ \ldots\ ,\ k-1\}$. В силу п. 3 той же леммы имеем: вершины $v_{-n},\ v_{-n+1},\ \ldots,\ v_{-1}$ окрашены правыми цветами из $B_\phi(k)$ (т.е. цветами от $(k-n)$ до $(k-1)$). Согласно п. 4 леммы 2 в их палитре есть средние цвета. Значит, вершинам $v_{-2n},\ v_{-2n+1},\ \ldots,\ v_{-n-1}$ соответствуют средние цвета. Применим теперь к вершинам $v_{-n+1},\ v_{-n+2},\ \ldots,\ v_{-1}$ следствие 1 и получим продолжение $\phi(T)$ влево на n вершин: $((k-n+1)\ (k-n+2)\ \ldots\ (k-1)\ k)$. Повторив аналогичные шаги для вершин $v_{k+1},\ v_{k+2},\ \ldots,\ v_{k+n}$, получим также продолжение $\phi(T)$ вправо на n вершин: $(1\ 2\ \ldots\ n)$.

По продолжению $\phi(T)$ влево и вправо на n вершин совершенная раскраска всего графа восстанавливается однозначно, при этом ее период равен $[1\ 2\ \ldots\ k]$. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что совершенные раскраски графа $C_\infty(\widetilde{n})$ с периодами $S_{12}(k)$ и $S_{21}(k)$ эквивалентны, поскольку вторая совпадает с первой после переобозначения цветов.

Заключение

С учетом результатов, полученных в данной работе, для завершения описания совершенных k-раскрасок графов $C_\infty(\widetilde{n})$ осталось перечислить все их периоды для $2 < k \leq 3n+2$.

Мы полагаем, что и для графа $C_\infty(d_1, d_2, \ldots d_n)$ существует оценка $K(d_n)$ такая, что его совершенные k-раскраски при $k \geq K(d_n)$ исчерпываются раскрасками с периодами $(1)-(5)$.

References

[1] D.B. Khoroshilova, *On the parameters of perfect 2-colorings of circulant graphs*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **18**:6 (2011), 82–89. Zbl 1249.05121

[2] D.B. Khoroshilova, *On circular perfect two-color colorings*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **16**:1 (2009), 80–92. Zbl 1249.05119

[3] O.G. Parshina, *Perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances*, J. Appl. Ind. Math., **8**:3 (2014), 357–361. Zbl 1324.05064

[4] O.G. Parshina, M.A. Lisitsyna, *The perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of odd distances*, Sib. Èlectron. Math. Izv., **17** (2020), 590–603. Zbl 1440.05095

[5] M.A. Lisitsyna, O.G. Parshina, *Perfect colorings of the infinite circulant graph with distances 1 and 2*, J. Appl. Industr. Math., **11**:3 (2017), 381–388. Zbl 1399.05079

[6] O.G. Parshina, *Perfect k-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances*, in A. Makhnev (ed.) et al., *Groups and Graphs, Algorithms and Automata*, Int. Conf. PhD Summer Sch., Yekaterinburg, Russia, Aug. 9–15, 2015, 80.

[7] V.D. Plaksina, P.A. Shcherbina, *New perfect colorings of infinite circulant graphs with continuous sets of distanses*, Sib. Èlectron Mat. Izv., **18**:1 (2021), 530–533. Zbl 1462.05144

[8] M.A. Lisitsyna, S.V. Avgustinovich, *Test fragments of perfect colorings of circulant graphs*, Sib. Èlectron Mat. Izv., **20**:2 (2023), 638–645.

[9] D. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of graphs. Theory and applications*, J. A. Barth Verlag, Leipzig, 1995. Zbl 0824.05046

Mariya Aleksandrovna Lisitsyna
Mozhaisky Military Space Academy,
Zhdanovskaya, 13,
197198, St Petersburg, Russia
Email address: `lisitsyna.mariya.mathematician@gmail.com`

Sergey Vladimirovich Avgustinovich
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: `avgust@math.nsc.ru`