S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 1, стр. 259–265 (2024) УДК 514.772
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.018 MSC 01A60, 53C18, 53C45

КАК Я СТАЛ ЗАНИМАТЬСЯ ДВУМЕРНЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНЫ[1]

Ю.Г. РЕШЕТНЯК[2]

Представлено Ю.Л. Трахининым

Abstract: These are memories of how I got involved in research on two-dimensional manifolds of bounded curvature. The main events take place in Leningrad at the geometry seminar of A.D. Alexandrov in the 1950s.

Keywords: Leningrad University, A.D. Alexandrov, convex surface, manifold of bounded curvature, isothermal coordinates.

В тридцатые годы прошлого века на горизонте советской математики появилась новая яркая фигура — Александр Данилович Александров. Это был активно работающий молодой математик, человек с незаурядным талантом и ярким темпераментом. Ему принадлежат исследования по теории выпуклых тел, продолжающие работы Г. Минковского.

[1]На английском языке эта статья опубликована в качестве первой главы “How I got involved in research on two-dimensional manifolds of bounded curvature” книги F. Fillastre, D. Slutskiy (eds.) “Reshetnyak’s Theory of Subharmonic Metrics”, Springer, Cham (2023). ISBN 978-3-031-24254-0. DOI: 10.1007/978-3-031-24255-7. Более того, эта статья была написана специально для указанной книги так, что именно о ней идёт речь каждый раз, когда в статье упоминается об «этой книге». Статья на русском языке предоставлена редколлегии Надеждой Юрьевной Скалон, дочерью Ю.Г. Решетняка.

[2]Академик Российской академии наук Юрий Григорьевич Решетняк родился 26 сентября 1929 г. в Ленинграде, умер 17 декабря 2021 г. в Новосибирске.

Reshetnyak, Yu.G. How I got involved in research on two-dimensional manifolds of bounded curvature.

Поступила 16 декабря 2023 г., опубликована 21 марта 2024 г.

Среди его результатов по теории выпуклых тел, пользовавшихся особой известностью в те годы, были теоремы, связанные с проблемой Г. Вейля.

Проблема Г. Вейля состоит в следующем.

Если на двумерной поверхности, гомеоморфной сфере, задана какая-то риманова метрика, причём гауссова кривизна этой метрики положительна в каждой точке, то можно ли в трёхмерном евклидовом пространстве построить замкнутую выпуклую поверхность, метрика которой будет совпадать с заданной? Для аналитических метрик эта проблема была решена положительно самим Г. Вейлем ещё в 1916 году. Однако, для завершения предложенного им доказательства нужно было получить некоторые оценки для решений дифференциальных уравнений второго порядка. Эти оценки получил в 1935 году Ганс Леви, который, тем самым, и завершил решение проблемы Г. Вейля для аналитических метрик.

А.Д. Александров указал аналог проблемы Г. Вейля для случая, когда метрика является многогранной, и доказал теорему, дающую положительное решение этой проблемы. Сейчас эта теорема известна как теорема А.Д. Александрова о существовании выпуклого многогранника с данной развёрткой.

Эта работа произвела впечатление на математиков того времени, и Александр Данилович был удостоен Сталинской премии в области науки за 1941 год. Сталинские премии за 1941 год были присуждены в 1942 году, и Александр Данилович получил премию II степени. Но и за II степень полагалось достаточно приличное, особенно по тем временам, вознаграждение в размере 100 000 рублей.

1942 год был очень тяжёлым для Советского Союза. Уже больше года шла кровопролитная Великая Отечественная война. До войны под руководством А.Д. Александрова в Ленинградском университете исследования по теории выпуклых тел вела группа молодых геометров, состоявшая из С.П. Оловянишникова, И.М. Либермана, П.О. Костелянца, и В.А. Залгаллера.

Все они ушли на войну, а в 1945 году в университет вернулся только Залгаллер — единственный, кто остался в живых. Конец 1942 года был очень тяжёлым, ведь только в феврале 1943-го стало ясно, что мы побеждаем в боях, идущих под Сталинградом.

Возвращаясь к исследованию проблемы Г. Вейля А.Д. Александровым, нужно сказать, что оно потребовало установления некоторых фактов, которые, казалось, не имеют к ней прямого отношения. И тут Александр Данилович пришёл к идее рассматривать внутреннюю геометрию выпуклых поверхностей как таковую. Исследования Александрова, удостоенные Сталинской премии, включали в себя две работы. Одна была посвящена решению проблемы о существовании выпуклого многогранника с данной развёрткой. Другая — исследованию внутренней геометрии произвольной выпуклой поверхности. В этой работе А.Д. Александров фактически создал новый раздел геометрии.

Он мне как-то говорил, что в 1942 году, когда ему было всего 30 лет, так что он был ещё молодым, старшие товарищи говорили ему, что теорема, которую он доказал в связи с проблемой Г. Вейля, это хорошая вещь, а всё остальное, что он делает, — это ерунда, это не так интересно.

Это «не очень интересное» и было той новой идеологией, которую Александр Данилович внёс в геометрию. Оно и было тем, что отличало его подход от подхода классической дифференциальной геометрии, изучающей геометрические объекты средствами дифференциального и интегрального исчисления. Это было начало теории многообразий ограниченной кривизны.

Александр Данилович изложил начала теории многообразий ограниченной кривизны в своей книге «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей», изданной уже после войны в 1948 году. Можно сказать, что в этой книге была построена часть будущей теории двумерных многообразий ограниченной кривизны для многообразий, у которых гауссова кривизна в каждой точке ограничена снизу. В связи с этой книгой я вспоминаю такую историю. Я шёл в компании геометров, включая Александра Даниловича, по Среднему проспекту Васильевского острова Ленинграда в районе 8-й линии. Когда мы проходили мимо книжного магазина, Александр Данилович предложил нам зайти в этот магазин. Там он купил свою книгу «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей» и подарил мне купленный им экземпляр с надписью «Товарищу Решетняку от автора». Я был этим страшно смущён и очень доволен.

В 1947 году Александр Данилович был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР. С 1952 по 1964 годы он был ректором Ленинградского государственного университета. Он и в эти годы активно занимался математикой. В частности, когда я был студентом Ленинградского университета, в университете работал геометрический семинар под руководством Александра Даниловича. Он проходил еженедельно в одном из залов математико-механического факультета.

Так вот, можно сказать, что книга «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей» представляла собой только первую главу теории многообразий ограниченной кривизны. Развитием этой теории Александр Данилович занимался уже в 1950-е годы. Этому посвящена его книга «Двумерные многообразия ограниченной кривизны», вышедшая в 1962 году, к написанию которой он привлёк В.А. Залгаллера. Некоторые вопросы теории двумерных многообразий ограниченной кривизны живо обсуждались на геометрическом семинаре. Так что участники семинара были в курсе этой совместной работы А.Д. Александрова и В.А. Залгаллера. В частности, всем участникам семинара, в том числе и мне, было известно, что такое многообразие ограниченной кривизны.

В 1953 году, читая книгу В. Бляшке «Дифференциальная геометрия» (перевод на русский язык), я обратил внимание на раздел, в котором речь шла о так называемых изотермических координатах. Размер области, в которой можно ввести такие координаты, определяется исключительно её топологией. Этим изотермические координаты отличались от всех других систем координат, например, от геодезических координат, которые даже в гладком случае могут быть определены лишь в достаточно малой окрестности данной точки. Я стал думать о том, можно ли построить изотермические координаты для двумерных многообразий ограниченной кривизны. После некоторых размышлений я пришел к результату, который поспешил сообщить Александру Даниловичу. Весной 1953 года, когда я был на втором году аспирантуры, на одном из заседаний геометрического семинара я подошёл к Александрову и сказал, что могу доказать следующую теорему:

«В окрестности каждой точки двумерного многообразия ограниченной кривизны можно ввести такую систему координат, в которой метрика будет задаваться линейным элементом $ds^2 = \lambda(x,y)(dx^2 + dy^2)$. Функция λ при этом такова, что её логарифм есть разность двух субгармонических функций. Обратно, если метрика в некоторой плоской области определяется линейным элементом указанного типа, причём логарифм функции λ есть разность двух субгармонических функций, то эта метрика превращает область в многообразие ограниченной кривизны».

Александр Данилович ничего на это мне не ответил.

Но на следующем семинаре, через неделю, он спросил меня, доказал я эту теорему или нет. Я был вынужден сознаться, что доказательства у меня нет. Дело в том, что там были детали, которые при беглом взгляде на проблему кажутся несущественными. Но когда вникнешь, то оказывается, что в них-то всё и упирается. В общем, в тот момент я ещё не знал, как эту теорему доказать. И тогда Александр Данилович сказал несколько слов, в которых отрицательно оценил моё пребывание в аспирантуре. Это было, конечно, в целом несправедливо потому, что за время пребывания в аспирантуре, кроме этой теоремы, я доказал по крайней мере три теоремы на разные темы. Но доля истины в словах Александра Даниловича, конечно, была. Я и до сих пор не научился хорошо излагать на бумаге то, что мне пришло в голову. Это у меня всегда не очень хорошо получалось и сильно меня тормозило. Так или иначе, но это замечание Александра Даниловича меня подтолкнуло и заставило работать.

Летом 1953 года я понял, как можно преодолеть эту трудность, которая мешала мне довести доказательство теоремы до конца. И я начал писать изложение своего доказательства. Обычно это происходило так, что я аккуратно продумывал некоторый фрагмент доказательства от начала до конца, записывал его полностью так, что при записи все недостатки доказательства выходили на поверхность, становились очевидными, и можно было думать, как их исправить. Таким образом доказательство было полностью записано в течение месяца, а именно — в течение сентября 1953 года. Так было получено доказательство даже более общей теоремы, чем та, которую я сформулировал Александру Даниловичу. По его указанию я написал краткую заметку с изложением своих результатов и опубликовал её в 1954 году в Докладах Академии наук СССР. Статья была представлена академиком В.И. Смирновым и её перевод включён в эту книгу.

В начале 1954 года на одном из семинаров Александров мне сказал: «Вам надо бы кандидатскую диссертацию написать». В 1954 году я был на третьем, последнем курсе аспирантуры. Я сказал: «А разве то, что я рассказывал осенью, не годится для кандидатской диссертации»? «Нет, — сказал Александр Данилович, — это Вы приберегите для докторской». Тогда я всё это отставил и начал работать в другом направлении, связанном с теорией нерегулярных кривых. В результате получилась кандидатская диссертация «О длине и повороте кривой и о площади поверхности». Она была весьма объёмистой, 206 страниц машинописного текста, и никак не была связана с изотермическими координатами. Там были совсем другие результаты, которые я тоже получил во время пребывания в аспирантуре в ходе реализации общей программы, предложенной А.Д. Александровым.

Надо сказать, что диссертация была написана наспех и имела существенные недостатки. Один из них был связан с определением кривой. Мне не нравилось классическое определение кривой, согласно которому кривая — это класс эквивалентных параметризованных кривых. И я предложил некоторое своё определение, но сформулировал его неудачно. Одним из оппонентов на защите был специалист в области теории функций вещественной переменной С.М. Лозинский. Он меня страшно изругал за моё неудачное определение кривой и в своём отзыве написал, что оно существенно снижает научную ценность диссертации. Он был, конечно, прав, но доказанное мной будет верно при любом разумном определении кривой, а уж что такое кривая — все и так знают. Однако, во время голосования были голоса против моей диссертации. Вторым оппонентом был Юрий Фёдорович Борисов, который во всём разобрался и, как я считаю, спас меня в тот момент. Дело в том, что автореферат диссертации не был продуман. Из него невозможно было понять, что же на самом деле сделано в диссертации. Но Юрий Фёдорович просто пересказал, что в такой-то главе сделано то-то и получен такой-то результат, т.е. сделал подробный обзор по главам. А на недостаток, который отметил С.М. Лозинский, он и внимания не обратил. Так что в значительной степени благодаря выступлению Ю.Ф. Борисова, моя кандидатская диссертация была защищена.

Самое главное, что было придумано и доказано в диссертации — это интегрально-геометрические теоремы для интегральной кривизны и интегрального кручения. Как я установил, интегральная кривизна пространственной кривой выражается в виде интеграла от интегральных кривизн её проекций на прямые. Эту теорему я придумал, увидев работу В.А. Залгаллера, в которой аналогичный результат был доказан для длины. Когда я рассказал эту теорему на семинаре, Александр Данилович сказал: «Какие красивые соотношения!» С помощью этой техники я решил и одну задачу, поставленную Александром Даниловичем. Смысл в том, что сначала нужно было решить задачу в простейшем случае, т.е. для кривой, либо лежащей в одной прямой, либо лежащей в одной плоскости и состоящей из конечного числа выпуклых дуг, либо лежашей на сфере. Тогда Залгаллер сказал, что не может быть, чтобы такая простая вещь никем не была ранее доказана.

После этого я порылся в литературе и установил, что в случае проектирования на прямую аналогичный результат для интегральной кривизны был доказан Джоном Милнором в 1950 году. Им же было дано приложение этого результата, интересное само по себе. Оно состоит в следующем. Известна теорема В. Фенхеля о том, что интегральная кривизна замкнутой кривой в пространстве не меньше 2π. Милнор же доказал, что если эта кривая заузлена, то её интегральная кривизна будет не меньше 4π, причём сделал он это именно с помощью своей интегрально-геометрической теоремы. Кроме того, в 1951 году аналогичную теорему про интегральную кривизну заузленных кривых доказал Иштван Фари и опубликовал её на французском языке. Таким образом, я был не первым, кто придумал и применил интегрально-геометрические теоремы для интегральной кривизны. Но интегрально-геометрическую теорему для кручения впервые доказал я. В последующие годы я не раз возвращался к этой тематике. В наиболее полном виде относящиеся сюда результаты опубликованы в книге «General Theory of Irregular Curves», написанной мною совместно с А.Д. Александровым и впервые изданной в 1989 году.

В 1957 году я переехал в Новосибирск, в только что созданный Академгородок. Я стал работать в Институте математики Сибирского отделения Академии наук СССР (сейчас он называется Институтом математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук) и стал преподавать на механико-математическом факультете Новосибирского государственного университета. С тех пор я постоянно, можно сказать, безвылазно живу в Новосибирске. Тогда в Академгородке было два молодых математика, довольно часто обсуждавших математические вопросы с академиком М.А. Лаврентьевым — одним из основателей Академгородка и председателем Сибирского отделения Академии наук — это были П.П. Белинский и Ю.Г. Решетняк.

Однажды М.А. Лаврентьев сказал, что П.П. Белинскому и мне нужно бы написать докторские диссертации. Мы были кандидатами наук, когда приехали в Сибирское отделение в 1957 году.

У меня диссертация была готова. В дополнение к теореме о существовании изотермических координат нужно было показать, каким образом эти координаты могут быть использованы при изучении двумерных многообразий ограниченной кривизны. Эта часть работы была выполнена уже в Новосибирске. Как уже упоминалось выше, краткое изложение полученных результатов было опубликовано в 1954 году в Докладах Академии наук СССР, а перевод этой статьи включён в эту книгу. Подробное изложение было приведено непосредственно в тексте моей докторской диссертации. Однако, уже после того, как диссертация была мной написана, оказалось, что порядок защиты диссертаций изменился: теперь требовалось, чтобы были публикации. Поэтому я написал сначала краткое резюме диссертации, и оно было опубликовано в 1959 году в журнале «Известия Сибирского отделения АН СССР». А уже полный текст диссертации со всеми доказательствами я опубликовал в двух статьях в Сибирском математическом журнале в 1960 году. Переводы всех трёх только что упомянутых статей включены в эту книгу. Таким образом, к моменту защиты диссертации все результаты, выносимые на защиту, были опубликованы.

Докторскую диссертацию я защитил в 1960 году. Но после защиты она очень долго лежала без движения в Москве в канцелярии Высшей аттестационной комиссии (ВАК) — государственном органе, отвечающем за обеспечение государственной аттестации научных и научно-педагогических работников. Когда член-корреспондент по Сибирскому отделению АН Андрей Васильевич Бицадзе осведомился, в чём дело, ему сказали, что ВАК приняла новые правила защиты диссертаций, которые делали мою защиту недействительной. Одно из этих новых правил состояло в том, что нельзя защищать диссертацию в том учреждении, где работает соискатель. Я защищался в диссертационном совете при Президиуме Сибирского отделения АН СССР, а работал в Институте математики Сибирского отделения АН СССР. ВАКовские чиновники посчитали, что в моём случае указанное правило было нарушено. Бицадзе сообщил об этом Лаврентьеву, который этим возмутился — он в своё время договорился с руководством ВАК, что сотрудники институтов СО АН могут защищать диссертации в диссертационном совете при Президиуме Сибирского отделения. После звонка Лаврентьева в ВАК диссертация была направлена на отзыв академику А.Д. Александрову, который, для приличия подержав диссертацию пару месяцев, дал положительный отзыв.

Новосибирск
Россия
19 ноября 2021