S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 1, стр. 405–416 (2024) УДК 512.552
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.030 MSC 16P10

КОНЕЧНЫЕ КОЛЬЦА С АЦИКЛИЧЕСКИМИ СЖАТЫМИ ГРАФАМИ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ

А.С. Монастырева

Представлено С.В. Судоплатовым

Abstract: We describe all associative finite rings that have acyclic compressed zero-divisor graphs.

Keywords: associative ring, finite ring, zero-divisor graph, compressed zero-divisor graph.

1 Введение

В данной работе рассматриваются ассоциативные кольца (не обязательно коммутативные и не обязательно имеющие единицу).

Пусть R – произвольное кольцо. Для каждого элемента $x \in R$ положим $l(x) = \{a \in R;\ ax = 0\}$ и $r(x) = \{a \in R;\ xa = 0\}$. Пусть $D(R)$ – множество делителей нуля (односторонних и двусторонних) кольца R и $D(R)^* = D(R) \setminus \{0\}$. Обозначим $\mathrm{Ann}(R) = \{a \in R;\ aR = Ra = (0)\}$. Через $J(R)$ обозначим *радикал Джекобсона* кольца R. Конечное кольцо R с единицей называется *локальным*, если фактор-кольцо $R/J(R)$ является полем [1].

Графом делителей нуля $\Gamma(R)$ кольца R называют граф, вершинами которого являются ненулевые делители нуля кольца (односторонние и

Monastyreva, A.S., Finite Rings with Acyclic Zero-Divisor Graphs .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00155, https://rscf.ru/project/24-21-00155/.

Поступила 19 февраля 2024 г., опубликована 23 июня 2024 г.

двусторонние), причем различные две вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$.

Понятие графа делителей нуля для коммутативного кольца было введено Д. Андерсоном, П. Ливингстоном в работе [1]. Позже в работе [2] это понятие было обобщено для некоммутативного кольца (определение графа делителей нуля именно из этой работы мы и сформулировали выше). В частности, С. Редмонд доказал, что граф делителей нуля ассоциативного кольца является связным и его диаметр не превосходит трех.

С 1999 года вышел ряд работ, посвященных графам делителей нуля ассоциативных колец. Однако скоро стало понятным, что изображение графа делителей нуля даже для колец небольших порядков часто является сложным, а для больших порядков почти невозможным. Возникла необходимость разбить множество вершин графа делителей нуля на классы, причем так, чтобы не нарушалось представление о строении графа делителей нуля в целом. В работах [3, 4] предложили довольно естественный способ решения этой проблемы для коммутативного случая. В статье [5] этот подход был обобщен на некоммутативный случай. Изложим суть этого метода. Введем отношение эквивалентности на множестве $D(R)^*$ следующим образом:

$$\text{для любых} \quad x, y \in D(R)^* \quad x \sim y \Leftrightarrow l(x) \cup r(x) = l(y) \cup r(y).$$

Обозначим через $[x]$ класс эквивалентности элемента $x \in D(R)^*$. Для любых $a \in [x]$, $b \in [y]$, где $x, y \in D(R)^*$, очевидно, что $ab = 0$ или $ba = 0$ тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$. Обозначим через $\Gamma_{\sim}(R)$ граф, множеством вершин которого является множество $\{[x];\ x \in D(R)^*\}$, причем две вершины $[x]$, $[y]$ (не обязательно различные) будем соединять ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$. Граф $\Gamma_{\sim}(R)$ будем называть *сжатым графом делителей нуля* кольца R.

В работе [5] был доказан следующий факт:

Предложение 1.1 (см. [5]). *Пусть R – произвольное кольцо и $x \in D(R)^*$. Если $x^2 = 0$, то $yz = 0$ или $zy = 0$ для любых $y, z \in [x]$; если же $x^2 \neq 0$, то $yz \neq 0$ и $zy \neq 0$ для любых $y, z \in [x]$.*

Из предложения 1.1 следует, что в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ все вершины делятся на два типа. Если $x^2 = 0$, то $[x]$ – это вершина с петлей. Если $x^2 \neq 0$, то $[x]$ – это вершина без петли. Зная, сколько элементов содержится в каждом классе $[x]$, мы всегда от сжатого графа делителей нуля можем перейти к обычному графу делителей нуля. Ясно, что сжатый граф делителей нуля конечного ассоциативного кольца также связен и его диаметр не больше трех. Кроме того, в сжатом графе нильпотентные элементы индекса нильпотентности два выделены петлей. Отметим, что не всякий связный граф может являться сжатым графом делителей нуля для какого-нибудь кольца. Например, если взять отрезок $[a] - [b]$, где обе вершины имеют петли, то он не является сжатым графом делителей нуля никакого кольца, поскольку вершины $[a]$ и $[b]$ на самом деле можно стянуть в одну вершину с петлей. И таких примеров много, причем не всегда причина в том, что граф не до конца сжат. В работе [5] описаны все связные графы делителей нуля (с петлями) на одной, двух и трех вершинах, которые являются сжатыми графами делителей нуля какого-либо конечного кольца. В статье [6] полностью описаны все связные графы с петлями на четырех вершинах, которые могут реализованы как сжатые графы делителей нуля конечных колец. Из 50 неизоморфных связных графов с петлями на четырех вершинах только 8, как оказалось, являются сжатыми графами делителей нуля какого-либо конечного кольца (см. [6]). Описаны полностью конечные кольца, сжатые графы делителей нуля содержат мост, вершины которого не являются висячими [7]. В работах [7, 8] получено описание конечных колец, сжатые графы делителей нуля которых являются полными (с петлями). В [10, 11] описаны сжатые графы делителей нуля всех коммутативных конечных локальных колец R характеристики p с радикалом Джекобсона J, таким, что $J^4=(0)$, $F=R/J\cong GF(p^r)$ и $\dim_F J/J^2=2$, $\dim_F J^2/J^3=2$, $\dim_F J^3=1$ or $\dim_F J/J^2=3$, $\dim_F J^2/J^3=1$, $\dim_F J^3=1$.

В настоящей работе мы полностью описываем конечные кольца, сжатые графы делителей нуля которых не содержат циклов, то есть являются *ациклическими*. Подчеркнем, что петли мы не рассматриваем как циклы. Поскольку граф делителей нуля ассоциативного кольца является связным, то фактически мы описываем конечные кольца, сжатые графы делителей нуля которых являются *деревьями*.

Нам понадобятся некоторые обозначения и определения.

Пусть аддитивная группа кольца R разлагается в прямую сумму своих аддитивных подгрупп A_i, где $i=1,\dots,n$ и $n\geq 2$, т.е. $R=A_1\dotplus\dots\dotplus A_n$. Если все подгруппы A_i являются двусторонними идеалами кольца R, то кольцо R называют *разложимым* и пишут $R=A_1\oplus\dots\oplus A_n$. Аддитивную подгруппу аддитивной группы кольца R, порожденную элементом $x\in R$, будем обозначать $\langle x\rangle$.

Элемент $e\in R$ называется *идемпотентом* кольца R, если $e=e^2$. Система ненулевых идемпотентов $e_1,\dots,e_k$ $(k\geq 2)$ кольца R называется *ортогональной*, если $e_ie_j=e_je_i=0$ для любой пары различных чисел $i,j\in\{1,2,\dots,k\}$. Далее, пусть R – произвольное кольцо (возможно, без единицы) и e – нетривиальный идемпотент кольца R, т.е. идемпотент, отличный от единицы (если она существует) и нуля. Обозначим

$$eRe=\{ere;\ r\in R\},\quad eR(1-e)=\{er-ere;\ r\in R\},$$

$$(1-e)Re=\{re-ere;\ r\in R\},(1-e)R(1-e)=\{r-re-er+ere;\ r\in R\}.$$

Тогда для аддитивной группы кольца R имеет место следующее разложение, называемое *двусторонним пирсовским разложением* (см. [9, С. 32]):

$$R = eRe \dotplus eR(1-e) \dotplus (1-e)Re \dotplus (1-e)R(1-e).$$

В кольце без единицы под записью $ex(1-e)$ мы будем понимать элемент $ex-exe$, аналогично $(1-e)xe = xe-exe$ и $(1-e)x(1-e) = x-ex-xe+exe$ для любого идемпотента $e \in R$ и для любого элемента $x \in R$.

Для любого подмножества S кольца R будем полагать $S^* = S \setminus \{0\}$. Обозначим также $l(S) = \{a \in R;\ aS = (0)\}$ и $r(S) = \{a \in R;\ Sa = (0)\}$.

2 Основной результат

В следующей теореме сформулирован основной результат этой статьи. Отметим, что для каждого случая в скобках мы указали, какой сжатый граф делителей нуля имеет данный тип кольца.

Теорема 1. *Пусть R – конечное кольцо. Сжатый граф делителей нуля кольца R является ациклическим тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

(1) *R является конечным полем ($\Gamma_\sim(R)$ является пустым графом);*

(2) *R – это локальное или нильпотентное кольцо, $J(R) \neq (0)$ и $J(R)^2 = (0)$ ($\Gamma_\sim(R)$ состоит из одной вершины с петлей);*

(3) *$R \cong GF(q) \oplus S$, где S – локальное кольцо, $J(S)^2 = (0)$ и $J(S) \neq (0)$ (граф $\Gamma_\sim(R)$ представляет из себя цепь из четырех вершин $[c]-[a]-[b]-[d]$, где только вершина $[b]$ имеет петлю).*

(4) *R – прямая сумма двух конечных полей (в графе $\Gamma_\sim(R)$ всего две вершины и обе вершины без петли).*

(5) *R – локальное кольцо либо нильпотентное, $J(R) \neq l(J(R)) \cup r(J(R))$, причем $xy \neq 0$ для всех элементов $x, y \notin l(J(R)) \cup r(J(R))$ (в графе всего две вершины: одна вершина с петлей, а вторая – без петли).*

(6) *R – ненильпотентное кольцо без единицы, $R = A \oplus B$, где $B^2 = (0)$ (возможно, B является нулевым), A – ненулевое подкольцо кольца R, $e = e^2 \in A$, $\bar{e}$ является единицей в фактор-кольце $A/J(A)$, $A = eAe \dotplus eA(1-e) \dotplus (1-e)Ae \dotplus (1-e)A(1-e)$, $eAe \cong GF(p^n)$ (p – простое число и $n \geq 1$), $eA(1-e) \subseteq l(A)$, $(1-e)Ae \subseteq r(A)$, $(1-e)A(1-e) = Ann(A)$ (граф $\Gamma_\sim(R)$ состоит из двух вершин $[b]$ и $[e]$, причем $[b]$ имеет петлю, а $[e]$ – без петли).*

(7) *кольцо R является локальным или нильпотентным,*
$J(R)^3 = (0)$, $J(R)^2 \neq (0)$, $x^2 = 0$ для всех $x \in J(R)$ и выполняется условие (1):
если $a \in J(R)$ таково, что найдутся элементы $x, y \in J(R)$, удовлетворяющие условиям $xy \neq 0, ax = ay = 0$, то тогда $a \in Ann(J(R))$
(условие (1) лишнее, если в графе $\Gamma_\sim(R)$ менее 6 вершин) (граф $\Gamma_\sim(R)$ – звезда типа I).

(8) *R является локальным или нильпотентным кольцом, причем выполняются два условия:*
   (a) *если $a \in J(R)$ таково, что найдутся $x, y \in J(R)$, удовлетворяющие условиям $xy \neq 0, x \neq y$, $x, y \in l(a) \cup r(a)$, то $az = 0$ или $za = 0$ для любого $z \in J(R)$;*
   (b) *в $J(R)$ существуют элементы z, t, такие, что $z^2 \neq 0$, $t^2 = 0$, $zt \neq 0$ и $tz \neq 0$*

   (граф $\Gamma_\sim(R)$ – звезда типа II).

(9) *R – ненильпотентное кольцо без единицы, $e^2 = e \in R$, $\overline{e}$ – единица в фактор-кольце $R/J(R)$, которое является полем, $J(R)^2 = (0)$, $J(eRe) \neq (0)$ (в $\Gamma_\sim(R)$ три вершины: $[b]$, $[d]$, $[a_1]$).*

Доказательство. Пусть R – конечное кольцо, такое что в его сжатом графе делителей нуля $\Gamma_\sim(R)$ нет циклов. Если граф $\Gamma_\sim(R)$ является пустым, то в кольце R нет делителей нуля и оно является полем. Конечные кольца, у которых сжатый граф делителей нуля состоит из одной вершины, описаны в [5]: это кольца из пункта (2) настоящей теоремы. Будем далее считать, что в графе $\Gamma_\sim(R)$ две или более вершины.

Известно, что диаметр графа делителей нуля $\Gamma(R)$ не превосходит 3 [2]. Следовательно, диаметр и сжатого графа делителей нуля не превосходит трех. Поэтому в графе $\Gamma_\sim(R)$ цепь может быть максимум длины 3. Пусть в графе $\Gamma_\sim(R)$ существует цепь длины три: $[c] - [a] - [b] - [d]$. Множество вершин графа $\Gamma_\sim(R)$, смежных с $[a]$, но не смежных с $[b]$, обозначим через A. Множество вершин, смежных с $[b]$, но не смежных с $[a]$, – через B. В частности, $[c] \in A$, $[d] \in B$ (напомним, в графе нет циклов). Поскольку в графе $\Gamma_\sim(R)$ нет циклов и его диаметр не превосходит трех, то вершины из множеств A и B являются висячими и в $\Gamma_\sim(R)$ нет других вершин, кроме $[a]$, $[b]$ и элементов множеств A и B. Таким образом, граф $\Gamma_\sim(R)$ содержит мост $[a] - [b]$, причем вершины моста $[a] - [b]$ не являются висячими. Кольца с такими графами полностью описаны в работе [7]: $|A| = 1, |B| = 1$, $R \cong GF(q) \oplus S$, где S – локальное кольцо, причем $J(S)^2 = (0), J(S) \neq (0)$ и граф $\Gamma_\sim(R)$ представляет из себя цепь $[c]-[a]-[b]-[d]$, где только вершина $[b]$ имеет петлю (это кольца типа (3) из формулировки теоремы).

Рассмотрим теперь случай, когда в графе $\Gamma_\sim(R)$ не существует цепи длины 3. Тогда этот граф является звездой, причем среди висячих вершин только одна может быть без петли, поскольку в звезде висячие вершины без петель можно объединить в одну. Если вершин всего две, то граф $\Gamma_\sim(R)$ представляет из себя отрезок и, в частности, является полным графом. Кольца с полными сжатыми графами полностью описаны ранее (см. [8, 7]). Это кольца (4), (5), (6) из формулировки настоящей теоремы.

Теперь можем считать, что граф $\Gamma_\sim(R)$ является звездой и содержит более двух вершин, то есть не является отрезком. Докажем, что центральная вершина звезды всегда имеет петлю. В работе [5] описаны все сжатые графы делителей нуля конечных колец, которые имеют ровно три вершины. Ациклическим является только один граф на трех вершинах: он представляет из себя цепь длины два: $[a]-[b]-[c]$, в которой вершина $[a]$ не имеет петли, а вершины $[b]$ и $[c]$ – с петлями (см. [5, Theorem 3]). Если же в графе $\Gamma_\sim(R)$ более трех вершин, то в нем есть по крайней мере две висячие вершины с петлями. Это означает, что центральная вершина звезды $\Gamma_\sim(R)$ имеет петлю (см. [6, Lemma 2.2]). Таким образом, если граф $\Gamma_\sim(R)$ является звездой и содержит более двух вершин, то его центральная вершина всегда имеет петлю, причем среди висячих вершин ровно одна может не иметь петлю. Если в графе $\Gamma_\sim(R)$ все вершины с петлями, то будем говорить, что он является *звездой типа I*, а если в графе $\Gamma_\sim(R)$ есть одна висячая вершина без петли, то будем говорить, что граф $\Gamma_\sim(R)$ является *звездой типа II* (в обоих случаях подразумевается, что вершин более двух). Кроме того, будем использовать следующие обозначения для вершин графа $\Gamma_\sim(R)$: $[b]$ – центральная вершина звезды (она всегда с петлей), $[d]$ – вершина без петли (ее может не быть), $[a_1],[a_2],\dots,[a_n]$ – все остальные вершины (и они все с петлями), причем в звезде типа I $n\geq 3$, а в звезде типа II $n\geq 1$.

В следующей лемме описывается ряд свойств кольца, у которого сжатый граф делителей нуля является звездой типа I или типа II.

Лемма 1. *Пусть R — конечное кольцо, у которого граф $\Gamma_\sim(R)$ является звездой типа I или типа II, и $1\leq i,j\leq n$. Тогда выполняются следующие условия:*

(1) $s_1s_2=s_2s_1=0$ *для всех* $s_1,s_2\in[a_i]$ *и для любого* i;
(2) $a_ib=ba_i=0$ *для всех* i;
(3) $b_1b_2=b_2b_1=0$ *для всех* $b_1,b_2\in[b]$;
(4) $a_ia_j\in[b]$ *для любой пары различных чисел* i,j;
(5) $db,bd\in[b]\cup\{0\}$;
(6) $d^4=0$, *если элемент* d *является нильпотентным.*

Доказательство. Пусть R — конечное кольцо, причем граф $\Gamma_\sim(R)$ является звездой типа I или типа II.

(1) Возьмем произвольные элементы $s_1,s_2\in[a_i]$ для некоторого числа $i\leq n$. Тогда $(s_1+s_2)s_1=0$ или $s_1(s_1+s_2)=0$. Если $s_1+s_2=0$, то $s_1s_2=-s_1^2=0=s_2s_1$. Если $s_1+s_2\in D(R)^*$, то $s_1+s_2\in[a_1]\cup[b]$.Следовательно, $(s_1+s_2)^2=0$. Поскольку $s_1^2=s_2^2=0$, а также $s_1s_2=0$ или $s_2s_1=0$, то и в этом случае $s_1s_2=s_2s_1=0$.

(2) Предположим, что $a_1b=0$, но $ba_1\neq 0$. Тогда $a_1(a_1+b)=0$, то есть a_1+b является ненулевым делителем нуля, причем $a_1+b\in[b]\cup[a_1]$. Это означает, что $(a_1+b)^2=0$, то есть $ba_1=0$; противоречие. Поэтому наше предположение было неверным и $a_1b=ba_1=0$.

(3) Пусть $b_1b_2\in[b]$. Тогда $b_1(b_1+b_2)=0$ или $(b_1+b_2)b_1=0$. Если $b_1+b_2=0$, то утверждение очевидно. Пусть $b_1+b_2\in D(R)^*$. Тогда

$(b_1 + b_2)a_i = 0$ для любого i (см. утверждение (2) настоящей леммы). Значит, $b_1 + b_2 \in [b]$ или $b_1 + b_2 \in [a_1]$ (второй случай может быть, если в звезде типа II всего одна висячая вершина). Поэтому $(b_1 + b_2)^2 = 0$. Следовательно, $b_1 b_2 = b_2 b_1 = 0$ и в этом случае.

(4) Поскольку $a_i a_j \neq 0$ при различных i, j и элемент $a_i a_j$ аннулирует элементы a_i и a_j одновременно, то $a_i a_j \in [b]$.

(5) Предположим, что $db = 0$ и $bd \neq 0$. Тогда $d(bd) = 0$, то есть $[bd] = [b]$.

(6) Пусть $d^n = 0$, $d^{n-1} \neq 0$, $n > 4$. Тогда $(d^2)^2 \neq 0$, то есть $d^2 \in [d]$. Поскольку $d^{n-2} \cdot d^2 = 0$, то $d^{n-2} \in [b]$. Но тогда и $d^{n-2} \cdot d = 0$; противоречие. Следовательно, $3 \leq n \leq 4$. Лемма доказана. □

Пусть $\Gamma_\sim(R)$ является звездой типа I. Заметим, что в R тогда не может быть ортогональных идемпотентов, то есть $R/J(R)$ является полем или $R = J(R)$ (см. [9]). Если R ненильпотентное и в нем нет единицы, то в R есть главный идемпотент e, который порождает вершину $[e]$ без петли, а вершин без петли в звезде типа I нет. Следовательно, R является локальным кольцом либо нильпотентным [9]. Заметим, что по только что доказанной лемме в $J(R)$ не может быть ненулевых слов длины 3, так как $a_i a_j \in [b]$ при различных i, j, а все элементы из $[b]$ аннулируют элементы множества $D(R) = J(R)$ с обеих сторон. Таким образом, $J(R)^3 = (0)$ и $[b] \cup \{0\} = Ann(J(R))$. В частности, если $ax = ay = 0$ и $xy \neq 0$ для некоторых $a, x, y \in J(R)^*$, то вершины $[x]$ и $[y]$ – это различные вершины, которые не смежные между собой, но смежные с вершиной $[a]$. В силу того, что сжатый граф делителей нуля кольца R является звездой, следует, что $[a] = [b]$, то есть $a \in Ann(J(R))$. Итак, кольцо R является кольцом типа (7) из формулировки теоремы. Заметим, что условие (1) для случая, когда в графе $\Gamma_\sim(R)$ не более пяти вершин, можно опустить. Это мы докажем ниже, когда будем доказывать обратное утверждение для пунктов (7) и (8) теоремы.

Пусть граф $\Gamma_\sim(R)$ – звезда типа II. Тогда в R не может быть ортогональных идемпотентов. Поэтому кольцо R либо нильпотентно, либо $R/J(R)$ является полем. Пусть R является локальным или нильпотентным. Докажем, что кольцо R является кольцом из пункта (8) настоящей теоремы. В этом случае $D(R) = J(R)$ [9]. Тогда условие $x, y \in l(a) \cup r(a)$ для некоторых $a, x, y \in J(R)$, таких, что $xy \neq 0$, равносильно тому, что либо $[x] = [y]$ является вершиной без петли, либо $[x]$ и $[y]$ – две различные вершины, не смежные друг с другом. В обеих случаях это означает, что $[a] = [b]$, то есть $az = 0$ или $za = 0$ для любого $z \in J(R)$. Таким образом, пункт (a) выполняется. Поскольку $\Gamma_\sim(R)$ – это звезда типа II, то в нем есть как минимум три вершины: $[b], [d]$ и $[a_1]$. Положим $z = d$ и $t = a_1$ и увидим, что пункт (b) тоже выполняется.

Рассмотрим теперь подробнее случай, когда $\Gamma_\sim(R)$ – звезда типа II и R не является ни нильпотентным, ни локальным. Поскольку в кольце R нет ортогональных идемпотентов, то оно либо локальное, либо не содержит единицу. Итак, R – ненильпотентное кольцо без единицы. Тогда все его элементы являются делителями нуля [9]. Далее, в R есть главный идемпотент e, то есть $\overline{e}$ – единица в фактор-кольце $R/J(R)$, $R/J(R)$ является полем и, в частности, eRe является локальным кольцом. Докажем, что в этом случае R является кольцом типа (9) из формулировки теоремы. Покажем сначала, что $J(eRe)+eR(1-e)+(1-e)Re+(1-e)R(1-e) = J(R)$. Действительно, $J(eRe)+eR(1-e)+(1-e)Re+(1-e)R(1-e) \subseteq J(R)$, так как элемент $\overline{e}$ является единицей в поле $R/J(R)$ и $J(eRe) = J(R) \cap eRe$ [9]. Обратно, возьмем произвольный элемент $x = ex_1e + ex_2(1-e) + (1-e)x_3e + (1-e)x_4(1-e) \in J(R)$. Докажем, что $ex_1e \in J(eRe)$. Поскольку $\overline{e}$ – единица в $R/J(R)$, то $x = ex_1e + z$, где $z = ex_2(1-e) + (1-e)x_3e + (1-e)x_4(1-e) \in J(R)$. Отсюда $ex_1e = x - z \in J(R) \cap eRe = J(eRe)$ [9, С. 75]. Итак, обратное включение доказано. Предположим, что некоторый элемент $eje + em(1-e) + (1-e)le + (1-e)t(1-e)$, где $eje \notin J(eRe)$, в квадрате равен нулю. Тогда $(eje)^2 + em(1-e)le = 0$, так как сумма групп в пирсовском разложении является прямой. Значит, $(eje)^2 = -em(1-e)le = -em(1-e) \cdot (1-e)le \in eR(1-e) \cdot (1-e)Re \subseteq J(R)^2$. Тогда элемент eje локального кольца eRe является нильпотентным, то есть $eje \in J(eRe)$; противоречие. Таким образом, все элементы такого вида не могут в квадрате быть равными нулю. Поэтому $[e] = [d]$ и $eRe \setminus J(eRe) + eR(1-e) + (1-e)Re + S \subseteq [e]$ (вершина $[d]$ содержит все элементы кольца R, которые в квадрате не равны нулю). Кроме того, элементы из множеств $eR(1-e)+(1-e)R(1-e)$ и $(1-e)Re+(1-e)R(1-e)$ аннулируются идемпотентом e хотя бы с одной стороны, поэтому все ненулевые элементы этих множеств содержатся в вершине $[b]$. По лемме 1(3) множества $eR(1-e), (1-e)Re$ и $(1-e)R(1-e)$ аннулируют друг друга с обеих сторон и каждое из них в квадрате равно нулю.

Если $J(eRe) = (0)$, то eRe является конечным полем. Далее, имеем, что $eRe^* + eR(1-e) + (1-e)Re + (1-e)R(1-e) \subset [e]$. Наконец, элементы из множества $eR(1-e)^* + (1-e)Re^* + (1-e)R(1-e)$ (если такие существуют) не аннулируют идемпотент e ни с одной стороны. Следовательно, могут лежать только в вершинах $[a_i]$ и $[e]$. Но произведение любых двух элементов из этой суммы равно нулю, так как $eR(1-e)^*, (1-e)Re^*, (1-e)R(1-e)^* \subset [b]$. Поэтому можно считать, что $eR(1-e)^* + (1-e)Re^* + (1-e)R(1-e) \subset [a_1]$ (если таких элементов не существует, то вершин в графе $\Gamma_\sim(R)$ всего две, граф $\Gamma_\sim(R)$ является полным и кольцо R является кольцом типа (6) из формулировки теоремы).

Теперь будем считать, что $J(eRe) \neq (0)$. Поскольку элементы из $J(eRe)^*$ не аннулируют e, то они все могут лежать только в вершинах $[a_i]$ и $[e]$. Но элементы из $J(eRe)^*$ не могут лежать в разных вершинах, поскольку $J(eRe)$ является нильпотентным подкольцом и, следовательно, имеет ненулевой аннулятор. Можем полагать, что $J(eRe)^* \subseteq [a_1]$. Тогда по лемме 1 имеем, что $J(eRe)^2 = (0)$. Более того, все элементы из последних трех пирсовских компонент аннулируют с обеих сторон элементы из суммы $J(eRe)^* + eR(1-e) + (1-e)Re + (1-e)R(1-e)$ (по лемме 1), то есть $J(R)^2 = (0)$. Значит, $J(eRe)^* + eR(1-e) + (1-e)Re + (1-e)R(1-e) \subseteq [a_1]$. Элементы из множества $eR(1-e)^* + (1-e)Re^* + (1-e)R(1-e)$ (если такие есть) не могут аннулировать элемент e, но должны аннулировать элементы из $J(eRe)^* + eR(1-e) + (1-e)Re + (1-e)R(1-e) \subseteq [a_1]$. Поэтому $eR(1-e)^* + (1-e)Re^* + (1-e)R(1-e) \subseteq [a_1]$.

Осталось доказать обратное утверждение для двух пунктов теоремы: (7) и (8). Заметим, что для локального кольца R $\Gamma_\sim(R) = \Gamma_\sim(J(R))$[9, С. 74]. Поэтому достаточно доказать обратные утверждения для нильпотентного кольца из условий (7) и (8) настоящей теоремы. Во всех этих случаях в графе $\Gamma_\sim(R)$ есть вершина с петлей, смежная со всеми остальными: это та вершина, которая содержит $Ann(R)$. Будем далее эту вершину обозначать через $[b]$ (как и для звезд типа I и II).

Итак, пусть R – нильпотентное кольцо, $R^3 = (0)$, $R^2 \neq (0)$, $x^2 = 0$ для всех $x \in R$. Докажем, что граф $\Gamma_\sim(R)$ в этом случае – это звезда типа I. Заметим, что в этом случае все вершины с петлями. Поскольку $x^2 = 0$ для всех $x \in R$, то кольцо R *коммутативно по нулю*, то есть $xy = 0$ тогда и только тогда, когда $yx = 0$ для всех $x, y \in R$. Это следует из того, что $(x+y)^2 = 0$ для всех $x, y \in R$, то есть $xy = -yx$. Так как $R^2 \neq (0)$, то граф $\Gamma_\sim(R)$ содержит как минимум три вершины, из которых одна – это вершина $[b]$ с петлей, а две других – это $[x]$ и $[y]$ для элементов $x, y \in R$, таких, что $xy \neq 0$ (эти элементы не могут попасть в одну вершину, так как все вершины с петлями; также ни одна из вершин $[x]$ и $[y]$ не может совпасть с $[b]$, так как вершина $[b]$ смежна со всеми вершинами). Далее, если в графе $\Gamma_\sim(R)$ ровно три вершины, то это не может быть треугольник, иначе все три вершины (они же все с петлями) можно стянуть в одну. Таким образом, если вершин в графе ровно три, то граф $\Gamma_\sim(R)$ представляет из себя цепь на трех вершинах с петлями, то есть это звезда типа I. Пусть вершин в графе более трех, но менее шести. Предположим, что граф $\Gamma_\sim(R)$ не является звездой. Тогда в нем есть две различные вершины $[a_1]$ и $[a_2]$, отличные от $[b]$ и смежные между собой. Поскольку вершины $[a_1]$ и $[a_2]$ различные, то должна существовать еще одна вершина $[a_3]$, которая не смежна, например, с вершиной $[a_1]$, но смежна с $[a_2]$ (если такой вершины не существует, то вершины $[a_1]$ и $[a_2]$ можно стянуть в одну). В силу коммутативности по нулю кольца R вершина $[a_1 + a_3]$ не смежна с $[a_1]$ и $[a_3]$, но смежна с $[a_2]$. Поэтому вершина $[a_1 + a_3]$ не может совпасть ни с одной из вершин $[b], [a_i]$, $i = 1, 2, 3$, то есть это пятая вершина графа $\Gamma_\sim(R)$. Если других вершин в графе $\Gamma_\sim(R)$ нет, то вершину $[a_2]$, которая смежна со всеми вершинами в графе, можно стянуть с вершиной $[b]$, чего быть не может. Значит, есть еще одна вершина $[a_4]$, которая не смежна с $[a_2]$. Стало быть, в графе $\Gamma_\sim(R)$ минимум шесть вершин. Противоречие. Рассмотрим теперь случай, когда для R выполняется условие (1): $ax = ay = 0 \Leftrightarrow a \in Ann(R)$ для всех $a, x, y \in R$, таких, что $xy \neq 0$. Для завершения доказательства в этом случае достаточно взять $a = a_2$, $x = a_1$ и $y = a_3$. Тогда $ax =$

$ay = 0$ в силу коммутативности по нулю, $xy \neq 0$, но $a \notin Ann(R) = [b]$; противоречие доказывает этот случай.

Наконец, пусть R является нильпотентным кольцом, для которого выполняются следующие два условия:

(1) для всех $a, x, y \in R$, таких, что $xy \neq 0, x \neq y$, выполняется равносильность: $x, y \in l(a) \cup r(a) \Leftrightarrow az = 0$ или $za = 0$ для любого $z \in R$;
(2) найдутся $z, t \in R$, такие, что $z^2 \neq 0$, $t^2 = 0$, $zt \neq 0$, $tz \neq 0$

Докажем, что граф $\Gamma_{\sim}(R)$ – звезда типа II. Заметим, что в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ есть по крайней мере три вершины: $[b]$, $[t]$, $[z]$, причем $Ann(R) \subseteq [b]$, вершины $[t]$ и $[z]$ не смежны друг с другом, вершины $[b]$ и $[t]$ имеют петли, а вершина $[z]$ – без петли. Докажем, что вершина $[z]$ является висячей. Пусть существует вершина $[w]$, отличная от $[b]$, которая тоже смежна с $[z]$. Тогда для любых различных $z_1, z_2 \in [z]$ (если такие существуют) имеем, что $z_1 z_2 \neq 0$, $z_1, z_2 \in l(w) \cup r(w)$. По условию это влечет, что $[w]$ – это вершина с петлей, смежная со всеми остальными. Значит, ее можно объединить в одну вершину с вершиной $[b]$. Противоречие. Следовательно, вершина $[z]$ содержит только один элемент – это z, чего быть не может, так как $[z] = [z + j]$ для любого ненулевого элемента $j \in Ann(R)$. Новое противоречие показывает, что вершина $[z]$ является висячей. Аналогичные рассуждения показывают, что любая другая вершина без петли (если она существует), тоже является висячей, то есть смежной только с вершиной $[b]$, но это означает, что мы можем все вершины без петель стянуть в одну. Итак, в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ ровно одна вершина без петли – это вершина $[z]$, и она является висячей. Если вершин всего три, то все доказано: граф $\Gamma_{\sim}(R)$ это цепь $[z]-[b]-[t]$, то есть является звездой типа II. Предположим, что вершин более трех. Обозначим через $[s]$ четвертую вершину. В силу доказанного выше она имеет петлю и не смежна с вершиной $[z]$. Если в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ все вершины с петлями, отличные от $[b]$, являются висячими, то все доказано. Предположим противное. Тогда, не нарушая общности, можем считать, что вершины $[t]$ и $[s]$ смежны друг с другом. Должна существовать еще одна вершина $[v]$, которая смежна с одной из вершин $[t]$ и $[s]$, но не смежна с другой из них (иначе вершины $[t]$ и $[s]$ можно стянуть). Будем полагать, что $[v]$ смежна с $[s]$, но не смежна с $[t]$. Тогда $tv \neq 0$ и $t, v \in l(s) \cup r(s)$. По условию это влечет, что $[s]$ смежна со всеми вершинами в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ и ее можно стянуть с вершиной $[b]$. Противоречие доказывает, что все вершины в графе $\Gamma_{\sim}(R)$, кроме вершины $[b]$, являются висячими, причем в графе $\Gamma_{\sim}(R)$ ровно одна вершина без петли. Таким образом, граф $\Gamma_{\sim}(R)$ является звездой типа II. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть R — конечное кольцо, у которого граф $\Gamma_{\sim}(R)$ является ациклическим порядка более 3. Тогда кольцо R либо нильпотентное, либо локальное.*

Отметим, что в работе [6] описаны все сжатые графы делителей нуля конечных колец на четырех вершинах. Если посмотреть список этих графов, то видно, что звезда и типа I и типа II на четырех вершинах возможна [6]. Мы привели примеры таких колец в примерах 1 и 2.

Пример 1. Рассмотрим $\mathbb{Z}_2$-алгебру $R = \mathbb{Z}_2 a_1 + \mathbb{Z}_2 a_2 + \ldots + \mathbb{Z}_2 a_n + \mathbb{Z}_2 z_1 + \mathbb{Z}_2 z_2 + \ldots + \mathbb{Z}_2 z_k$, где $n \geq 2$, $k = n(n-1)$, $a_1^2 = a_2^2 = ... = a_n^2 = 0$, $a_1 a_2 = z_1, a_2 a_1 = z_2, a_1 a_3 = z_3, \ldots, a_{n-1} a_n = z_{k-1}, a_n a_{n-1} = z_k$, $k = n(n-1)$, $Ann(R) = \{z_i;\ 1 \leq i \leq k\}$. Тогда сжатый граф делителей нуля этого кольца является звездой типа II:
$[a_1] = \{a_1, a_1 + z_1, a_1 + z_2, ..., a_1 + z_1 + z_2 + ... + z_k\}$,
$[a_2] = \{a_2, a_2 + z_1, a_2 + z_2, ..., a_2 + z_1 + z_2 + ... + z_k\}$, ...,
$[a_n] = \{a_n, a_n + z_1, a_n + z_2, ..., a_n + z_1 + z_2 + ... + z_k\}$,
$[d] = \{a_1 + a_2, a_1 + a_2 + z_1, a_1 + a_2 + z_2, ..., a_1 + a_2 + ... + a_n + z_1 + z_2 + ... + z_k\}$,
$[b] = \{z_1, z_2, z_1 + z_2, ..., z_1 + z_2 + ... + z_k\}$.
Ассоциативность кольца R следует из того, что произведение любых двух его элементов лежит в аннуляторе кольца R, то есть $R^3 = (0)$.

Пример 2. Пусть $R = \langle a \rangle \dot{+} \langle b \rangle \dot{+} \langle c \rangle \dot{+} \langle d \rangle$, где $2R = (0)$, $bR = Rb = (0)$, $x^2 = 0$ для всех $x \in R$ и $ad = da = ac = ca = dc = cd = b$. В этом случае $[b] = \{b, a + c + d, a + b + c + d\}$, $[a_1] = \{a, a + b, c + d, c + d + b\}$, $[a_2] = \{c, b + c, a + d, a + b + d\}$ и $[a_3] = \{d, b + d, a + c, a + b + c\}$, то есть граф $\Gamma_\sim(R)$ является звездой типа I.

В примерах 1 и 2 кольца нильпотентные. В следующем примере мы приведем ненильпотентное кольцо без единицы с ациклическим сжатым графом делителей нуля.

Пример 3. Пусть e_{ij} – матричные единицы. Рассмотрим кольцо $A_p = \{\alpha e_{11} + \beta e_{21};\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p\}$, где p – простое число, $\mathbb{Z}_p$ – кольцо классов вычетов по модулю p. Тогда в графе $\Gamma_\sim(A_p)$ ровно две вершины: одна с петлей, содержащая элементы вида γe_{21}, $0 \neq \gamma \in \mathbb{Z}_p$, а вторая – без петли, в которую попадают все остальные ненулевые элементы кольца.

Ниже приведен пример локального кольца с ациклическим сжатым графом делителей нуля с тремя вершинами.

Пример 4. Граф $\Gamma_\sim(\mathbb{Z}_{p^4})$, где p – простое число, состоит из трех вершин: $[b] = [\overline{p}^3]$, $[a_1] = [\overline{p}^2]$ и $[d] = [\overline{p}]$, – то есть является звездой типа II.

References

[1] D.F. Anderson, P.S. Livingston, *The zero-divizor graph of a commutative ring*, J. Algebra, **217**:2 (1999), 434–447. Zbl 0941.05062

[2] S.P. Redmond, *The zero-divisor graph of a non-commutative ring*, Int. J. Commut. Rings, **1**:4 (2002), 203–211. Zbl 1195.16038

[3] N. Bloomfield, C. Wickham, *Local rings with genus two zero divisor graph*, Commum. Algebra, **38**:8 (2010), 2965–2980. Zbl 1226.05132

[4] N. Bloomfield, *The zero divisor graphs of commutative local rings of order p^4 and p^5*, Commum. Algebra, **41**:2 (2013), 765–775. Zbl 1262.05077

[5] E.V. Zhuravlev, A.S. Monastyreva, *Compressed zero-divisor graphs of finite associative rings*, Sib. Math. J., **61**:1 (2020), 76-–84. Zbl 1461.13005

[6] A.S. Monastyreva, *The compressed zero-divisor graphs of order 4*, J. Algebra Appl., **21**:9 (2022), Article ID 2250179. Zbl 1507.16022

[7] A.A. Afanas'ev, A.S. Monastyreva, *Compressed and partially compressed zero-divisor graphs of finite associative rings*, Sib. Math. J., **64**:2 (2023), 291–299. Zbl 1528.16020

[8] A.S. Monastyreva, *Finite non-nilpotent rings with complete compressed zero-divisor graphs*, Lobachevskii J. Math., **41**:9 (2020), 1666–1671. Zbl 1451.13018

[9] V.P. Elizarov, *Finite rings*, Gelios-ARV, Moscow, 2006.

[10] E.V. Zhuravlev, A.S. Monastyreva, *On zero-divisor graphs of finite commutative local rings*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **16** (2019), 465–480. Zbl 1423.13037

[11] E.V. Zhuravlev, O.A. Filina, *On compressed zero-divisor graphs of finite commutative local rings*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **18**:2 (2021), 1531–1555. Zbl 1492.16020

Anna S. Monastyreva
Altai State University,
61, Lenina st.,
Barnaul, Russia, 656049
Email address: akuzmina1@yandex.ru