S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 1, стр. 453–462 (2024) УДК 517.95
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.032 MSC 32A40, 32A55, 32S99

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В.С. Бесов

Представлено О.С. Розановой

Abstract: The paper considers a nonlinear integro-differential system with fast and slow variables. Such systems have not been considered previously from the point of view of constructing regularized (according to Lomov) asymptotic solutions. Known works were mainly devoted to the construction of the asymptotics of the Butuzov-Vasil'eva boundary layer type, which, as is known, can be applied only if the spectrum of the matrix of the first variation (on the degenerate solution) is located strictly in the open left half-plane of a complex variable. In the case when the spectrum of the indicated matrix falls on the imaginary axis, the method of regularization by S.A. Lomov. However, this method was developed mainly for singularly perturbed differential systems that do not contain integral terms, or for integro-differential problems without slow variables. In this paper, the regularization method is generalized to two-dimensional integro-differential equations with fast and slow variables.

Keywords: nonlinear systems, integro-differential equations, regularization, singular perturbations, fast variables, slow variables.

Besov, V.S., Regularized asymptotic solutions of integro-differential equations with fast and slow variables.

Поступила 26 марта 2024 г., опубликована 18 июля 2024 г.

1 Введение

Рассмотрим сингулярно возмущенную интегродифференциальную систему

$$\frac{dy}{dt} = f(y,z,t) + \int_0^t \left(k_{11}\left(t,s\right)y\left(s,\varepsilon\right) + k_{12}\left(t,s\right)z\left(s,\varepsilon\right)\right)ds,$$

$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = \omega(t)z + \varepsilon g(y,z,t) + \varepsilon\int_0^t \left(k_{21}\left(t,s\right)y\left(s,\varepsilon\right) + k_{22}\left(t,s\right)z\left(s,\varepsilon\right)\right)ds,$$

$$y(0,\varepsilon) = y^0, z(0,\varepsilon) = z^0,\ t\in[0,T], \tag{1}$$

где $y = y\left(t,\varepsilon\right)$ и $z = z\left(t,\varepsilon\right)$ – неизвестные скалярные функции, $\omega\left(t\right)$, $f\left(y,z,t\right)$, $g\left(y,z,t\right), k_{ij}\left(t,s\right)\ (i,j=1,2)$ – известные функции, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Эта система содержит как быстрые z, так и медленные переменные y. Такие системы с точки зрения построения регуляризованных (по Ломову [1, 4]) асимптотических решений ранее не рассматривались. Известные работы (см., например, [2, 3]) касались построения асимптотики типа пограничного слоя, которая, как известно, справедлива при расположении спектра матрицы первой вариации (на вырожденном решении) строго в левой полуплоскости $Re\lambda < 0$(см. [2, 3]). В нашем же случае спектр указанной матрицы может иметь чисто мнимые собственные значения ($Re\,\omega\left(t\right) = 0$), поэтому методика работ по методу пограничных функций [3] здесь не проходит. В этом случае обычно используют метод регуляризации С.А Ломова [1]. Однако этот метод был разработан в основном для сингулярно возмущенных дифференциальных систем, не содержащих интегральные члены (см., например, [1, 4]), или для интегродифференциальных задач без медленных переменных [5, 6, 7]. В настоящей работе делается попытка обобщить метод регуляризации [1] на уравнения типа (1) с быстрыми и медленными переменными.

2 Регуляризация задачи (1).

Введем вектор-функцию $w = \{y,z\}$ и обозначим

$$w^0 = \begin{pmatrix} y^0 \\ z^0 \end{pmatrix},\ A\left(t\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega\left(t\right) \end{pmatrix},\ F\left(w,t\right) = \begin{pmatrix} f\left(y,z,t\right) \\ g\left(y,z,t\right) \end{pmatrix},$$

$$K\left(t,s\right) = \begin{pmatrix} k_{11}\left(t,s\right) & k_{12}\left(t,s\right) \\ k_{21}\left(t,s\right) & k_{22}\left(t,s\right) \end{pmatrix}.$$

Тогда задачу (1) можно переписать в виде

$$\varepsilon\frac{dw}{dt} = A(t)w + \varepsilon F(w,t) + \varepsilon\int_0^t K\left(t,s\right)w(s,\varepsilon)ds, w(0,\varepsilon) = w^0.. \tag{2}$$

Будем предполагать выполненными следующие условия:

1) функции $a(t), b(t), \omega(t) \in C^{\infty}\left([0,T], \mathbb{C}^1\right)$, $k_{ij}(t,s) \in C^{\infty}\left(\{0 \leq s \leq t \leq T\}, \mathbb{C}^1\right)$, $i,j = 1,2$;
2) вектор-функция $F(w,t)$ является многочленом[1] по w:

$$F(w,t) = \sum_{|m|=0}^{N} F^{(m)}(t)\, w^m \equiv \sum_{m_1+m_2=0}^{N} F^{(m_1,m_2)}(t)\, w_1^{m_1} w_2^{m_2}$$

с коэффициентами $F^{(m)}(t) \in C^{\infty}\left([0,T], \mathbb{C}^2\right)$, $|m| \equiv m_1 + m_2 = \overline{0,N}$;
3) $Re\,\omega(t) \leq 0\, \forall t \in [0,T]$.

Таким образом, задача (2) (а значит, и задача (1)) является сингулярно возмущенной задачей с необратимым предельным оператором $A(t)$, с нулевым собственным значением $\lambda_0(t) \equiv 0$ (кратности 1) и ненулевым собственным значением $\lambda_1(t) \equiv \omega(t)$ (кратности 1), причем этот оператор и сопряженный к нему оператор $A^*(t)$ имеют единичные собственные векторы: $\phi_0(t) = e_1, \phi_1(t) = e_2, \chi_0(t) = e_1, \chi_1(t) = e_2$. Согласно [1] вводим регуляризирующую переменную

$$\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_1(\theta)\, d\theta = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \omega(\theta)\, d\theta \equiv \frac{\psi(t)}{\varepsilon}$$

по ненулевой точке спектра предельного оператора $A(t)$ и переходим к расширенной задаче

$$\begin{gathered} \varepsilon \tfrac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \omega(t)\,\tilde{w} - A(t)\tilde{w} - \varepsilon F(\tilde{w},t) + \\ +\varepsilon \int_0^t K(t,s)\,\tilde{w}(s, \tfrac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon) ds = 0, \tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)|_{t=\tau=0} = w^0 \end{gathered} \tag{3}$$

для функции $\tilde{w} = \tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)$. Ясно, что если $\tilde{w} = \tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)$ – решение задачи (3), то функция

$w = \tilde{w}\left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$ является точным решением задачи (2), поэтому задача (3) является расширенной по отношению к задаче (2). Однако ее нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не произведена регуляризация интегрального члена

$$J\left(\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)\,|_{t=s,\tau=,\psi(s)/\varepsilon}\right) = \varepsilon \int_0^t K(t,s)\,\tilde{w}(s, \psi(s)/\varepsilon, \varepsilon)\, ds.$$

Для регуляризации интегрального оператора введем класс M_ε, асимптотически инвариантный относительно оператора J (см. [1], стр. 62). Напомним соответствующее понятие.

Определение 1. *Говорят, что класс M_ε асимптотически инвариантен (при $\varepsilon \to +0$) относительно оператора P_0, если выполнены следующие условия:*

---

[1] Это условие принимается рады простоты приводимых ниже вкладок. Можно считать, что $F(w,t)$ аналитична по w.

1) $M_\varepsilon \subset D(P_0)$ при каждом фиксированном $\varepsilon \neq 0$ ($D(P_0)$– область определения оператора P_0);

2) образ $P_0 g(t,\varepsilon)$ любого элемента $g(t,\varepsilon) \in M_\varepsilon$ разлагается в ряд

$$P_0 g(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n g_n(t,\varepsilon),$$

сходящийся асимптотически при $\varepsilon \to +0$ (равномерно по $t \in [t_0, T]$).

Из этого определения видно, что класс M_ε зависит от пространства U, в котором определен оператор P_0. В нашем случае $P_0 = J$. В качестве пространства U возьмём пространство функций $w(t,\tau)$, представимых суммами

$$\begin{gathered} w(t,\tau) = w_0(t) + w_1(t)\, e^{\tau} + \textstyle\sum_{k=2}^{N_w} w_k(t)\, e^{k\tau}, \\ w_k(t) \in C^\infty\left([0,T], \mathbb{C}^2\right),\ k = \overline{0, N_w}. \end{gathered} \tag{4}$$

В этом пространстве естественным образом вводится скалярное (при каждом $t \in [0,T]$) произведение:

$$\begin{gathered} \langle w(t,\tau), v(t,\tau)\rangle \equiv \Big\langle w_0(t) + w_1(t)\, e^{\tau} + \textstyle\sum_{k=2}^{N_w} w_k(t)\, e^{k\tau}, \\ v_0(t) + v_1(t)\, e^{\tau} + \textstyle\sum_{k=2}^{N_v} v_k(t)\, e^{k\tau}\Big\rangle \equiv \textstyle\sum_{j=0}^{\min(N_w, N_v)} \left(w_j(t), v_j(t)\right), \end{gathered}$$

где $(*,*)$ – обычное скалярное произведение в комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$. Отметим, что степень N_w многочлена $w(t,\tau)$ в (4) относительно экспоненты e^τ зависит от элемента w. Покажем сначала, что класс $M_\varepsilon = U|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$ асимптотически инвариантен относительно оператора J. Образ оператора J на элементе (4) пространства U имеет вид

$$\begin{gathered} J\left(w(t,\tau,\sigma)\,|_{t=s,\tau=\psi(s)/\varepsilon}\right) = \textstyle\int_0^t K(t,s)\, w(s, \psi(s)/\varepsilon, \sigma)\, ds = \\ = \textstyle\int_0^t K(t,s)\, w_0(s) ds + \int_0^t K(t,s) w(s) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \omega(\theta) d\theta} ds + \\ + \textstyle\sum_{k=2}^{N_w} \int_0^t K(t,s) w_k(s) e^{\frac{k}{\varepsilon}\int_0^s \omega(\theta) d\theta} ds. \end{gathered}$$

Для каждого слагаемого этой суммы будем иметь:

$$J_1(t,\varepsilon) \equiv \int_0^t K(t,s) w_1(s) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \omega(\theta) d\theta} ds = \varepsilon \int_0^t \frac{K(t,s) w_1(s)}{\omega(s)} d e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \omega(\theta) d\theta} =$$

$$= \varepsilon \left(\frac{K(t,s)\, w_1(s)}{\omega(s)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \omega(\theta) d\theta} \right)\Bigg|_{s=0}^{s=t} - \varepsilon \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{K(t,s)\, w_1(s)}{\omega(s)} \right) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \omega(\theta) d\theta} ds =$$

$$= \varepsilon \left[\frac{K(t,t)w_1(t)}{\omega(t)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \omega(s)ds} - \frac{K(t,0)w_1(0)}{\omega(0)} \right] -$$

$$-\varepsilon \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{K(t,s)w_1(s)}{\omega(s)} \right) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \omega(\theta)d\theta} ds$$

Продолжая этот процесс далее, получим разложение

$$J_1(t,\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \varepsilon^{\nu+1} \left[\left(I_1^{\nu} \left(K(t,s)w_1(s) \right) \right)_{s=t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \omega(\theta)d\theta} - \right. \\ \left. - \left(I_1^{\nu} \left(K(t,s)w_1(s) \right) \right)_{s=0} \right], \tag{5}$$

где $I_1^0 = \frac{1}{\omega(s)}, I_1^{\nu} = \frac{1}{\omega(s)} \frac{\partial}{\partial s} I_1^{\nu-1}$, $\nu \geq 1$.

Поступая аналогичным образом в случае интеграла $J_k(t,\varepsilon) = = \int_0^t K(t,s)w_k(s)e^{\frac{k}{\varepsilon}\int_0^s \omega(\theta)d\theta} ds$, получим разложение

$$J_k(t,\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \varepsilon^{\nu+1} \left[\left(I_k^{\nu} \left(K(t,s)w_k(s) \right) \right)_{s=t} e^{\frac{k}{\varepsilon}\int_0^t \omega(\theta)d\theta} - \right. \\ \left. - \left(I_k^{\nu} \left(K(t,s)w_k(s) \right) \right)_{s=0} \right], \ k \geq 2. \tag{6}$$

где $I_k^0 = \frac{1}{k\omega(s)}, I_k^{\nu} = \frac{1}{k\omega(s)} \frac{\partial}{\partial s} I_1^{\nu-1}$, $\nu \geq 1$.

Учитывая (5) и (6), видим, что образ оператора J на элементе (4) пространства U представляется в виде ряда

$$J \left(w(t,\tau)|_{t=s,\tau=\psi(s)/\varepsilon} \right) = \varepsilon \int_{t_0}^{t} K(t,s)w_0(s)ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_w} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \varepsilon^{\nu+2} \left[\left(I_k^{\nu} \left(K(t,s)w_k(s) \right) \right)_{s=t} e^{\frac{k}{\varepsilon}\int_0^t \omega(\theta)d\theta} - \right.$$

$$\left. - \left(I_k^{\nu} \left(K(t,s)w_k(s) \right) \right)_{s=0} \right],$$

Нетрудно показать (см., например, [7], стр. 291–294), что этот ряд сходится асимптотически при $\varepsilon \to +0$ (равномерно по $t \in [0,T]$). Это означает, что класс M_ε асимптотически инвариантен (при $\varepsilon \to +0$) относительно оператора J.

Введем операторы $R_\nu : U \to U$, действующие на каждый элемент $w(t,\tau) \in U$ вида (4) по закону:

$$R_0 w(t,\tau) = \int_0^t K(t,s)w_0(s)ds, \tag{7}$$

$$R_1 w(t,\tau) = \left(I_1^0 \left(K(t,s)w_1(s) \right) \right)_{s=t} e^{\tau} - \left(I_1^0 \left(K(t,s)w_1(s) \right) \right)_{s=0} \tag{8}$$

$$\cdots$$

$$R_k w(t,\tau) = \left(I_k^{\nu} \left(K(t,s)w_k(s) \right) \right)_{s=t} e^{k\tau} - \left(I_k^{\nu} \left(K(t,s)w_k(s) \right) \right)_{s=0} \tag{9}$$

Операторы $R_\nu : U \to U$, называется операторами порядка по той причине, что они в выражении $Jw(t,\tau)$ выделяют сумму членов порядка ν относительно параметра ε.

Пусть теперь $\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)$– произвольная непрерывная по $(t,\tau) \in [0,T] \times \{\tau : Re\tau \leq 0\}$ функция, имеющая асимптотическое разложение

$$\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l w_l(t,\tau), w_l(t,\tau) \in U, \tag{10}$$

сходящееся при $\varepsilon \to +0$ (равномерно по $(t,\tau) \in [0,T] \times \{\tau :\ \mathrm{Re}\tau \leq 0\}$). Тогда образ $J\tilde{y}$ этой функции разлагается в асимптотический ряд

$$J\left(\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^k J\left(w_l(t,\tau)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{s=0}^{r} R_{r-s} w_s(t,\tau)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}.$$

Это равенство является основанием для введения расширения оператора J на рядах вида (10):

$$\tilde{J}\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon) \equiv \tilde{J}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(t,\tau)\right) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{s=0}^{r} R_{r-s} w_s(t,\tau).$$

Теперь можно записать задачу, полностью регуляризованную по отношению к исходной системе (2):

$$\begin{aligned} &L_\varepsilon \tilde{w}(t,\tau,\varepsilon) \equiv \varepsilon \tfrac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \omega\left(t\right) \tilde{w} - A(t)\, \tilde{w} - \varepsilon F(\tilde{w},t) + \\ &+\varepsilon \tilde{J}\tilde{w} = 0, \tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)|_{t=\tau=0} = w^0 \\ &\tilde{w}(0,0,\varepsilon) = w^0. \end{aligned} \tag{11}$$

3 Итерационные задачи и их разрешимость в пространстве U. Теорема об оценке остаточного члена.

Определяя решение системы (11) в виде ряда (10), получим следующие

итерационные задачи:

$$Lw_0 \equiv \frac{\partial w_0}{\partial \tau}\omega(t)\ - A(t)\, w_0\, = 0,\, w_0(0,1)\, = w^0; \tag{12}$$

$$Lw_1\, =\, -\frac{\partial w_0}{\partial t} + F(w_0,t) + R_0 w_0,\, w_1(0,1)\, = 0; \tag{13}$$

$$Lw_2\, =\, -\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial F(w_0,t)}{\partial w} w_1 + R_1 w_0 + R_0 w_1,\, w_1(0,1)\, = 0;$$

$$\ldots$$

$$Lw_{l+1} = -\frac{\partial w_l}{\partial \tau} + G_l(w_0, ..., w_l, t) + \sum_{j=0}^{l} R_{l-j} w_j \,,\; w_{l+1}(0,1) = 0,\; l \geq 2, \quad (14)$$

где $G_l(w_0, ..., w_l, t)$ – некоторые многочлены от $w_1, ..., w_l$ с коэффициентами, зависящими от частных производных функции $F(w,t)$ в точке $w = w_0(t,\tau)$, причем эти многочлены линейны относительно w_l. Каждая из задач (12),(13),
(14) при их последовательном решении в пространстве U имеет вид системы

$$Lw \equiv \frac{\partial w}{\partial \tau}\omega(t) - A(t)\,w = h(t,\tau)\,,\; w(0,0) = w_*, \quad (15)$$

где $h(t,\tau) = h_0(t) + h_1(t)\,e^{\tau} + \sum_{k=2}^{N_h} h_k(t)\,e^{k\tau}$ – соответствующая правая часть. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1 и 3 и правая часть $h(t,\tau)$ системы (15) принадлежит пространству U. Тогда для разрешимости системы (15) в Uнеобходимо и достаточно, чтобы*

$$\langle h(t,\tau), \chi_0(t)\rangle \equiv 0,\; \langle h(t,\tau), \chi_1(t)\,e^{\tau}\rangle \equiv 0 \,\forall t \in [0,T]\,. \quad (16)$$

Доказательство. Будем искать решение системы (15) в виде элемента (4) пространства U. Подставляя (4) в (15) и приравнивая отдельно свободные члены и коэффициенты при экспоненте, получим системы:

$$-A(t)\,w_0 = h_0(t)\,, \quad (17)$$

$$[\omega(t)\,I - A(t)]\,w_1 = h_1(t)\,, \quad (18)$$

$$[k\omega(t)\,I - A(t)]\,w_k = h_k(t)\,,\; k = \overline{2, N_w}. \quad (19)$$

Системы (19) имеют единственные решения $w_k = [k\omega(t)\,I - A(t)]^{-1}\,h_k(t)\,,$ $k = \overline{2, N_w}$, так как $k\omega(t)$ при $k \geq 2$ не является собственным значением матрицы $A(t)$. Поскольку $\lambda_0(t) \equiv 0$ – собственное значение матрицы $A(t)$ кратности 1, то для разрешимости системы (17) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество $(h_0(t), \chi_0(t)) \equiv 0$. Далее, поскольку $\lambda_1(t) = \omega(t)$ так же является собственным значение матрицы $A(t)$ кратности 1, то для разрешимости системы (18) необходимо и достаточно, чтобы $(h_1(t), \chi_1(t)) \equiv 0$. Очевидно, что эти два условия ортогоналности эквивалентны условиям (16). □

Следствие 1. *Из доказательства теоремы 1 следует, что при выполнении условий (16) система (15) имеет следующее решение в пространстве U (учесть, что $\phi_0(t) = e_1, \phi_1(t) = e_2, \chi_0(t) = e_1, \chi_1(t) = e_2$):*

$$\begin{gathered} w(t,\tau) = \xi_0(t)\,e_1 - \tfrac{(h_0(t),e_2)}{\omega(t)}e_2 + \left(\xi_1(t)\,e_2 + \tfrac{(h_1(t),e_1)}{\omega(t)}e_1\right)e^{\tau} + \\ + [k\omega(t)\,I - A(t)]^{-1}\,h_k(t)\,,\; k = \overline{2, N_w}, \end{gathered} \quad (20)$$

где $\xi_0(t), \xi_1(t) \in C^\infty\left([0,T], \mathbb{C}^1\right)$ *– произвольные скалярные функции. Не будем формулировать теорему об однозначной разрешимости системы* (15) *в пространстве* U*. Отметим только, что применение теоремы 1 к двум последовательным итерационным задачам вида* (14) *позволяет найти решение первой из них в пространстве* U *однозначно.*

Перейдем к решению задачи (12) Так как ее правая часть $h(t,\tau) \equiv 0$, то для нее условия разрешимости (15) выполняются автоматически, и поэтому она имеет следующее решение (см. (20)) в пространстве U :

$$w_0(t,\tau) = \xi_0^{(0)}(t)e_1 + \xi_1^{(0)}(t)e^\tau e_2 \equiv \begin{pmatrix} \xi_0^{(0)}(t) \\ \xi_1^{(0)}(t)e^\tau \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $\xi_0^{(0)}(t), \xi_1^{(0)}(t) \in C^\infty\left([0,T], \mathbb{C}^1\right)$ – пока произвольны. Подчиняя (21) начальному условию $w(0,0) = w^0$,найдем $\xi_1^{(0)}(0) = y^0, \xi_2^{(0)}(0) = z^0$. При этом задача (13) принимает вид

$$\begin{aligned} Lw_1 = & -\dot{\xi}_0^{(0)}(t)e_1 - \dot{\xi}_1^{(0)}(t)e_2e^\tau + f\left(\xi_0^{(0)}(t), \xi_1^{(0)}(t)e^\tau, t\right)e_1 + \\ & + g\left(\xi_0^{(0)}(t), \xi_1^{(0)}(t)e^\tau, t\right)e_2 + \int_0^t K(t,s)\, e_1\xi_0^{(0)}(s)ds. \end{aligned} \tag{22}$$

Для применения условий ортогональности (16) надо в правой части этой системы выделить сначала свободный член, а затем член, содержащий экспоненту e^τ первого измерения. Свободный член имеет вид

$$\begin{aligned} h_0(t) = & -\dot{\xi}_0^{(0)}(t)e_1 + f\left(\xi_0^{(0)}(t), 0, t\right)e_1 + g\left(\xi_0^{(0)}(t), 0, t\right)e_2 + \\ & + \int_0^t K(t,s)\, e_1\xi_0^{(0)}(s)ds \end{aligned}$$

Первое условие ортогональности (16) дает

$$\begin{aligned} & (h_0(t), \chi_0(t)) = (h_0(t), e_1) \equiv 0 \Leftrightarrow (-\dot{\xi}_0^{(0)}(t)e_1 + f\left(\xi_0^{(0)}(t), 0, t\right)e_1 + \\ & + g\left(\xi_0^{(0)}(t), 0, t\right)e_2 + \left(\int_0^t \xi_0^{(0)}(s)K(t,s)\, e_1 ds\right), e_1) \equiv 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -\dot{\xi}_0^{(0)}(t) + f\left(\xi_0^{(0)}(t), 0, t\right) + \int_0^t k_{11}(t,s)\, \xi_0^{(0)}(s)ds = 0. \end{aligned}$$

Присоединяя к нему начальное условие, найденное выше, получим нелинейную интегродифференциальную задачу

$$-\dot{\xi}_0^{(0)}(t) + f\left(\xi_0^{(0)}(t), 0, t\right) + \int_0^t k_{11}(t,s)\, \xi_0^{(0)}(s)ds = 0, \xi_0^{(0)}(0) = y^0.. \tag{23}$$

Эта задача совпадает с вырожденной по отношению к (1) системой:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{y}, \bar{z}, t) + \int_0^t k_{11}(t,s)\,\bar{y}(s)ds + \int_0^t k_{21}(t,s)\,\bar{z}(s)ds, \\ 0 = \omega(t)\bar{z}\ ,\ \bar{y}(0) = y^0, \end{cases}$$

относительно которой обычно предполагают, что она разрешима в целом на отрезке $[0,T]$ (см., например, [2]). Выделяя в правой части системы (22) член, содержащий экспоненту e^{τ} первого измерения, запишем второе условие ортогональности (16):

$$\left\langle -\dot{\xi}_1^{(0)}(t)e_2 e^{\tau} + f^{e_1}\left(\xi_0^{(0)}(t), \xi_1^{(0)}(t), t\right) e^{\tau} e_1 + \right.$$

$$\left. + g^{e_1}\left(\xi_0^{(0)}(t), \xi_1^{(0)}(t), t\right) e^{\tau} e_2, e^{\tau} e_2 \right\rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\dot{\xi}_1^{(0)}(t) + g^{e_1}\left(\xi_0^{(0)}(t), \xi_1^{(0)}(t), t\right) = 0.$$

Замечая, что функция $g^{e_1}\left(\xi_0^{(0)}(t), \xi_1^{(0)}(t), t\right)$ линейно зависит от $\xi_1^{(0)}(t) = 0$, получаем линейную дифференциальную задачу Коши $-\dot{\xi}_1^{(0)}(t) + g^{e_1}\left(\xi_0^{(0)}(t), \xi_1^{(0)}(t), t\right) = 0$, $\xi_1^{(0)}(0) = z^0$, решая которую найдем однозначно функцию $\xi_0^{(0)}(t)$, а значит, однозначно найдем решение (21) задачи (12) в пространстве U.Аналогично находятся решения следующихитерационных задач (14) при $l \geq 1$.

Сформулируем теперь основное утверждение, которое доказывается так же, как и аналогичное утверждение в [5].

Теорема 2. *Пусть для уравнения (2) выполнены условия 1)–3) и нелинейная вырожденная система (23) имеет решение в классе $C^{\infty}\left([0,T], \mathbb{C}^2\right)$. . Тогда при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0 > 0$– достаточно мало) задача (2) имеет единственное решение $w(t,\varepsilon) \in \mathrm{C}^1([0,T], \mathbb{C}^2)$; при этом имеет место оценка*

$$||w(t,\varepsilon) - w_{\varepsilon N}(t)||_{C[0,T]} \leq c_N \varepsilon^{N+1}, N = 0, 1, 2, ...,$$

где $w_{\varepsilon N}(t)$ сужение (при $\tau = \frac{\psi(t)}{\varepsilon}$) N-й частичной суммы ряда (10) с коэффициентами $w_k(t,\tau) \in U$, удовлетворяющими итерационным задачам (14), а постоянная $c_N > 0$ не зависит от ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Условия теоремы реализуются, например, для задачи (2), в которой

$$f(y,z,t) = ay + b(t)\,z + y^2 + z^2,\ g(y,z,t) = yz + z^2, k_{11}(t) \equiv 0,$$
$$a = \mathrm{const},\ [0,T] \subset \{t : t \neq \tfrac{\ln(1+ay^{0^{-1}})}{a}\}..$$

Анализируя главный член асимптотики $w_{\varepsilon 0}(t) = \xi_0^{(0)}(t)e_1 + $ $+\xi_1^{(0)}(t)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \omega(\theta)d\theta} e_2$ видим, что он зависит от ядра $K(t,s)$ (см. (23)). Однако если $k_{11}(t,s) \equiv 0$, то главный член асимптотики решения задачи (2) будет таким же, как и в дифференциальной задаче (т.е. в задаче без интегрального члена).

References

[1] S.A. Lomov, *Introduction to the general theory of singular perturbations*, Nauka, Moscow, 1981. Zbl 0514.34049

[2] M.I. Imanaliyev, *Asymptotic methods in theory singularly perturbed integro-differential systems*, ILIM, Frunze, 1972.

[3] A.B. Vasil'yeva, V.F. Butuzov, *Asymptotic expansion of solutions for singularly perturbed equations*, Nauka, Moscow, 1973. Zbl 0364.34028

[4] S.A. Lomov, I.S. Lomov, *Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer*, Izd-vo MGU, Moscow, 2011.

[5] V.F. Safonov, A.A. Bobodzhanov, *Kurs vysshej matematiki. Singulyarno vozmushchennye zadachi I metod regulyarizacii*, uchebnoe posobie, Izdatel'skij dom MEI, Moscow, 2012.

[6] Bobodzhanova M.A., *Singulyarno vozmushchennye integrodifferencial'nye sistemy s nulevym operatorom differencial'noj chasti*, Vestnik MEI, **2010**:6 (2010), 63–72.

[7] Bobodzhanov A.A., Safonov V.F., *Volterra integral equations with rapidly varying kernels and their asymptotic integration*, Sb. Math., **192**:8 (2001), 1139–1164, Zbl 1021.45004

Vladislav Sergeevich Besov
Moscow Power Engineering Institute,
Krasnokazarmennaya Ulitsa, 14,
111250, Moscow, Russia
Email address: Bajldau@ya.ru