

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ЗАМЫКАНИИ
МНОЖЕСТВА МУЛЬТИОПЕРАЦИЙ РАНГА 2В.И. ПАНТЕЛЕЕВ , Л.В. Рябец *Представлено А.В. Пяткиным*

Abstract: In this paper the problem of classifying a set of multi-operations of rank 2 with respect to the parametric closure operator is considered. A completeness criterion was found and it was shown that the set of all multioperations contains two parametrically closed classes.

Keywords: multifunction, multioperation, parametric closure, superposition, completeness criterion, k -valued logic.

1 Введение

Классификация — одно из важнейших направлений исследований в теории дискретных функций. Основное направление классификации связано с оператором суперпозиции и основано на принадлежности функций замкнутым относительно суперпозиции множествам.

PANTELEEV V.I., RYABETS L.V. PARAMETRIC CLOSED SETS OF MULTIOPERATIONS ON TWO-ELEMENT SET.

© 2024 ПАНТЕЛЕЕВ В.И., РЯБЕЦ Л.В..

Исследование первого автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00011, <https://rscf.ru/project/24-21-00011/>.

Поступила 3 июля 2024 г., опубликована 11 декабря 2024 г.

Наряду с классическими функциональными системами, в которых основным множеством является множество функций k -значной логики, достаточно давно изучаются и функциональные системы, в которых рассматриваются обобщения функций k -значной логики: частичные функции, гипер- и мультифункции — функции, заданные на конечном множестве A и принимающие в качестве своих значений подмножества (с некоторыми ограничениями или без) множества A .

Однако, для функций k -значной логики при $k > 2$ классификация, основанная только на суперпозиции, приводит к континууму замкнутых множеств. Аналогичный результат справедлив для частичных функций задаваемых даже на 2-х элементном множестве [22]. Впрочем, как показал Н. Machida [19], и суперпозиция гиперфункций на 2-х элементном множестве также приводит к континууму замкнутых классов. Исследования классификаций функций, заданных на конечном множестве и принимающих в качестве своих значений подмножества этого множества (все или некоторые), относительно оператора суперпозиции представлены в [8, 9, 14, 15, 17, 19, 20, 21]

Попытки сократить континуальные классификации приводят к необходимости изучения более сильных операторов замыкания. Одним из таких является оператор параметрического замыкания, предложенный А.В. Кузнецовым [4]. Этот оператор порождает 25 параметрически замкнутых классов булевых функций, 2986 параметрически замкнутых классов функций 3-х значной логики [2, 3]. При $k \geq 4$ конечность числа параметрически замкнутых классов множества функций k -значной логики доказана в [1]. Подробное описание параметрически замкнутых классов булевых функций представлено в работе [10].

Одним из расширений оператора параметрического замыкания является оператор позитивного замыкания. Исследования, посвященные этому оператору над различными множествами функций, представлены в работах [11, 13, 12].

В [6, 5] идея оператора параметрического замыкания была расширена на множество гиперфункций, заданных на двухэлементном множестве. Оказалось, что язык формул, используемый при параметрическом описании, обладает сильными выразительными возможностями, которые привели к тому, что число замкнутых классов гиперфункций оказалось равно 13, несмотря на то, что множество булевых функций является подмножеством множества всех гиперфункций.

В соответствии с алгебраическим подходом, наряду с терминами (частичная, гипер-, мульти-) функция используют и термины (частичная, гипер-, мульти-) операция (см., например, [18]).

В настоящей работе показывается, что на множестве всех мультиопераций ранга 2 выразительные возможности языка параметрического описания являются очень сильными, что приводит к 2-м замкнутым классам. Этот результат остается неизменным и при переходе к позитивному замыканию [16].

2 Основные понятия и определения

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$ и $\alpha_i \in E_2$, $i \in \{1, \dots, n\}$, тогда выражение $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ называется двоичным набором или просто набором и обозначается $\tilde{\alpha}$, а число n называется длиной этого набора. Если длина набора $\tilde{\alpha}$ явно не указана, она определяется по контексту. Набор $\tilde{\beta}$ назовем противоположным набору $\tilde{\alpha}$, если длины этих наборов совпадают и $\beta_i = \bar{\alpha}_i$ (как обычно, $\bar{0} = 1$ и $\bar{1} = 0$) для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Для набора, противоположного набору $\tilde{\alpha}$, будем использовать обозначение $\bar{\tilde{\alpha}}$. Набор $(0, \dots, 0)$ называется нулевым и обозначается через $\bar{0}$, а набор $(1, \dots, 1)$ — единичным и обозначается через $\bar{1}$. Для произвольного конечного множества A через $|A|$ обозначим мощность.

Для целого положительного n отображение $f : E_2^n \rightarrow 2^{E_2}$ назовем n -местной мультиоперацией ранга 2 или просто мультиоперацией. Множество всех n -местных мультиопераций обозначим как \mathcal{M}_n , а множество всех мультиопераций как \mathcal{M} . Очевидно, что $\mathcal{M} = \bigcup_n \mathcal{M}_n$.

В множестве \mathcal{M} выделим множество всех булевых операций (\mathcal{O}) и множество гиперопераций (\mathcal{H}) следующим образом:

$$\mathcal{O}_n = \{f \mid f \in \mathcal{M}_n \text{ и } |f(\tilde{\alpha})| = 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in E_2^n\}, \quad \mathcal{O} = \bigcup_n \mathcal{O}_n,$$

$$\mathcal{H}_n = \{f \mid f \in \mathcal{M}_n \text{ и } |f(\tilde{\alpha})| \geq 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in E_2^n\}, \quad \mathcal{H} = \bigcup_n \mathcal{H}_n.$$

При дальнейшем изложении мы не будем различать множество из одного элемента и элемент этого множества. Для множества E_2 будем использовать обозначение « $-$ » (прочерк), для пустого множества — « $*$ ». Под « $-$ » и « $*$ » будем понимать также мультиоперации, которые на любом своем наборе принимают значение E_2 и \emptyset , соответственно. Местность таких операций зависит от контекста.

Для одноместной мультиоперации $f \in \mathcal{M}$ будем использовать запись в виде вектора $(f(0) f(1))$. Например, вектором $(- 0)$ обозначается такая мультиоперация f , что $f(0) = -$ и $f(1) = 0$. Для n -местной мультиоперации f будем также использовать запись в виде вектора $(\alpha_{\bar{0}} \dots \alpha_{\bar{1}})$ длины 2^n , где каждый элемент $\alpha_{\tilde{\sigma}} = f(\tilde{\sigma})$.

Пусть f_0 — n -местная мультиоперация, f_1, \dots, f_n — m -местные мультиоперации. Суперпозиция с внешней операцией f_0 и внутренними операциями f_1, \dots, f_n определяет m -местную мультиоперацию

$$s(f_0, f_1, \dots, f_n)$$

следующим образом: для набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E_2^m$ по определению¹

$$s(f_0, f_1, \dots, f_n)(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \bigcup_{\substack{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \\ i \in \{1, \dots, n\}}} f_0(\beta_1, \dots, \beta_n). \quad (1)$$

¹Определение суперпозиции мультиопераций позволяет находить значение мультиопераций не только на двоичных наборах. Подробно можно посмотреть в [7].

В соответствии с этим определением, если значение какой-либо мультиоперации f_i на наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ есть $*$, то и вся суперпозиция принимает значение $*$.

В дальнейшем мультиоперации будем рассматривать с точностью до фиктивных аргументов. Переменные для обозначения аргументов используем обычным образом, как и понятие «мультиоперация-переменная». Также обычным образом используем понятие замыкание относительно суперпозиции множества операций Q , для которого будем использовать обозначение $[Q]$. Считаем известными обозначения для булевых операций от 2-х аргументов.

Пусть A — некоторое множество мультиопераций. Определим понятие «мультиоперация над A »:

- если $f \in A$, то f — мультиоперация над A ;
- если f — мультиоперация над A , то операция, полученная из f перестановкой или отождествлением аргументов является мультиоперацией над A ;
- если f_0 — n -местная, f_i — m -местные мультиоперации над A или мультиоперации-переменные ($i \in \{1, \dots, n\}$), то мультиоперация $s(f_0, f_1, \dots, f_n)$ есть мультиоперация над A .

Символами языка Pag являются переменные x_1, x_2, \dots , символы f_i (используемые для обозначения мультиопераций), символ включения \subseteq , логическая связка конъюнкция $\&$, квантор существования \exists , левая и правая скобки, запятая.

Определим понятия «терм t языка Pag » и «множество переменных термина t » — $FV(t)$:

- любая переменная является термом, $FV(t) = \{x\}$;
- если x_{i_1}, \dots, x_{i_n} — переменные (не обязательно различные), а f — символ n -местной мультиоперации, то $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ есть терм, $FV(t) = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$;
- если t_1, \dots, t_n — термы, f — символ n -местной мультиоперации, то $s(f, t_1, \dots, t_n)$ есть терм, $FV(t) = \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} FV(t_i)$.

Значение термина t на наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ значений переменных из множества $FV(t)$ определяется следующим образом:

- если терм t есть переменная x , то значение термина совпадает со значением этой переменной;
- если терм t есть $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, то $t(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = f(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n})$;
- если терм t есть $s(f, t_1, \dots, t_n)$, то

$$t(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in t_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Всякий терм t определяет некоторую мультиоперацию.

Определим понятие «формула языка Par » (параметрическая формула). Если t_1, t_2 — термы, то выражение $(t_1 \subseteq t_2)$ называется элементарной формулой. Остальные формулы определяем следующим образом: если Φ_1, Φ_2 — формулы, а x_i — переменная, то $\Phi_1 \& \Phi_2, (\exists x_i)\Phi_1$ — формула.

Пусть $Q \subseteq \mathcal{M}$, $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}$, $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ — формула языка Par со свободными переменными x_1, \dots, x_n, y , все операционные символы которой являются обозначениями мультиопераций над Q . Будем говорить, что формула Φ параметрически выражает мультиоперацию f через мультиоперации множества Q (определяет отношение $y \subseteq f(x_1, \dots, x_n)$), если множества истинности формулы Φ и отношения $y \subseteq f(x_1, \dots, x_n)$ совпадают. Множество всех мультиопераций, параметрически выразимых через операции множества Q , назовем параметрическим замыканием множества Q и обозначим $\text{Par}[Q]$. Множество Q , которое совпадает со своим параметрическим замыканием, называется параметрически замкнутым классом. Множество Q является параметрически полным, если его параметрическое замыкание совпадает с \mathcal{M} .

Пример. Пусть $f_1(x_1, x_2) = (-01-)$, $f_2(x_1, x_2) = (1-10)$ и $g(x_1, x_2) = (001-)$ — двухместные мультиоперации. Рассмотрим множество мультиопераций $Q = \{f_1, f_2\}$. С помощью мультиопераций из Q построим следующие формулы языка Par .

$$\begin{aligned}\Phi_1(x_1, x_2, y) &= y \subseteq f_1(x_1, x_2), \\ \Phi_2(x_1, x_2, y) &= f_2(x_1, x_2) \subseteq f_1(x_2, y).\end{aligned}$$

Формула $\Phi(x_1, x_2, y) = \Phi_1(x_1, x_2, y) \& \Phi_2(x_1, x_2, y)$ параметрически выражает операцию g через операции множества Q . Соответствующие таблицы истинности представлены ниже.

x_1	x_2	y	Φ_1	Φ_2	$\Phi(x_1, x_2, y)$	$y \subseteq g(x_1, x_2)$
0	0	0	И	И	И	И
0	0	1	И	Л	Л	Л
0	1	0	И	И	И	И
0	1	1	Л	И	Л	Л
1	0	0	Л	И	Л	Л
1	0	1	И	И	И	И
1	1	0	И	И	И	И
1	1	1	И	И	И	И

Утверждение 1. *Любой параметрически замкнутый класс мультиопераций замкнут относительно операции суперпозиции.*

Доказательство. Пусть Q — параметрически замкнутый класс мультиопераций, $f_0, f_1, \dots, f_n \in Q$ и

$$g(x_1, \dots, x_m) = s(f_0, f_1, \dots, f_n)(x_1, \dots, x_m).$$

Покажем, что $g \in Q$.

Обозначим через

$$\Phi_0(x_1, \dots, x_n, y), \quad \Phi_1(x_1, \dots, x_m, y), \quad \dots, \quad \Phi_n(x_1, \dots, x_m, y)$$

формулы языка Par , которые параметрически выражают отношения

$$y \subseteq f_0(x_1, \dots, x_n), \quad y \subseteq f_1(x_1, \dots, x_m), \quad \dots, \quad y \subseteq f_n(x_1, \dots, x_m)$$

через операции множества Q . Тогда формула

$$(\exists y_1) \dots (\exists y_n) (\Phi_1(x_1, \dots, x_m, y_1) \& \dots \\ \dots \& \Phi_n(x_1, \dots, x_m, y_n) \& \Phi_0(y_1, \dots, y_n, z))$$

параметрически выражает отношение $z \subseteq g(x_1, \dots, x_m)$ через операции множества Q . Таким образом, $g \in Q$. \square

Утверждение 2. Если $[Q] = \mathcal{O}$, то $\text{Par}[Q] = \mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть мультиоперация $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}$. По f построим $f_1, f_2 \in \mathcal{O}$ следующим образом: для набора $\tilde{\alpha} \in E_2^n$

- если $f(\tilde{\alpha}) = 0$, то $f_1(\tilde{\alpha}) = f_2(\tilde{\alpha}) = 0$;
- если $f(\tilde{\alpha}) = 1$, то $f_1(\tilde{\alpha}) = f_2(\tilde{\alpha}) = 1$;
- если $f(\tilde{\alpha}) = -$, то $f_1(\tilde{\alpha}) = 0, f_2(\tilde{\alpha}) = 1$;
- если $f(\tilde{\alpha}) = *$, то $f_1(\tilde{\alpha}) = 1, f_2(\tilde{\alpha}) = 0$.

Формула

$$\Phi(\tilde{x}, y) = (f_1 \rightarrow f_2) \subseteq 1 \& \overline{(y + f_1 \vee y + f_2)} \subseteq 1)$$

параметрически выражает отношение $y \subseteq f(\tilde{x})$. \square

Лемма 1. Мультиоперации (01) , $(--)$ и $(**)$ содержатся в каждом параметрически замкнутом классе мультиопераций.

Доказательство. Действительно, формула $y \subseteq x$ определяет отношение $y \subseteq (01)$, любая тождественно истинная параметрическая формула, например $x \subseteq x \& y \subseteq y$, определяет отношение $y \subseteq (--)$ [6], а формула $(--)(x) \subseteq y$ определяет отношение $y \subseteq (**)$. \square

Лемма 2 ([6]). Каждая гипероперация из множества $\{(0-), (-1), (-0), (1-)\}$ параметрически полна в множестве \mathcal{H} .

Лемма 3. Любая мультиоперация из множеств $A = \{(0*), (1*), (-*), (*0), (*1), (*-)\}$ или $B = \{(00), (11)\}$ параметрически полна в множестве \mathcal{M} .

Доказательство. Как известно, множество $\mathcal{H} \cup \{*\}$ является предполным в \mathcal{M} [17]. Операции из множества A не принадлежат множеству \mathcal{H} , поэтому для доказательства леммы достаточно получить операции из леммы 2.

Рассмотрим формулу $f(x) \subseteq f(y)$. Для первых трех мультиопераций из множества A она становится истинной в следующих случаях: если $x = 0$, то y может быть равным только 0, а если $x = 1$, то y может

быть равным и 0 и 1. Это означает, что формула $f(x) \subseteq f(y)$ определяет отношение $y \subseteq (0-)$.

Для оставшихся мультиопераций из A рассматриваемая формула принимает истинное значение в следующих случаях: если $x = 0$, то y может быть равным и 0 и 1, а если $x = 1$, то y может быть равным только 1, т. е. формула $f(x) \subseteq f(y)$ определяет отношение $y \subseteq (-1)$.

Аналогичным образом убеждаемся, что формула $x \subseteq f(y)$ определяет отношение $y \subseteq (-*)$ для $f = (00)$ и $y \subseteq (*-)$ для $f = (11)$. \square

Лемма 4. *Мультиоперация (0001) параметрически полна в классе M .*

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2) = (0001)$. Тогда формула $f(x_1, x_2) \subseteq f(x_1, y)$ задает отношение $y \subseteq (- - 01)$ и, соответственно, операцию $f_2 = (- - 01)$.

Формула $f_2(x_1, x_2) \subseteq f(x_1, y)$ задает отношение $y \subseteq (* * 01)$. Отождествление переменных y операции $(* * 01)$ позволяет получить операцию $(*1)$, которая параметрически полна по лемме 3. \square

Лемма 5. *Справедливо $(10) \in \text{Par}[\{(01), (--), (**)\}]$.*

Доказательство. Пусть $f = (0101)$. Тогда формула $f(x_1, x_2) \subseteq f(y, x_1)$ определяет операцию $(- * *-) = g$. Формула $g(x_1, x_2) \subseteq f(x_1, y)$ определяет операцию $(* - *) = h$, а $h(x_1, x_2) \subseteq g(x_1, y)$ определяет операцию $u = (-01-)$. Наконец, формула $u(x_1, x_2) \subseteq h(x_1, y)$ определяет операцию (10). \square

Введем в рассмотрение мультиоперацию $d_3(x_1, x_2, x_3) = (00010111)$.

Лемма 6. *Справедливо $d_3 \in \text{Par}[\{(01), (--), (**), (10)\}]$.*

Доказательство. В лемме 5 рассматривались операции f, g, h, u . Из операции $u = (-01-)$ несложно получить операцию $u_1 = (-10-)$. Формула $u(x_1, x_2) \subseteq u(x_1, y)$ определяет операцию $v = (0 - -1)$, а формула $v(x_1, x_2) \subseteq f(x_1, y)$ определяет операцию $w = (0 * *1)$.

Построим операции $f_1(x, y, z) = f(y, z)$ и $h_1(x, y, z) = h(x, y)$.

Рассмотрим суперпозицию с внешней операцией $f_1(x, y, z)$ и внутренними операциями h_1, x, z . Обозначим $f_2(x, y, z) = s(f_1, h_1, x, z)(x, y, z)$. Тогда $f_2(x, y, z) = (* * 0101 * *)$, а формула $f_2(x_1, x_2, x_3) \subseteq f_1(x_1, x_2, y)$ определяет, соответственно, операцию $f_3 = (- - 0101 - -)$.

Построим операции $w_1(x, y, z) = w(y, z)$ и $u_{11}(x, y, z) = u_1(y, z)$.

Тогда $s(w_1, x_2, x_1, u_{11})(x_1, x_2, x_3)$ задает операцию $(0 * 0011 * 1)$. Применяя отрицание, можно получить операцию $f_4 = (*000111*)$. Далее строим суперпозицию $s(f_1, f_4, x_2, x_3)(x_1, x_2, x_3) = (*101010*) = f_5$.

Формула $f_5(x_1, x_2, x_3) \subseteq f_1(x_1, x_2, y)$ позволяет определить операцию $f_6 = (-101010-)$. И, наконец, формула $f_3(x_1, x_2, x_3) \subseteq f_6(x_1, x_2, y)$ определяет отношение $y \subseteq d_3(x_1, x_2, x_3)$. \square

3 Основной результат

Через S^{-*} обозначим множество мультиопераций, которые на любой паре противоположных наборов возвращают либо противоположные значения $(0, 1)$ и $(1, 0)$, либо два прочерка $(-, -)$, либо $(*, *)$.

Лемма 7. *Класс S^{-*} является параметрически замкнутым.*

Доказательство. Пусть параметрическая формула $\Phi(\tilde{x}, y)$ получена с помощью мультиопераций g_1, \dots, g_k из класса S^{-*} . Покажем, что такая формула будет представлять отношение $y \subseteq f(\tilde{x})$, где мультиоперация $f(\tilde{x})$ также принадлежит классу S^{-*} .

Для этого покажем, что таблица истинности формулы Φ является симметричной, т.е. на противоположных наборах формула принимает одинаковые истинностные значения, а именно

$$\Phi(\tilde{x}, y) = \Phi(\tilde{x}, \bar{y})$$

для любого набора $\tilde{x} \in E_2^n, y \in E_2$. Доказательство будем проводить индукцией по построению формулы Φ .

Базис индукции. Рассмотрим элементарную параметрическую формулу

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, y) = g_1(z_1, \dots, z_p) \subseteq g_2(w_1, \dots, w_q), \quad (2)$$

где $\{z_1, \dots, z_p\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y\}$, $\{w_1, \dots, w_q\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y\}$ и $g_1, g_2 \in S^{-*}$. Построим для этой формулы таблицу истинности и определим истинность формулы на произвольном наборе $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0\}$ и его отрицании. Для этого на указанном наборе рассмотрим возможные значения мультиопераций g_1, g_2 . Для упрощения записи будем считать, что

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0) = g_1(\beta_1, \dots, \beta_p) \subseteq g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q),$$

где $\{\beta_1, \dots, \beta_p\} \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0\}$ и $\{\gamma_1, \dots, \gamma_q\} \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0\}$.

1. Пусть $g_1(\beta_1, \dots, \beta_p) = a$, где $a \in E_2$. Рассмотрим возможные значения мультиоперации g_2 . Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q)$ тоже принимает значение a , то в силу того, что $g_1, g_2 \in S^{-*}$, получим $g_1(\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_p) = \bar{a}$ и $g_2(\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_q) = \bar{a}$. В этом случае $\Phi(\tilde{\alpha}, \alpha_0) = \Phi(\tilde{\alpha}, \bar{\alpha}_0) = \text{И}$.

Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = \bar{a}$, то $g_1(\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_p) = \bar{a}$ и $g_2(\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_q) = a$. Тогда $\Phi(\tilde{\alpha}, \alpha_0) = \Phi(\tilde{\alpha}, \bar{\alpha}_0) = \text{Л}$.

Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = -$, то $g_2(\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_q) = -$. Тогда формулы $a \subseteq -$ и $\bar{a} \subseteq -$ истинны и

$$\Phi(\tilde{\alpha}, \alpha_0) = \text{И}, \quad \Phi(\tilde{\alpha}, \bar{\alpha}_0) = \text{И}.$$

А если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = *$, то $g_2(\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_q) = *$. Тогда формулы $a \subseteq *$ и $\bar{a} \subseteq *$ ложны и

$$\Phi(\tilde{\alpha}, \alpha_0) = \text{Л}, \quad \Phi(\tilde{\alpha}, \bar{\alpha}_0) = \text{Л}.$$

2. Пусть $g_1(\beta_1, \dots, \beta_p) = -$. Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) \in E_2$ или возвращает $*$, то формула $\Phi(\tilde{\alpha}, \alpha_0)$ ложна и $\Phi(\tilde{\alpha}, \bar{\alpha}_0)$ также ложна.

Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = -$, то $\Phi(\tilde{\alpha}, \alpha_0)$ истинна и $\Phi(\tilde{\alpha}, \bar{\alpha}_0)$ истинна.

3. Пусть $g_1(\beta_1, \dots, \beta_p) = *$. В этом случае формула $\Phi(\tilde{\alpha}, \alpha_0)$ истинна и $\Phi(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_0)$ также истинна.

Следовательно, формула вида (2) на противоположных наборах принимает одинаковые истинностные значения.

Шаг индукции. Рассмотрим параметрическую формулу вида $\Phi_1 \& \Phi_2$. В силу индуктивного предположения формулы Φ_1, Φ_2 на противоположных наборах принимают одинаковые истинностные значения. Следовательно, рассматриваемая формула на противоположных наборах также принимает одинаковые значения.

При рассмотрении формулы вида $\exists x_1 \Phi_1$ воспользуемся очевидным фактом, что истинность формул

$$\exists x_1 \Phi_1(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}), \quad \exists x_1 \Phi_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{y})$$

совпадает.

Таким образом, если параметрическая формула $\Phi(\tilde{x}, y)$ получена с помощью мультиопераций $g_1, \dots, g_k \in S^{-*}$ и представляет отношение $y \subseteq f(\tilde{x})$, то операция $f(\tilde{x})$ также принадлежит классу S^{-*} . \square

Лемма 8. *Любую мультиоперацию из класса S^{-*} можно параметрически выразить с помощью операции d_3 , т.е. $\text{Par}[\{d_3\}] = S^{-*}$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in S^{-*}$. С использованием операции d_3 построим параметрическую формулу $\Phi(\tilde{x}, y)$ для представления операции f .

Заметим, что $d_3(0, x_2, x_3) = (0001)$. Таким образом, согласно лемме 4 операция $d_3(0, x_2, x_3)$ позволяет получить любую мультиоперацию из класса \mathcal{M} . Построим с ее помощью формулу $\Psi(x_2, \dots, x_n, y)$ представляющую отношение $y \subseteq f(0, x_2, \dots, x_n)$.

Теперь положим, что $\Phi(0, x_2, \dots, x_n, y) = \Psi(x_2, \dots, x_n, y)$ и заменим все вхождения 0 на переменную x_1 . Формула $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ построена из операции d_3 , принадлежащей множеству S^{-*} . Поэтому такая формула на противоположных наборах принимает одинаковые истинностные значения, и, значит, определяет операцию из класса S^{-*} . С учетом того, что на наборах $(0, x_2, \dots, x_n, y)$ истинностное значение формулы Φ совпадает с истинностным значением отношения $y \subseteq f(0, x_2, \dots, x_n)$, получаем, что на наборах $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ истинностное значение формулы $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ совпадает с истинностным значением отношения $y \subseteq f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. \square

Следствие 1. $S^{-*} = \text{Par}[\emptyset]$.

Действительно, согласно леммам 1 и 5 мультиоперации (01), (—), (**) и (10) содержатся в каждом параметрически замкнутом классе мультиопераций. Лемма 6 показывает, что с использованием этих мультиопераций мы можем получить мультиоперацию d_3 . Далее воспользуемся леммой 8.

Теорема 1. *Множество мультиопераций B параметрически полно тогда и только тогда, когда B не содержится в множестве S^{-*} .*

Доказательство. Так как B не содержится в множестве S^{-*} , то существует операция $f(x_1, \dots, x_n)$, которая на некоторой паре противоположных наборов дает следующие возможные пары значений: $(00), (0*), (0-), (11), (1*), (1-), (*1), (*0), (*-), (-0), (-1), (-*)$.

Противоположным наборам соответствуют операции (01) и (10) , которые есть в каждом параметрически замкнутом классе. Подставляя эти операции в качестве внутренних операций в суперпозицию с внешней мультиоперацией f вместо соответствующих переменных x_1, \dots, x_n , будем получать либо полное множество, либо одну из операций

$$(0-), (-0), (-1), (1-).$$

С учетом имеющейся операции отрицания достаточно рассмотреть случай получения операции $f(x) = (0-)$. Формула $f(x) \subseteq f(y)$ определяет операцию $g(x) = (-1)$. А формула $f(x) \subseteq g(y)$ операцию $h(x) = (00)$. \square

Следствие 2. *Множество \mathcal{M} содержит два параметрически замкнутых класса — S^{-*} и \mathcal{M} .*

References

- [1] S. Barris, R. Willard, *Finitely many primitive positive clones*, Proc. Am. Math. Soc., **101**:3 (1987), 427–430. Zbl 0656.08002
- [2] A.F. Danil'chenko, *Parametric expressibility of functions of three-valued logic*, Algebra Logic, **16** (1978), 266–280. Zbl 0436.03015
- [3] A.F. Danil'chenko, *Parametrically closed classes of functions of three-valued logic*, Izv. Akad. Nauk Mold. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Mat. Nauk, **1978**:2 (1978), 13–20. Zbl 0387.03031
- [4] A.V. Kuznetsov, *Means for detection of nondeducibility and inexpressibility*, in *Logical Inference*, Nauka, Moscow, 1979, 5–33.
- [5] L.V. Riabets, *Operators of parametric and positive closure on the set of hyperfunctions of rank 2*, Intelligent systems. Theory and applications, **20**:3 (2016), 79–84.
- [6] L.V. Riabets, *Parametric closed classes of hyperfunctions on two-element set*, Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat., **17** (2016), 46–61. Zbl 1362.08001
- [7] V.I. Panteleev, E.S. Taglasov, *ES_I-closure of rank 2 multifunctions: completeness criterion, classification, and types of bases*, Intelligent systems. Theory and applications, **25**:2 (2021), 55–80.
- [8] Lo Czu Kai, *Maximal closed classes on the set of partial many-valued logic*, Kiberneticheskiy Sbornik, **25**, Mir, Moscow, 1988, 131–141.
- [9] Lo Czu Kai, *Completeness theory on partial many-valued logic functions*, Kiberneticheskiy Sbornik, **25**, Mir, Moscow, 1988, 142–157.
- [10] S.S. Marchenkov, *Closed classes of Boolean functions*, Nauka, Fizmatlit., Moscow, 2000. Zbl 0965.03074
- [11] S.S. Marchenkov, *On expressibility of functions of many-valued logic in some logical-functional languages*, Discrete Math. Appl., **9**:6 (1999), 563–581. Zbl 0974.03028
- [12] S.S. Marchenkov, *Positive closed classes of three-valued logic*, J. Appl. Indust. Math., **8**:2 (2014), 256–266. Zbl 1324.03004

- [13] S.S. Marchenkov, A.A. Popova, *Positively closed classes of partial Boolean functions*, Mosc. Univ. Comput. Math. Cybern., **32**:3 (2008), 147–151. Zbl 1160.03042
- [14] V.I. Panteleev, L.V. Riabets, *The closure operator with the equality predicate branching on the set of hyperfunctions on two-element set*, Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat., **10** (2014), 93–105. Zbl 1347.06017
- [15] V.V. Tarasov, *Completeness criterion for partial logic functions*, Probl. Kibern., **30**, Nauka, Moscow, 1975, 319–325. Zbl 0414.94040
- [16] I.K. Sharankhaev, *On positive completeness and positively closed sets of multifunctions of rank 2*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **20**:2 (2023), 1313–1319. Zbl 7896827
- [17] R. Doroslovački, J. Pantović, G. Vojvodić, *One interval in the lattice of partial hyperclones*, Czech Math J., **55**:3 (2005), 719–724. Zbl 1081.08005
- [18] M. Pouzet, I.G. Rosenberg, *Small clones and the projection property*, Algebra Univers., **63**:1 (2010), 37–44. Zbl 1205.08002
- [19] H. Machida, *Hyperclones on a two-element set*, Mult.-Valued Log., **8**:4 (2002), 495–501. Zbl 1025.08001
- [20] H. Machida, J. Pantović, *On maximal hyperclones on $\{0, 1\}$ – a new approach*, Proc. of 38th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ismvl 2008), (2008), 32–37.
- [21] B.A. Romov, *Hyperclones on a finite set*, Proc. of 27th International Symposium on Multiple-Valued Logic, (1997), 83–88.
- [22] R.V. Freivald, *A completeness criterion for partial functions of logic and many-valued logic algebras*, Soviet Physics Dokl., **11** (1966), 288–289. Zbl 0149.24405

VLADIMIR INNOKENT'YEVICH PANTELEEV
DORZHI BANZAROV BURYAT STATE UNIVERSITY,
24A, SMOLINA STR.,
670000, ULAN-UDE, RUSSIA
Email address: vl.panteleyev@gmail.com

LEONID VLADIMIROVICH RYABETS
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES, IRKUTSK STATE
UNIVERSITY,
K. MARX ST, 1,
664000, IRKUTSK, RUSSIA
Email address: l.riabets@gmail.com