

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА МЕТОДОМ  
КОЛЛОКАЦИИ И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С  
АППРОКСИМАЦИЕЙ ПАДЕ

П.И. Кириллов , В.П. Шапеев 

*Представлено М.А. Шишлениным*

**Abstract:** A new numerical algorithm for solving Fredholm integral equations of the second kind is proposed on the segment  $[a, b]$  of the real axis. The solution is search in the form of a Padé approximant with indeterminate coefficients. A specific form of Padé approximant is found in an iterative process in which part of the expression of a nonlinear equation is taken from the previous iteration. By collocations of the approximate equation at specified points obtains an overdetermined system of linear equations with respect to the Padé approximant coefficients which is solved by applying the QR decomposition to the matrix of the linear system. Presented the results of numerical experiments on solving several equations for which are known results obtained by other methods. By comparing the results obtained by the proposed algorithm with results achieved by other methods shown it's advantage in accuracy of the approximate solution over the compared methods.

**Keywords:** Fredholm equation of the second kind, Padé approximation, Gauss quadrature formula, collocation method, linear least squares problem, method of high accuracy.

---

KIRILLOV, P.I., SHAPEEV, V.P., SOLUTION OF FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND BY THE METHOD OF COLLOCATIONS AND LEAST SQUARES WITH PADE APPROXIMATION.

© 2024 Кириллов П.И., Шапеев В.П.

Работа поддержана РФФ (грант 23-21-00499).

Поступила 6 сентября 2024 г., опубликована 3 марта 2025 г.

## 1 Введение

Интегральные уравнения Фредгольма широко встречаются в задачах физики, например, таких как воздействие электромагнитного поля на проводящее тело [1]. Они позволяют связать экспериментальные спектры с различными основными распределениями, например, с массовым распределением полимеров в полимерном расплаве [2] или с распределением времён релаксации в системе [3]. Уравнения Фредгольма также возникают в задачах механики жидкости, включающих гидродинамические взаимодействия вблизи упругих границ конечного размера [4]. Применение уравнений Фредгольма имеет место в компьютерной графике, где они применяются при создании фотореалистичных изображений и для моделирования переноса света от его виртуальных источников в плоскость изображения. При решении подобных задач уравнения Фредгольма часто называют уравнениями рендеринга. Ввиду важности таких практических задач, возникает необходимость эффективного решения этих уравнений. В данной работе предложен новый численный алгоритм решения одномерных неоднородных уравнений Фредгольма второго рода методом коллокации и наименьших квадратов (КНК) с дробно-рациональной аппроксимацией.

На данный момент методом КНК с полиномиальной аппроксимацией функций с повышенной точностью решён ряд задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений, которые применяются для моделирования различных физических процессов. В методе КНК приближённое решение дифференциальных [5–10] и интегральных [11] уравнений сводится к решению переопределённых систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). На решении линейной задачи наименьших квадратов в методе КНК минимизируется функционал невязки уравнений СЛАУ, что расширяет возможности применения метода коллокации.

Стоит отметить, что в методах вычислительной математики, в том числе методе КНК, количество работ, посвящённых полиномиальной аппроксимации по очевидным причинам, значительно превосходит число работ с применением аппроксимации Паде (АП). Многоточечная АП функций имеет преимущество по сходимости и точности на большей длине отрезках по сравнению с локальной аппроксимацией, основанной на разложении функции в ряд Тейлора и зачастую имеющей существенно ограниченный радиус сходимости. Примерами исследования многоточечной АП являются работы [12, 13]. Применению АП для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) посвящён ряд работ [14–17]. В [17] для этого применена многоточечная аппроксимация. Однако в приложении к решению интегральных уравнений возможности

дробно-рациональной аппроксимации до сих пор не изучены. Устранению этого пробела и посвящена рассматриваемая работа. Её цель — показать возможность решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода путём итерационного решения нелинейного уравнения, полученного многоточечной АП, привести количественные характеристики процесса и результатов решения.

Одним из важнейших свойств дробно-рациональных функций является возможность находить с их помощью высокоточные приближения функций, которые могут быть значительно точнее их полиномиальных аппроксимаций. Для АП будем использовать общепринятое обозначение  $[L/M]$ , где  $L$  — степень полинома в её числителе, а  $M$  — степень полинома в знаменателе.

Предложенный в данной работе вариант алгоритма численного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода достаточно легко реализуется в компьютерной программе. Здесь это сделано с помощью средств языка программирования C++. Такая программа применима для решения конкретных интегральных уравнений, получения количественных характеристик их решения и оценки точности численных результатов.

Все численные расчёты в данной работе были проведены на персональном компьютере с процессором Intel(R) Xeon(R) CPU X5675, имеющим частоту 3.68GHz.

## 2 Постановка задачи и способ её решения.

Рассмотрим одномерное интегральное уравнение Фредгольма второго рода на отрезке  $\Omega = [a, b]$ , взятом в качестве расчётной области:

$$g(x)u(x) = \int_a^b K(x, s)u(s)ds + f(x), \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

где  $g(x)$ ,  $u(x)$ ,  $K(x, s)$ ,  $f(x)$  - заданные дополнительная функция, искомое решение, ядро и свободный член, соответственно. Зададим на  $[a, b]$  равномерную сетку из  $n$  равных частичных отрезков – ячеек  $[a_i, b_i]$  длины  $h = \frac{b-a}{n}$ , где

$$a_i = a + (i - 1)h, \quad b_i = a_i + h, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Введем их нумерацию слева направо. Обозначим через  $u_{hi}$  приближённое численное решение уравнения (1) на  $i$ -ом частичном отрезке. Куски решения  $u_{hi}$ ,  $i = \overline{1, n}$  на частичных отрезках будем искать как АП  $[L_i/M_i]$  в виде

$$u_{hi}(x) = \frac{N_{L_i}(x)}{D_{M_i}(x)}, \quad (3)$$

$$N_{L_i}(x) = N_{i0} + N_{i1}x + \dots + N_{iL}x^L, \quad (4)$$

$$D_{M_i}(x) = D_{i0} + D_{i1}x + \dots + D_{iM}x^M. \quad (5)$$

В результате аппроксимации приближённое решение уравнения (1) сводится к решению уравнения:

$$g(x)u_{hi}(x) = \int_a^b K(x, s)u_h(s)ds + f(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

где  $u_h(s) = \{u_{hi}(s), i = \overline{1, n}\}$ . Оно нелинейно относительно неизвестных коэффициентов представления решения (3) для всех  $i = \overline{1, n}$ . Чтобы свести построение АП к решению СЛАУ, умножим уравнение (6) на  $D_{Mi}(x)$  и решение полученного уравнения будем искать в итерационном процессе

$$g(x)N_{Li}^k(x) = D_{Mi}^k(x) \left( \int_a^b K(x, s)u_h^{k-1}(s)ds + f(x) \right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

в котором на текущей  $k$ -ой итерации значения всех величин, помеченных индексом  $k - 1$ , возьмём с предыдущей итерации. Для однозначности определения АП положим  $D_{i0} = 1, i = \overline{1, n}$ . Для краткости изложения введём обозначение

$$r^{k-1}(x) = \int_a^b K(x, s)u_h^{k-1}(s)ds + f(x). \quad (8)$$

Все слагаемые, содержащие искомые коэффициенты в представлении  $u_{hi}(x)$  в (3), перенесём в левую часть:

$$g(x)(N_{i0}^k + N_{i1}^k x + \dots + N_{iL}^k x^L) - (D_{i1}^k x + \dots + D_{iM}^k x^M)r^{k-1}(x) = r^{k-1}(x). \quad (9)$$

Полученное уравнение на  $k$ -ой итерации линейно относительно коэффициентов искомой АП, поскольку  $r^{k-1}(x)$  берется с  $k - 1$ -ой итерации. На каждом частичном отрезке зададим  $v$  точек коллокации, при этом  $v \geq L + M + 1$ . В реализованном здесь варианте метода точками записи уравнений коллокации на каждом частичном отрезке взяты корни полинома Чебышёва степени  $v$  на отрезке  $[-1, 1]$ , спроектированные на  $[a_i, b_i]$ , т.е. точки множества

$$X = \{x_{i\iota} \mid x_{i\iota} = \frac{1}{2}(b_i + a_i) + \frac{h}{2} \cos \left( \frac{2\iota - 1}{2v} \pi \right), i = \overline{1, n}; \iota = \overline{1, v}\}. \quad (10)$$

В итерационном процессе на текущей  $k$ -ой итерации неизвестные коэффициенты  $\{N_{ij_1}^k, i = \overline{1, n}; j_1 = \overline{0, L}\}$  и  $\{D_{ij_2}^k, i = \overline{1, n}; j_2 = \overline{1, M}\}$  определяются из уравнений коллокации, которые получаются требованием того, чтобы невязка уравнения (9) на искомом приближённом решении в точках коллокации  $X$  обращалась в нуль.

Интеграл в (8) в некоторой рассматриваемой точке коллокации  $x_{cl}$  вычислялся здесь приближённо с помощью квадратурной формулы Гаусса [18]. Были применены два способа его вычисления. В первом случае для его вычисления формула Гаусса применялась один раз с  $d$  узлами на

всём отрезке  $[a, b]$ . Во втором случае он вычислялся как сумма  $n$  интегралов, вычисленных на каждом частичном отрезке по формуле Гаусса с  $d$  узлами. В первом случае

$$\int_a^b K(x_{cl}, s) u_h^{k-1}(s) ds \approx \sum_{\sigma=1}^d \omega_{\sigma} K(x_{cl}, \eta_{\sigma}) u_h^{k-1}(\eta_{\sigma}), \quad (11)$$

где  $\eta_{\sigma} = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{2}(b-a)\xi_{\sigma}$  и  $\omega_{\sigma} = \frac{1}{2}(b-a)\gamma_{\sigma}$ . Во втором случае

$$\int_a^b K(x_{cl}, s) u_h^{k-1}(s) ds \approx \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma=1}^d \omega_{\sigma} K(x_{cl}, \eta_{i\sigma}) u_h^{k-1}(\eta_{i\sigma}), \quad (12)$$

где  $\eta_{i\sigma} = \frac{1}{2}(b_i + a_i) + \frac{h}{2}\xi_{\sigma}$  и  $\omega_{\sigma} = \frac{h}{2}\gamma_{\sigma}$ . В обоих случаях  $\gamma_{\sigma}$  и  $\xi_{\sigma}$  — веса и узлы квадратурной формулы Гаусса на отрезке  $[-1, 1]$  для заданного  $d$ . Независимо от способа подсчёта интеграла значения узлов и весов для любого  $d$  брались с точными 16-тью десятичными разрядами.

Таким образом, относительно коэффициентов искомой АП на каждом частичном отрезке коллокацией уравнения (9) выписывалась переопределённая система из  $v$  линейных уравнений, элементы матрицы которой — числа. Её можно назвать частичной СЛАУ.

В результате объединения всех частичных СЛАУ получается СЛАУ вида:

$$\mathbf{A}^k \overline{\mathbf{C}^k} = \overline{\mathbf{B}^k}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{A}^k$  — прямоугольная матрица размера  $n \cdot v \times n \cdot (L + M + 1)$ ,  $\overline{\mathbf{C}^k}$  — вектор с  $n \cdot (L + M + 1)$  компонентами — неизвестными коэффициентами представления решения уравнения (9) и  $\overline{\mathbf{B}^k}$  — вектор правой части с  $n \cdot v$  компонентами.

Из (13) на отрезке  $[a, b]$  полностью определяется кусочно-рациональная функция — решение уравнения (9).

Величину

$$\zeta = \frac{v}{L + M + 1} \quad (14)$$

назовём степень переопределённости СЛАУ. Для решения системы (13) применим  $QR$ -декомпозицию матрицы  $\mathbf{A}^k$ . На решении СЛАУ с полученной матрицей  $R$  достигается минимум функционала невязки решаемой СЛАУ [5]. То есть, оно является решением линейной задачи наименьших квадратов. Далее в численных экспериментах будет показано, что от  $\zeta$  зависит точность приближённого численного решения. Причина в том, что  $\zeta$  влияет на обусловленность получаемых СЛАУ. С его ростом от значения  $\zeta = 1$  до некоторого предела, как правило, улучшается обусловленность рассматриваемых в методе КНК переопределённых СЛАУ. В этом, в частности, проявляется достоинство многоточечной аппроксимации. Но при дальнейшем росте  $\zeta$ , когда увеличивается размер

матрицы СЛАУ, при решении её любым численным методом увеличивается число арифметических действий, что приводит к увеличению накопления ошибок округлений в процессе вычислений и к росту погрешности решения. Аналогично проявляется свойство алгоритма при росте значений параметров  $n$ ,  $L$  и  $M$ , от которых непосредственно зависит точность решения. Это в значительной мере проявлялось в численных экспериментах по решению предложенным здесь алгоритмом примеров различных уравнений.

В качестве матрицы  $\mathbf{Q}^k$  здесь взята матрица вращений Гивенса. Из преобразованной СЛАУ отбрасываются  $n(v - (L + M + 1))$  последних уравнений, имеющих лишь нули в левой части. Их правые части суть невязки на искомом решении СЛАУ. Теоретически с ростом числа неизвестных в СЛАУ при отсутствии ошибок округлений в сходящемся численном решении они стремятся к нулю. Полученная СЛАУ с матрицей  $\mathbf{R}^k$  решается обратным ходом последовательного исключения неизвестных по Гауссу.

В итерационном процессе решения уравнения (9) для искомых величин задаётся начальное приближение в виде чисел

$$N_{ij_1}^0 = c_{ij_1}^0, \quad D_{ij_2}^0 = c_{ij_2}^0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j_1 = \overline{0, L}, \quad j_2 = \overline{1, M}. \quad (15)$$

При решении всех рассмотренных в данной работе тестовых примеров, в том числе тех, которые здесь опущены, наблюдалась сходимость от начального приближения (15). Во всех случаях проводилась 1000 итераций. После каждой итерации в равномерной норме подсчитывался максимум погрешности решения в области  $\Omega$ :

$$E_r = \|u_t - u_h\|_C = \max_W |u_t(x_w) - u_h(x_w)|, \quad (16)$$

где  $u_t$  — точное решение уравнения (1),  $W = \{x_w \mid x_w = a + \frac{w(b-a)}{999}, w = 0, \dots, 999\}$  — множество точек в области  $\Omega$ . То есть, для подсчёта величины погрешности в области бралась 1000 точек, расположенных в ней равномерно, включая точки  $a$  и  $b$ . Сравнением величин погрешностей на последовательных итерациях определялся минимум погрешности во всём цикле 1000 итераций и соответствующий ему номер итерации.

### 3 Численные эксперименты.

Далее приведены таблицы результатов численного решения по изложенному алгоритму примеров, взятых, начиная со второго, из публикаций других авторов, решённых другими методами. В таблицах приведены номер итерации ( $it$ ), на которой была достигнута соответствующая ему погрешность  $E_r$  в цикле из 1000 итераций. Там также приведены соответствующие числа обусловленности ( $cond$ ) матриц СЛАУ  $\mathbf{R}^k$ , которые были решены на указанном номере итерации. Для подсчёта числа обусловленности использовалась написанная на C++ внешняя библиотека Eigen версии 3.4.0, доступная для скачивания по ссылке

<https://gitlab.com/libeigen/eigen/-/releases/3.4.0?ysclid=lz8jtqr05u396750266>.

С её помощью сначала отыскивалось SVD-разложение матрицы  $\mathbf{R}^k$ . Далее число обусловленности определялось как результат деления максимального сингулярного числа матрицы на минимальное. При мельчении сетки, а также при увеличении степени полиномов в  $[L/M]$  наблюдался рост значения числа обусловленности вплоть до того, что применяемая библиотека Eigen выдавала результат, что минимальное сингулярное число матрицы равно нулю, в силу чего числа обусловленности таких матриц обращались в бесконечность. В этих случаях в таблицах значения числа обусловленности обозначено как INF.

**Пример 3.1.** *Прежде всего для верификации предложенного алгоритма и реализующей его компьютерной программы был использован тестовый пример с простыми, гладкими функциями в (1):*

$$\begin{aligned} g(x) &= 1, \\ u_t(x) &= \sin(x)e^x, \\ K(x, s) &= se^s \sin(x+s), \\ f_b(x) &= e^{2b}((1-2b)\sin(2b+x) + (4b-2)\cos(x) - 2b\cos(2b+x)), \\ f_a(x) &= e^{2a}((1-2a)\sin(2a+x) + (4a-2)\cos(x) - 2a\cos(2a+x)), \\ f(x) &= u_t(x) - \frac{1}{16}(f_b(x) - f_a(x)), \end{aligned}$$

при  $a = -1$ ,  $b = 1$ . На данном тестовом примере со значениями параметров  $d = 30$  (во всей области),  $\zeta = 1$ ,  $L = 5$ ,  $M = 6$ ,  $n = 3$  и начальном приближении  $c_{ij_1}^0 = c_{ij_2}^0 = 1$  для всех  $i, j_1, j_2$  после 418 итераций погрешность приближённого решения  $E_r = 1.33 \cdot 10^{-15}$  (см. таблицу 1 и рис. 1). То есть, она близка к машинному нулю (или к величине погрешности округления) в арифметике чисел в формате double. В последних двух строках таблицы 1 видно, что увеличение числа уравнений СЛАУ при фиксированной разрядности представления чисел на компьютере после достижения некоторой точности решения может привести к росту погрешности решения. Цикл из 1000 итераций занял 0.45 минуты.

**Пример 3.2.** *В качестве следующего теста был взят пример 3.9 из книги [19] (см. стр. 162)*

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos(x), \\ u_t(x) &= 8.5 + \frac{128}{17}\cos(2x), \\ K(x, s) &= \frac{3}{6.4\pi\cos^2(\frac{x+s}{2}) - 10\pi}, \\ f(x) &= g(x)u_t(x) + 16.5 - 16\sin^2(x) - \frac{128}{17}\cos(2x), \end{aligned}$$

в котором  $a = -\pi$ ,  $b = \pi$ . В его решении по предложенному алгоритму с параметрами  $d = 3$  (в каждой ячейке),  $\zeta = 2$ ,  $L = 5$ ,  $M = 6$ ,  $n = 23$  и

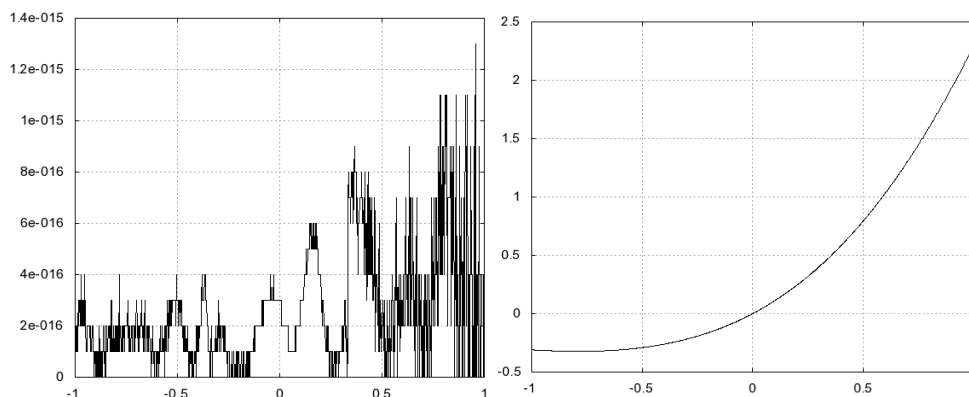


Рис. 1. Графики погрешности (слева) и приближённого численного решения (справа) тестового примера 1.

$n$	$L$	$M$	$\zeta$	$E_r$	$it$	$cond$
1	1	2	1	$2.62 \cdot 10^{-1}$	210	$1.73 \cdot 10^1$
1	1	2	2	$8.35 \cdot 10^{-2}$	5	$1.59 \cdot 10^1$
1	3	4	2	$4.17 \cdot 10^{-6}$	466	$4.11 \cdot 10^4$
1	5	6	2	$5.01 \cdot 10^{-11}$	843	$3.89 \cdot 10^8$
2	1	2	1	$5.23 \cdot 10^{-3}$	61	$2.22 \cdot 10^2$
2	5	6	1	$1.03 \cdot 10^{-14}$	431	$1.62 \cdot 10^{12}$
2	5	6	1.5	$7.98 \cdot 10^{-15}$	424	$1.6 \cdot 10^{12}$
3	1	2	1	$7.84 \cdot 10^{-4}$	90	$9.06 \cdot 10^2$
3	3	4	2	$2.21 \cdot 10^{-9}$	490	$1.18 \cdot 10^8$
3	5	6	1	$1.33 \cdot 10^{-15}$	418	$2.97 \cdot 10^{14}$
3	5	6	1.5	$1.55 \cdot 10^{-15}$	419	$2.95 \cdot 10^{14}$

ТАБЛИЦА 1. Результаты численного решения примера 1.

начальным приближением  $c_{ij_1}^0 = c_{ij_2}^0 = 1$  для всех  $i, j_1, j_2$  после 409 итераций  $E_r = 9.11 \cdot 10^{-13}$  (см. таблицу 2 и рис. 2). В этом примере 1000 итераций заняли 2.03 минуты. В [19] этот пример решался методом квадратур на адаптивной сетке с 36 частичными отрезками. Авторами [19] при решении этого примера была достигнута точность решения порядка  $10^{-6}$ . Заметим, что этот пример предъявляет к численным методам решения интегральных уравнений более жесткие требования, чем предыдущий. Во-первых, в нем правая часть уравнения и само решение имеют более сложное поведение в области  $\Omega$ , чем в первом примере. Во-вторых, у его решения в  $\Omega$  пять экстремумов и градиенты больше, чем у решения в первом примере. Поэтому СЛАУ при решении второго примера получается хуже обусловленной, чем в первом случае.



Вследствие этого при решении СЛАУ во втором примере в результате арифметических действий копится большая ошибка округлений, и решение получается менее точным. Частота и амплитуда осцилляций на графиках погрешности решения в обоих примерах указывают, что они в значительной степени связаны с ошибками округлений, которые при арифметических вычислениях на компьютерах имеют случайный характер. Амплитуда осцилляций по величине близка к самой погрешности, то есть, величина погрешности в значительной мере определяется результатом округления, увеличенного из-за плохой обусловленности решаемых здесь СЛАУ. Как известно, в методах численного решения задач аппроксимации функций и дифференциальных уравнений на величину погрешности можно воздействовать адаптацией расчётной сетки. Также существенного уточнения решения можно достичь увеличением количества разрядов представления чисел на компьютере.

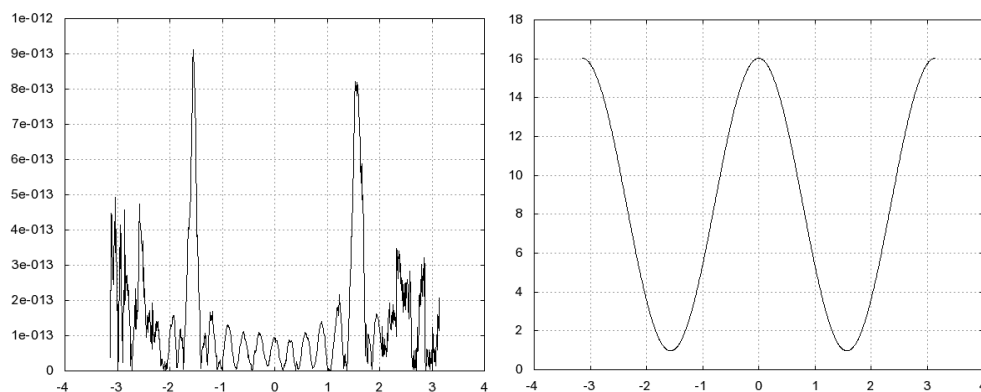


Рис. 2. Графики погрешности (слева) и приближённого численного решения (справа) примера 3.9 из [19].

Последующие примеры решения уравнений методом КНК для краткости изложения приведены без таблиц и рисунков. Отметим, что и при их решении наблюдается "пелена" осцилляций на графиках погрешности, когда она становится близкой к погрешности представления чисел в формате double.

**Пример 3.3.** В записи уравнения (1) в примере 1, решенного в [20], использованы следующие функции

$$\begin{aligned} g(x) &= 1, \\ u_t(x) &= e^x, \\ K(x, s) &= s, \\ f(x) &= u_t(x) - 1, \end{aligned}$$

$n$	$L$	$M$	$\zeta$	$E_r$	$it$	$cond$
21	1	2	1	$2.17 \cdot 10^{-1}$	48	$1.01 \cdot 10^6$
21	1	2	2	$1.46 \cdot 10^{-1}$	65	$9.63 \cdot 10^7$
21	3	4	1	$8.47 \cdot 10^{-7}$	155	$3.61 \cdot 10^{13}$
21	3	4	1.5	$4 \cdot 10^{-7}$	155	$3.62 \cdot 10^{13}$
21	5	6	1	$1.81 \cdot 10^{-10}$	260	<i>INF</i>
21	5	6	1.5	$6.08 \cdot 10^{-11}$	260	<i>INF</i>
21	5	6	2	$3.42 \cdot 10^{-11}$	260	<i>INF</i>
23	5	6	1	$1.25 \cdot 10^{-12}$	942	<i>INF</i>
23	5	6	2	$9.11 \cdot 10^{-13}$	409	<i>INF</i>

Таблица 2. Результаты численного решения примера 3.9 из [19].

и  $a = 0, b = 1$ . В результате решения этого примера применением предложенного здесь алгоритма с параметрами  $d = 10$  (во всей области),  $\zeta = 2, L = 3, M = 4, n = 5$  и начальном приближении  $c_{ij_1}^0 = c_{ij_2}^0 = 1$  для всех  $i, j_1, j_2$  после 51 итерации  $E_r = 1.77 \cdot 10^{-15}$ . Цикл из 1000 итераций занял 0.26 минуты. Авторами работы [20] в решении этого примера была получена погрешность порядка  $10^0$ .

**Пример 3.4.** В решении уравнения в примере 3, в работе [21] с функциями

$$\begin{aligned} g(x) &= 1, \\ u_t(x) &= e^{2x}, \\ K(x, s) &= xe^{-2s}, \\ f(x) &= u_t(x) - x \end{aligned}$$

при  $a = 0, b = 1$  с параметрами изложенного здесь алгоритма  $d = 10$  (во всей области),  $\zeta = 2, L = 5, M = 6, n = 2$  и начальным приближением  $c_{ij_1}^0 = c_{ij_2}^0 = 1$  для всех  $i, j_1, j_2$  после 26 итераций  $E_r = 3.55 \cdot 10^{-15}$ . Цикл из 1000 итераций занял 0.24 минуты. В [21] решение этого уравнения получено с точностью порядка  $10^{-8}$ .

**Пример 3.5.** В примере 4, в работе [21] приведено решение уравнения (1) с функциями

$$\begin{aligned} g(x) &= 1, \\ u_t(x) &= \cos(x) + 1.5x(\sin(1) + \cos(1) - 1), \\ K(x, s) &= xs, \\ f(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

и значениями  $a = 0, b = 1$ . Авторами в [21] было получено решение с точностью  $10^{-3}$ . При решении этого примера по изложенному в данной работе алгоритму со значениями параметров  $d = 10$  (во всей области),  $\zeta = 2, L = 6, M = 7, n = 1$  и начальном приближении

$c_{ij_1}^0 = c_{ij_2}^0 = 1$  для всех  $i, j_1, j_2$  за 31 итерацию  $E_r = 8.88 \cdot 10^{-16}$ . При этом цикл из 1000 итераций занял 0.27 минуты.

Решение уравнения Фредгольма во всей области  $\Omega$  в данном примере получилось в виде одной дробно-рациональной функции [6/7] значение которого в любой точке области может быть вычислено за небольшое число арифметических действий с точностью, близкой к точности представления чисел в формате *double*

$$\begin{aligned}
 [6/7] = & (0.9999999999999997 + 0.5444463736574465x - \\
 & -0.4832153444651037x^2 + 0.0315091129403880x^3 + \\
 & +0.0249432826404293x^4 - 0.0001470293168347x^5 - \\
 & -0.0003235475451131x^6)/(1 - 0.0282135623566072x + \\
 & +0.0329414323488064x^2 - 0.0014619067791112x^3 + \\
 & +0.0005845075791663x^4 - 0.0000371415332684x^5 + \\
 & +0.0000063040707481x^6 - 0.0000004507294061x^7).
 \end{aligned}$$

### Заключение

На основе применения метода коллокации и наименьших квадратов предложен и реализован на компьютере итерационный алгоритм построения многоточечной аппроксимации Паде  $[L/M]$  решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В нём построение АП сведено к решению предварительно линеаризованного приближённого нелинейного уравнения, полученного аппроксимацией исходного уравнения. Показана возможность высокоточного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода методом КНК с АП. Исследованы зависимость погрешности приближённого решения и числа обусловленности СЛАУ, решение которой определяет искомую АП, от её степени переопределённости, от количества частичных отрезков разбиения отрезка, на котором решается уравнение, от степеней  $L$  и  $M$  числителя и знаменателя аппроксиманта  $[L/M]$ . Эффективность предложенной процедуры показана сравнением результатов, полученных её применением для решения примеров, с результатами их решения, опубликованными другими авторами. Одно из достоинств предложенного алгоритма в том, что в качестве решения уравнения получается высокоточный его аппроксимант – аналитическое выражение, значение которого небольшим числом арифметических действий можно вычислить в любой точке области решения заданного уравнения.

## References

- [1] A.O. Savchenko, *Numerical and analytical methods for calculating the effect of an electromagnetic field on a conducting body*, Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Novosibirsk, 2017.
- [2] J. Honerkamp, J. Weese, *Tikhonovs regularization method for ill-posed problems. A comparison of different methods for the determination of the regularization parameter*, Contin. Mech. Thermodyn., **2**:1 (1990), 17–30. Zbl 0825.76669
- [3] H. Schäfer, E. Sternin, R. Stannarius, M. Arndt, F. Kremer, *Novel approach to the analysis of broadband dielectric spectra*, Phys. Rev. Lett., **76**:12 (1996), 2177–2180.
- [4] A. Daddi-Moussa-Ider, *Asymmetric Stokes flow induced by a transverse point force acting near a finite-sized elastic membrane*, J. Phys. Soc. Jpn., **89** (2020), Article ID 124401.
- [5] V.I. Isaev, V.P. Shapeev, *High-accuracy versions of the collocations and least squares method for the numerical solution of the Navier-Stokes equations*, Comput. Math. Math. Phys., **50**:10 (2010), 1670–1681. Zbl 1224.35316
- [6] V.P. Shapeev, E.V. Vorozhtsov, *CAS application to the construction of the collocations and least residuals method for the solution of the Burgers and Korteweg-de-Vries-Burgers equations*, in Gerdt, Vladimir P. (ed.) et al., *Computer algebra in scientific computing*, 16th international workshop, CASC 2014, Warsaw, Poland, September 8–12, 2014. Proceedings, Lect. Notes Comput. Sci., **8660**, Springer, Berlin, 2014, 432–446. Zbl 1417.76001
- [7] V.P. Shapeev, V.A. Belyaev, *Versions of high order accuracy collocation and least residuals method in the domain with a curvilinear boundary*, Vychisl. Tekhnol., **21**:5 (2016), 95–110. Zbl 1377.65157
- [8] V.A. Belyaev, V.P. Shapeev, *Versions of the collocation and least squares method for solving biharmonic equations in non-canonical domains*, AIP Conf. Proc., **1893**:1 (2017), Article ID 030102.
- [9] V.P. Shapeev, V.A. Belyaev, S.K. Golushko, S.V. Idimeshev, *New possibilities and applications of the least squares collocation method*, EPJ Web Conf., **173** (2018), Article ID 01012.
- [10] E.V. Vorozhtsov, V.P. Shapeev, *On the efficiency of combining different methods for acceleration of iterations at the solution of PDEs by the method of collocations and least residuals*, Appl. Math. Comput., **363** (2019), Article ID 124644.
- [11] V.P. Shapeev, E.V. Vorozhtsov, *High-accuracy numerical solution of the second-kind integral equations in the Mathematica environment*, J. Multidisciplinary. Eng. Sci. Technology, **5**:11 (2018), 9308–9319.
- [12] A.A. Gonchar, N.N. Novikova, G.M. Khenkin, *Multipoint Padé approximants*, Mathematical manual. 1996. Vol. 187. №. 12. 57-86. (in Russian).
- [13] A.A. Kandayan, *Multipoint Padé approximations of the beta functiony*, Math. Notes **85**:2 (2009), 176–189. Zbl 1183.41011
- [14] A.N. Khovansky, *Application of continued fractions and their generalizations to problems of approximate analysis*, GIITL, Moscow, 1956.
- [15] I.G. Velichko, I.G. Tkachenko, V.V. Balabanova, *Application of the method of continued fractions for obtaining Padé approximants of solutions to Cauchy problems for first-order differential equations*, Bulletin of science and education of the North-West of Russia, **1**:3 (2015), 1–9.
- [16] V.E. Vishnevsky, A.V. Zubov, O.A. Ivanova, *Padé approximation of the solution to the Cauchy problem*, Vestnik S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr., **2012**:4 (2012), 3–17.
- [17] V.P. Shapeev, *Solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations using the collocation and least squares method with the Padé approximation*, Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model. Program., **16**:4 (2023), 71–83. Zbl 1534.34019

- [18] N.N. Kalitkin, *Numerical methods*, Nauka, Moscow, 1978. MR0514844
- [19] A.F. Verlan', V.S. Sizikov, *Integral equations: methods, algorithms, programs. Handbook*, Naukova Dumka, Kiev, 1986. Zbl 0635.65134
- [20] M.A. Ramadan, M.R. Ali, *An efficient hybrid method for solving fredholm integral equations using triangular functions*, TMSCI, **5**:1 (2017), 213–224.
- [21] Ahmed Flayih Jaber, Adil M.H.R. Al-rammahi, *Orthogonal Basis to Solve Linear Fredholm Integral Equations via Galerkin Method*, IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng., **928**, 2020, Paper No. 042016.

KIRILLOV PAVEL IVANOVICH

KHRISTIANOVICH INSTITUTE OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS OF THE  
SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES,  
INSTITUTSKAYA STR., 4/1,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address:* [Tea2805@mail.ru](mailto:Tea2805@mail.ru)

SHAPEEV VASILY PAVLOVICH

KHRISTIANOVICH INSTITUTE OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS OF THE  
SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES,  
INSTITUTSKAYA STR., 4/1,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address:* [vshapeev@gmail.com](mailto:vshapeev@gmail.com)