

РАНГИ ПЛАНАРНОСТИ ПОЛУГРУППОВЫХ
МНОГООБРАЗИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ
ПОЛУГРУППАМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКАД.В. СОЛОМАТИН *Представлено С.В. СУДОПЛАТОВЫМ*

Abstract: In this paper, we calculate the planarity rank of the variety generated by all semigroups of order three and calculate the planarity ranks of its subvarieties generated by each semigroups of order three.

Keywords: Cayley graph, planarity rank, semigroup.

1 Введение

Изучение полугрупп малых порядков может быть полезно по нескольким причинам:

1) Основы алгебры: Полугруппы являются одной из важнейших структур в алгебре. Они представляют собой множество с заданной на нем ассоциативной бинарной операцией. Изучение полугрупп помогает понять основные алгебраические структуры и операции.

2) Изучение свойств: Полугруппы малых порядков могут быть полезны для изучения свойств полугрупп в целом. Они могут служить примерами или контрпримерами для различных свойств и теорем.

SOLOMATIN, D.V., PLANARITY RANKS OF SEMIGROUP VARIETIES GENERATED BY ALL SEMIGROUPS OF ORDER THREE.

© 2024 Соломатин Д.В.

Работа поддержана ОмГПУ.

Поступила 22 июля 2024 г., опубликована 19 марта 2025 г.

3) Приложения: Полугруппы находят применение в различных областях, включая теорию кодирования, теорию автоматов и дискретную математику.

4) Теоретические исследования: Изучение полугрупп малых порядков может привести к открытию новых теоретических результатов в области алгебры.

5) Обучение и образование: Полугруппы малых порядков могут быть полезны в образовательных целях, помогая студентам лучше понять и визуализировать абстрактные алгебраические концепции.

Важно отметить, что конкретная цель изучения полугрупп малых порядков может зависеть от контекста и интересов исследователя. На заре становления проблематики настоящей статьи было накоплено достаточно большое количество разрозненных примеров полугрупп как с планарными графами Кэли, так и с не допускающими плоскую укладку ни при каком выборе множества образующих элементов. В поисках путей и способов преодоления этой разрозненности с целью обобщения и систематизации найденных примеров естественным образом был осуществлен переход к полугрупповым многообразиям, с дальнейшим вычислением их рангов планарности, характеризующих максимальное число образующих, относительно которых свободная полугруппа многообразия допускает планарный граф Кэли. Дело в том, что при увеличении числа образующих увеличиваются и шансы на появление пересечений ребер в графе Кэли формирующейся полугруппы. Зададимся целью перечисления многообразий Мартынова, то есть многообразий, для которых гипотеза Мартынова об ограниченности конечных рангов планарности значением 4 верна [1]. Несколько лет после формулирования этой гипотезы все усилия были направлены на поиски соответствующего доказательства, пока у талантливого математика С.В. Гусева не возникла идея: а что если выбирать системы тождеств определяющих многообразия таким способом, чтобы некоторые из тождеств, приводящие непосредственно к запутываниям ребер и потере планарности в графах Кэли свободных полугрупп формируемых многообразий, начинали действовать как нетривиальные не сразу, а лишь начиная с некоторого наперёд заданного числа образующих? Эту идею удалось развить автору до бесконечного множества примеров многообразий любого наперёд заданного конечного значения ранга планарности, являющихся контрпримерами к гипотезе Л.М. Мартынова, что подкрепило интерес к описанию классов многообразий полугрупп ограниченного ранга планарности. Известно, что такими многообразиями среди прочих являются многообразия коммутативных моноидов [2, теорема 56], модулярные многообразия полугрупп [3, теорема 7]. В то же время, существуют многообразия, конечные ранги планарности которых превышают 4 [2, теорема 60], тем интереснее отыскание многообразий, удовлетворяющих гипотезе Мартынова. В качестве основного результата приведём новую серию многообразий Мартынова, чем сформируем фундамент дальнейшего исследования рангов

планарности полугрупповых многообразий, порожденных полугруппами четвертого порядка. Обозначим за $s_n = \sup(\{r_\pi(\text{var } S) < \infty : |S| = n\})$ супремум множества конечных значений рангов планарности многообразий порожденных полугруппами порядка n . В результате сопоставления значений s_3 и s_4 с $\text{var } S$, при $|S| = 3$ и $|S| = 4$, появится возможность сформулировать гипотезу перехода от s_n к s_{n+1} для любого натурального n . Более подробно в [4] приводится мотивация изучения конечных полугрупп, там же перечислены все полугруппы до четвертого порядка включительно. В [5] развернуто описываются полугрупповые многообразия, порожденные полугруппами третьего порядка. Обозначим через \mathbf{S}_n многообразие, порожденное всеми полугруппами порядка n . В настоящей статье вычислен ранг планарности многообразия \mathbf{S}_3 и вычислены ранги планарности его подмногообразий, порождаемых каждой из полугрупп третьего порядка. Знание такого числового инварианта полугруппового многообразия как ранг планарности способствует построению принципиально новой классификации полугрупп и их многообразий, определяя структурные свойства и отношения между элементами множества, состоящего из множеств полугрупповых многообразий.

В силу того, что значение ранга планарности может принимать любое натуральное число, появляется возможность занумеровать множества полугрупповых многообразий определенным образом их рангами планарности. Ранее в математике покрытие несчетных множеств счетным количеством подмножеств занимались такие выдающиеся математики, как Г. Кантор и Ф. Хаусдорф. Кантор, основатель теории множеств, занимался разбиением несчетных множеств на счетное количество подмножеств несчетной мощности в своей работе [6]. В этой работе он ввел понятие мощности множеств и исследовал различные уровни бесконечности. Хаусдорф, один из основоположников топологии, также внес значительный вклад в теорию множеств и исследование несчетных множеств в своей книге [7], где он развил теорию множеств и топологию, исследуя свойства несчетных множеств и их разбиение. В 1955 году было доказано, что алгоритмически невозможно распознать почти все нетривиальные свойства группы по её конечному числу определяющих соотношений [8], что было независимо подтверждено в более поздних исследованиях [9]. С тех пор, согласно теореме Адяна–Рабина о неразрешимости марковских свойств групп, планарность графов Кэли считается трудной для изучения. Поскольку наличие планарного графа Кэли является марковским свойством, не существует алгоритма, способного определить планарность графа Кэли по заданному представлению группы. В лучшем случае можно опираться лишь на известные «каталоги» планарных групп [10] и близких к ним структур [11], а так как полугруппы являются обобщением групп, то в полугруппах задача перечисления плоских графов Кэли имеет не меньшую сложность и составление «каталогов» планарных полугрупп наша задача.

2 Предварительные сведения

Правым графом Кэли полугруппы S относительно множества X образующих её элементов, или просто графом Кэли, называем ориентированный мультиграф с помеченными ребрами, множество вершин которого совпадает с S , а всякая его дуга начинается в вершине a , заканчивается в вершине b и помечена элементом $x \in X$ тогда и только тогда, когда в полугруппе S имеет место равенство $ax = b$. Левый граф Кэли определяется аналогично с тем лишь отличием, что вершина a соединена с вершиной b дугой, начинающейся в вершине a , заканчивающейся в вершине b и помеченной элементом $x \in X$, тогда и только тогда, когда в полугруппе S имеет место равенство $xa = b$. Для коммутативных полугрупп эти понятия совпадают, а для некоммутативных все утверждения полученные о правых графах Кэли двойственным образом с точностью до антиизоморфизма формулируются о левых графах Кэли полугрупп. Если не оговорено иного ниже будем рассматривать правые графы Кэли полугрупп. Процесс построения графа Кэли свободной полугруппы для каждого многообразия в Теоремах 1 и 2 осуществляется по следующему алгоритму:

- (1) Инициализировать список вершин VS , наполнив его всеми неразложимыми образующими из исходного множества X , и очистить список рёбер ES ;
- (2) Начать основной цикл;
- (3) Начать цикл перебора произведений;
- (4) Для каждого элемента $a \in VS$ и для каждого элемента $x \in X$:
 - (a) Если $ax \in VS$, то
 - (i) Если $(a, ax) \notin ES$, то добавить в ES ребро (a, ax) ;
 - (b) Иначе
 - (i) Добавить ax в VS ;
 - (ii) Добавить в ES ребро (a, ax) ;
- (5) Конец цикла перебора произведений;
- (6) Если количество элементов в VS и ES не увеличилось, то выход из основного цикла;
- (7) Конец основного цикла.

В связи со сказанным в определении основная проблема, которую предстоит решать при построении графов Кэли полугрупп, это проблема равенства слов, алгоритмически неразрешимая в общем случае. Алгоритмическая неразрешимость проблемы равенства слов для конечно определенных полугрупп впервые была доказана А.А.Марковым в 1947 году [12, Теорема 1]. Он показал, что для некоторых классов полугрупп и групп невозможно создать алгоритм, который бы определял, равны ли два слова в этих структурах. Безусловно это открытие стало важным вкладом в теорию вычислимости и теорию формальных языков, но при доказательстве основного результата настоящей статьи алгоритмической неразрешимости не возникает, и решить проблему равенства слов

полугрупп удастся известными алгоритмами параметризации и демодуляции термов с применением таких программных средств специального назначения, как Mace4 и Prover9, доступных в исходных кодах [13]. Так, например, для получения доказательства равенства $ab = ac$ элементов в свободной полугруппе многообразия полугрупп левых нулей средствами Prover9 может быть сформирован запрос:

```
formulas(assumptions).(x*y)*z=x*(y*z).x*y=x.end_of_list.
formulas(goals).x*y=x*z.end_of_list.
```

И будет получен ответ примерно следующего содержания: равенство выполнено, так как

1. $x * y = x * z$; доказываемое равенство
2. $x * y = x$; исходное
3. $c1 * c3 \neq c1 * c2$; предположили противное
4. $c1 \neq c1 * c2$; применили 2 к 3
5. $c1 \neq c1$; применили 2 к 4

6. Получили противоречие в 5. Следовательно, наше предположение неверно. Что и требовалось доказать.

Попытке автоматического поиска обоснования неравенства может способствовать аналогичный запрос в Mace4, запущенный параллельным потоком.

Для решения вопроса планарности графа Кэли полугруппы будем рассматривать граф Кэли относительно минимального множества неразложимых образующих полугруппы и говорить, что полугруппа допускает планарный граф Кэли, если существует такое минимальное множество неразложимых образующих, относительно которого основа графа Кэли является планарным графом. Такой подход оправдан потому, что минимальное множество неразложимых образующих присутствует в любом ином множестве образующих анализируемой полугруппы.

Напомним, что основой $SCay(S, X)$ графа Кэли $Cay(S, X)$ полугруппы S относительно минимального множества образующих X называем обыкновенный граф, полученный из исходного графа путём удаления меток, петель, ориентации дуг и объединением кратных ребер в одно ребро, соединяющее те же вершины.

Свободную n -порожденную полугруппу многообразия \mathbf{V} будем обозначать как $F_n(\mathbf{V})$.

Натуральное число r называем рангом планарности многообразия \mathbf{V} полугрупп, как было определено в [1], если все $F_n(\mathbf{V})$ свободные в \mathbf{V} полугруппы ранга $n \leq r$ планарные (т. е. допускают планарные правые графы Кэли), а свободная в этом многообразии полугруппа ранга $r + 1$ не является планарной. В таком случае будем писать $r_\pi(\mathbf{V}) = r$. Если для многообразия \mathbf{V} такого натурального числа r не существует, то считаем, что многообразию \mathbf{V} имеет бесконечный ранг планарности и пишем $r_\pi(\mathbf{V}) = \infty$.

3 Основной результат

Пусть

$$N_n = \langle a \mid a^n = a^{n+1} \rangle$$

— аperiодическая моногенная полугруппа порядка n ,

$$Y_2 = \{0, 1\}$$

— двухэлементная полурешетка,

$$C = \{0, ab, b\}$$

— подполугруппа полугруппы Брандта $B_2 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 0, aba = a, bab = b \rangle$,

$$L_n = \langle l_1, l_2, \dots, l_n \mid xy = x \rangle$$

— полугруппа левых нулей порядка n ,

$$\mathbb{Z}_n = \langle a \mid a^{n+1} = a \rangle$$

— циклическая группа порядка n ,

$$S^1$$

— обозначает моноид, полученный из S присоединением нейтрального элемента, если полугруппа S не обладала таковым, либо – в противном случае – саму полугруппу S .

С одной стороны, многообразии, порожденное полугруппой S , обозначается через $\text{var } S$, с другой, — через $\text{var } \Sigma$ обозначается многообразие полугрупп, заданное системой тождеств Σ . Тогда, следуя [5, Таблица 2], будем придерживаться таких обозначений для 13 многообразий, порождаемых одной из 18 возможных полугрупп третьего порядка, при этом в качестве порождающих полугрупп многообразий в ряде случаев будут взяты 2-элементные полугруппы:

$$\text{var } N_2 = \text{var}\{xy \approx zt\};$$

$$\text{var } N_3 = \text{var}\{xyz \approx hkt, xy \approx yx\};$$

$$\text{var } N_2 \vee \text{var } Y_2 = \text{var}\{x^2y \approx xy, xy \approx yx\};$$

$$\text{var } Y_2 = \text{var}\{x^2 \approx x, xy \approx yx\};$$

$$\text{var } C = \text{var}\{xy^2 \approx xy, x^2y^2 \approx y^2x^2\};$$

$$\text{var } L_2 \vee \text{var } Y_2 = \text{var}\{x^2 \approx x, xyz \approx xzy\};$$

$$\text{var } N_2^1 = \text{var}\{x^3 \approx x^2, xy \approx yx\};$$

$$\text{var } Y_2 \vee \text{var } \mathbb{Z}_2 = \text{var}\{x^3 \approx x, xy \approx yx\};$$

$$\text{var } L_2^1 = \text{var}\{x^2 \approx x, xyx \approx xy\};$$

$$\text{var } L_2 \vee \text{var } N_2 = \text{var}\{xyz \approx xy\};$$

$$\text{var } L_2 = \text{var}\{xy \approx x\};$$

$$\text{var } N_2 \vee \text{var } \mathbb{Z}_2 = \text{var}\{x^2yz \approx yz, xy \approx yx\};$$

$$\text{var } \mathbb{Z}_3 = \text{var}\{x^3y \approx y, xy \approx yx\}.$$

Представленными 13 многообразиями исчерпываются все многообразия, порожденные полугруппами третьего порядка с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма. В свою очередь, многообразие, порожденное всеми полугруппами порядка 3 определяется следующей системой тождеств [5, теорема 4.1]:

$$\mathbf{S}_3 = \text{var}\{x^8y \approx x^2y, xy^8 \approx xy^2, x^7yx \approx xyx^7 \approx xyx, yx^6zx \approx yxzx,$$

$$x^2yx \approx xyx^2, yxzx \approx x^2yzx, xhyxy \approx xhxyty, xhyxy \approx xhxy^2,$$

$$xyxy \approx x^2y^2\}.$$

Теорема 1.

$$r_\pi(\text{var } N_2) = r_\pi(\text{var } L_2^1) = r_\pi(\text{var } L_2 \vee \text{var } N_2) = r_\pi(\text{var } L_2) = \infty;$$

$$r_\pi(\text{var } L_2 \vee \text{var } Y_2) = 4;$$

$$r_\pi(\text{var } N_3) = r_\pi(\text{var } N_2 \vee \text{var } Y_2) = r_\pi(\text{var } Y_2) = r_\pi(\text{var } C) = 3;$$

$$r_\pi(\text{var } N_2^1) = r_\pi(\text{var } Y_2 \vee \text{var } \mathbb{Z}_2) = r_\pi(\text{var } N_2 \vee \text{var } \mathbb{Z}_2) = 2;$$

$$r_\pi(\text{var } \mathbb{Z}_3) = r_\pi(\mathbf{S}_3) = 1.$$

Доказательство. Доказательство осуществим в три этапа. На первом этапе приведем ссылки на ранее доказанные теоремы, в которых были вычислены ранги планарности некоторых из рассматриваемых многообразий полугрупп. На втором этапе изобразим плоские укладки основы графа Кэли свободной n -порожденной полугруппы оставшихся многообразий, при некотором фиксированном n , для доказательства того, что ранг планарности соответствующего многообразия не менее чем n . На третьем этапе для доказательства того, что ранг планарности многообразия равен n , укажем в основе графа Кэли свободной $(n+1)$ -порожденной полугруппы соответствующего многообразия подграф, гомеоморфный одному из графов критерия Понтрягина-Куратовского [14], то есть полному графу пятого порядка (K_5) или полному двудольному

графу, содержащему по три вершины в каждой из долей $(K_{3,3})$. Заметим, что в случае свободной полугруппы нам достаточно рассматривать только один граф Кэли, так как указываемый подграф возникает в основе каждого графа Кэли в силу того, что тот строится относительно минимального множества неразложимых образующих, присутствующих в любом другом множестве образующих элементов полугруппы.

1 этап. Бесконечность ранга планарности многообразия полугрупп с нулевым умножением, порождаемое полугруппой N_2 , показана в [2, теорема 57]. Там же указан ранг планарности многообразия всех абелевых групп экспоненты три, равный $r_\pi(\text{var } \mathbb{Z}_3) = 1$. Далее, так как $\text{var } Y_2$ является многообразием коммутативных моноидов типа $(1, 1)$, то есть удовлетворяет тождествам $x^{1+1} \approx x^1$ и $xy \approx yx$, то $r_\pi(\text{var } Y_2) = 3$ по данным из [2, теорема 56]. В ходе доказательства [2, теорема 63] нетрудно было убедиться в том, что основа графа Кэли свободной n -порожденной полугруппы многообразия $\text{var } L_2 \vee \text{var } Y_2$, задаваемого тождеством $xyz \approx xzy$, которое в обозначениях из [2, теорема 63, Рис.3] имеет вид $\overline{R}_2 = \overline{Q}_2$, изоморфна объединению n копий $(n-1)$ -мерного куба, поэтому $r_\pi(\text{var } L_2 \vee \text{var } Y_2) = 4$. Так как $\text{var } Y_2 \vee \text{var } \mathbb{Z}_2$ является многообразием коммутативных моноидов типа $(1, 2)$, то есть удовлетворяет тождествам $x^{1+2} \approx x^1$ и $xy \approx yx$, то $r_\pi(\text{var } Y_2 \vee \text{var } \mathbb{Z}_2) = 2$ по данным из [2, теорема 56].

Используя развитый в [15] инструментарий, можно убедиться в том, что основа графа Кэли свободной полугруппы многообразия $\text{var } L_2^1$ является ациклическим графом, то есть лесом, следовательно, будет планарна относительно любого числа свободных образующих и $r_\pi(\text{var } L_2^1) = \infty$. В самом деле, количество элементов в n -порожденной свободной полугруппе многообразия $\text{var } L_2^1$ индуктивно вычисляется по формуле $n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \dots + n(n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 + n! = \sum_{i=1}^n \prod_{j=n-i+1}^n j = e \cdot \Gamma(1+n, 1) - 1 = -1 + e \cdot \int_1^\infty \frac{t^n}{e^t} dt$. Здесь $\Gamma(z, x)$ – верхняя неполная гамма-функция, при $\text{Re}(z) > 0$ имеющая интегральное представление $\Gamma(z, x) = \int_x^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t} dt$. Складывается количество элементов в n -порожденной свободной полугруппе многообразия $\text{var } L_2^1$ из следующих слагаемых: первые n единиц это образующие, слова длины 1, которые можно расположить на 0-уровне деревьев леса, выбрав их в качестве корневых вершин; с каждым из n образующих в силу тождеств базисного набора $\{x^2 \approx x, xyx \approx xy\}$ смежно по $(n-1)$ вершин, слова длины 2, которые расположатся на 1-уровне деревьев, это формирует слагаемое $n(n-1)$; и так далее, на каждом последующем уровне каждого дерева у каждой вершины располагается дочерних вершин на единицу меньше, чем было потомков на предыдущем уровне. При этом, зацикливания между уровнями и склеивания разных вершин на одном уровне исключены, так как тождества, выполняемые в рассматриваемом многообразии, могут формировать рёбра лишь между такими начинающимися на один и тот же символ словами u, v , что $|\text{length}(u) - \text{length}(v)| \leq 1$,

то есть длина их отличается не более чем на один символ. В бесконечности ранга планарности многообразия $\text{var } L_2 \vee \text{var } N_2$ можно убедиться аналогичным способом. Основа графа Кэли свободной полугруппы многообразия $\text{var } L_2 \vee \text{var } N_2$ является ациклическим графом, то есть лесом, в котором $n + n^2 = n(n + 1)$ вершин n образующих из которых расположены на 0-уровне деревьев, а каждая из вершин 0-уровня соединена с n висячими вершинами 1-уровня, являющимися словами длины 2, следовательно, $r_\pi(\text{var } L_2 \vee \text{var } N_2) = \infty$. Наконец, бесконечность ранга планарности многообразия полугрупп левых нулей $r_\pi(\text{var } L_2) = \infty$ упомянута при доказательстве [2, теорема 63].

2 этап. Плоская укладка основы графа Кэли 3-порожденной свободной полугруппы многообразия $\text{var } N_3 = \text{var}\{xyz \approx hkt, xy \approx yx\}$ представлена на Рис.1 слева. Плоская укладка основы графа Кэли 3-порожденной свободной полугруппы многообразия $\text{var } N_2 \vee \text{var } Y_2 = \text{var}\{x^2y \approx xy, xy \approx yx\}$ представлена на Рис.2 слева. Плоская укладка основы графа Кэли 3-порожденной свободной полугруппы многообразия $\text{var } C = \text{var}\{xy^2 \approx xy, x^2y^2 \approx y^2x^2\}$ представлена на Рис.3 слева. Плоская укладка основы графа Кэли 2-порожденной свободной полугруппы многообразия $\text{var } N_2^1 = \text{var}\{x^3 \approx x^2, xy \approx yx\}$ представлена на Рис.4 слева. Плоская укладка основы графа Кэли 2-порожденной свободной полугруппы многообразия $\text{var } N_2 \vee \text{var } \mathbb{Z}_2 = \text{var}\{x^2yz \approx yz, xy \approx yx\}$ представлена на Рис.5 слева. Заметим попутно, что из тождеств системы $\{x^2yz \approx yz, xy \approx yx\}$ вытекает тождество $x^2 \approx y^2$, которое используется при построении основы графа Кэли на Рис.5. В самом деле, $y^2 \approx x^2y^2 \approx y^2x^2 \approx x^2$.

3 этап. Подграф основы графа Кэли 4-порожденной свободной полугруппы многообразия $\text{var } N_4 = \text{var}\{xyz \approx hkt, xy \approx yx\}$ представлен на Рис.1 справа. Подграф основы графа Кэли 4-порожденной свободной полугруппы многообразия $\text{var } N_2 \vee \text{var } Y_2 = \text{var}\{x^2y \approx xy, xy \approx yx\}$ представлен на Рис.2 справа. Подграф основы графа Кэли 4-порожденной свободной полугруппы многообразия $\text{var } C = \text{var}\{xy^2 \approx xy, x^2y^2 \approx y^2x^2\}$ представлен на Рис.3 справа. Подграф основы графа Кэли 3-порожденной свободной полугруппы многообразия $\text{var } N_2^1 = \text{var}\{x^3 \approx x^2, xy \approx yx\}$ представлен на Рис.4 справа. Подграф основы графа Кэли 3-порожденной свободной полугруппы многообразия $\text{var } N_2 \vee \text{var } \mathbb{Z}_2 = \text{var}\{x^2yz \approx yz, xy \approx yx\}$ представлен на Рис.5 справа. Подграф основы графа Кэли 2-порожденной свободной полугруппы многообразия \mathbf{S}_3 представлен на Рис.6.

Что и требовалось доказать. □

Так как в исходном списке полугруппы представлены с точностью до антиизоморфизма (транспонирования таблицы умножения), то рассмотрим теперь вопрос планарности левых графов Кэли тех же полугрупп. Тогда будет учтено многообразие полугрупп правых нулей и другие оставшиеся не рассмотренными многообразия.

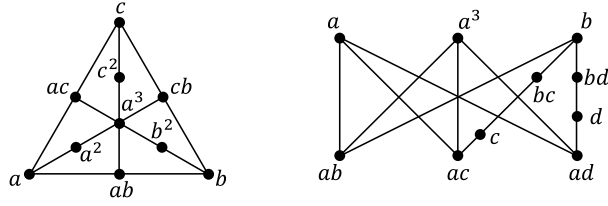


Рис. 1. Плоская укладка графа $SCay(F_3(\text{var } N_3), \{a, b, c\})$ и подграф графа $SCay(F_4(\text{var } N_3), \{a, b, c, d\})$, гомеоморфный графу $K_{3,3}$

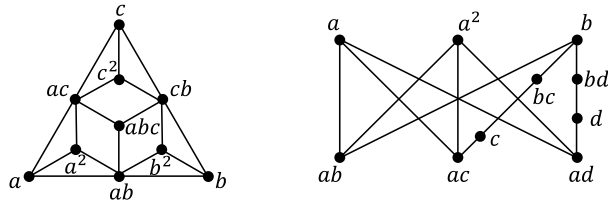


Рис. 2. Плоская укладка графа $SCay(F_3(\text{var } N_2 \vee \text{var } Y_2), \{a, b, c\})$ и подграф графа $SCay(F_4(\text{var } N_2 \vee \text{var } Y_2), \{a, b, c, d\})$, гомеоморфный графу $K_{3,3}$

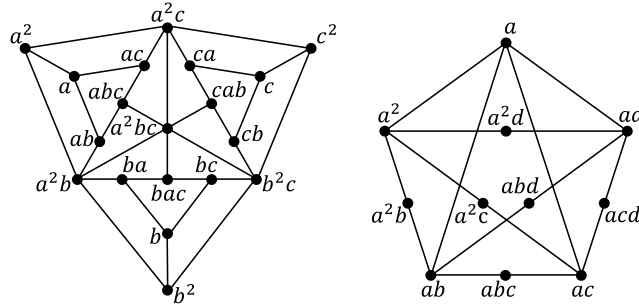


Рис. 3. Плоская укладка графа $SCay(F_3(\text{var } C), \{a, b, c\})$ и подграф графа $SCay(F_4(\text{var } C), \{a, b, c, d\})$, гомеоморфный графу K_5

Для всякой полугруппы S через \overleftarrow{S} обозначим двойственную полугруппу, антиизоморфную полугруппе S . То есть такую, что существует биективное отображение $\varphi : S \rightarrow \overleftarrow{S}$, удовлетворяющее тождеству антигомоморфизма $\forall x, y \in S : \varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$. Ясно, что $S \cong \overleftarrow{\overleftarrow{S}}$.

В частности, $\overleftarrow{L}_n = \langle l_1, l_2, \dots, l_n \mid xy = y \rangle = R_n$ — полугруппа правых нулей порядка n .

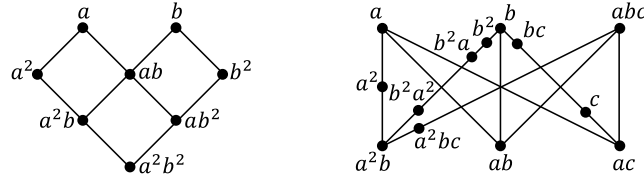


Рис. 4. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var } N_2^1), \{a, b\})$ и подграф графа $SCay(F_3(\text{var } N_2^1), \{a, b, c\})$, гомеоморфный графу $K_{3,3}$

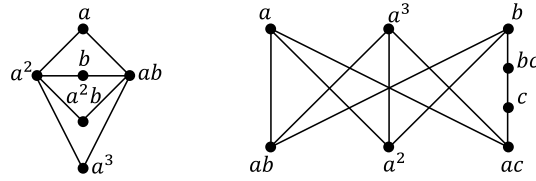


Рис. 5. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var } N_2 \vee \text{var } \mathbb{Z}_2), \{a, b\})$ и подграф графа $SCay(F_3(\text{var } N_2 \vee \text{var } \mathbb{Z}_2), \{a, b, c\})$, гомеоморфный графу $K_{3,3}$

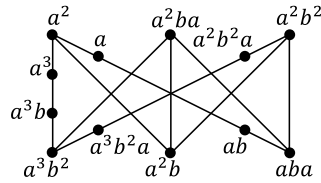


Рис. 6. Подграф графа $SCay(F_2(\mathbf{S}_3), \{a, b\})$, гомеоморфный графу $K_{3,3}$

Теорема 2.

$$\begin{aligned}
 r_\pi(\text{var } \overleftarrow{N}_2) &= \infty; \\
 r_\pi(\text{var } \overleftarrow{L}_2) &= 4; \\
 r_\pi(\text{var } \overleftarrow{N}_3) &= r_\pi(\text{var } \overleftarrow{N}_2 \vee \text{var } \overleftarrow{Y}_2) = r_\pi(\text{var } \overleftarrow{Y}_2) = \\
 &= r_\pi(\text{var } \overleftarrow{C}) = r_\pi(\text{var } \overleftarrow{L}_2 \vee \text{var } \overleftarrow{Y}_2) = 3; \\
 r_\pi(\text{var } \overleftarrow{N}_2^1) &= r_\pi(\text{var } \overleftarrow{Y}_2 \vee \text{var } \overleftarrow{Z}_2) = r_\pi(\text{var } \overleftarrow{L}_2^1) = \\
 &= r_\pi(\text{var } \overleftarrow{L}_2 \vee \text{var } \overleftarrow{N}_2) = r_\pi(\text{var } \overleftarrow{N}_2 \vee \text{var } \overleftarrow{Z}_2) = 2; \\
 r_\pi(\text{var } \overleftarrow{Z}_3) &= r_\pi(\overleftarrow{\mathbf{S}}_3) = 1.
 \end{aligned}$$

Доказательство. В первую очередь отметим, что для вычисления ранга планарности многообразия, состоящего из полугрупп двойственных к полугруппам некоторого многообразия, можно вместо правого графа Кэли строить левый граф Кэли свободной полугруппы исходного многообразия последовательно увеличивая количество образующих элементов. Принимая во внимание тот факт, что в коммутативном случае левый граф Кэли совпадает с правым, сразу приходим к выводу: $r_\pi(\text{var } \overleftarrow{N}_2) = r_\pi(\text{var } N_2) = \infty$; $r_\pi(\text{var } \overleftarrow{N}_3) = r_\pi(\text{var } N_3) = 3$; $r_\pi(\text{var } \overleftarrow{N}_2 \vee \text{var } \overleftarrow{Y}_2) = r_\pi(\text{var } N_2 \vee \text{var } Y_2) = 3$; $r_\pi(\text{var } \overleftarrow{Y}_2) = r_\pi(\text{var } Y_2) = 3$; $r_\pi(\text{var } \overleftarrow{N}_2^1) = r_\pi(\text{var } N_2^1) = 2$; $r_\pi(\text{var } \overleftarrow{Y}_2 \vee \text{var } \overleftarrow{Z}_2) = r_\pi(\text{var } Y_2 \vee \text{var } Z_2) = 2$; $r_\pi(\text{var } \overleftarrow{N}_2 \vee \text{var } \overleftarrow{Z}_2) = r_\pi(\text{var } N_2 \vee \text{var } Z_2) = 2$; $r_\pi(\text{var } \overleftarrow{Z}_3) = r_\pi(\text{var } Z_3) = 1$, — так как перечисленные многообразия коммутативны. Заметим, к такому же результату можно прийти если переписать все слова имеющихся тождеств в обратной последовательности букв и строить правые графы Кэли свободных полугрупп определяемых получившимися тождествами многообразий.

Докажем, что $r_\pi(\text{var } \overleftarrow{C}) = r_\pi(\text{var } C) = 3$. В самом деле, плоская укладка основы левого графа Кэли полугруппы $F_3(\text{var } C)$ представлена на Рис.7, а гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф в основе левого графа Кэли полугруппы $F_4(\text{var } C)$, изоморфного правому графу Кэли 47-элементной двойственной полугруппы $F_4(\text{var } \overleftarrow{C})$, состоит из следующих попарно не пересекающихся маршрутов между вершинами множеств $\{a, a^2, b\}$ и $\{ca, ba, da\}$: $a - ca$; $a - ba$; $a - da$; $a^2 - ca$; $a^2 - ba$; $a^2 - da$; $b - cb - acb - bc - c - ac - aca - ca$; $b - ab - aba - ba$; $b - db - adb - bd - d - ad - ada - da$.

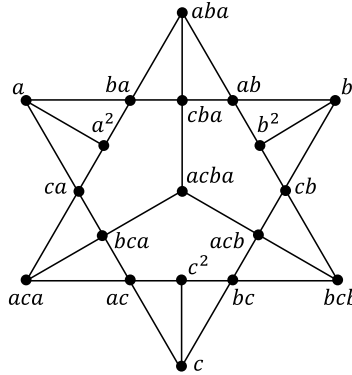


Рис. 7. Плоская укладка основы левого графа Кэли полугруппы $F_3(\text{var } C)$

Докажем теперь, что $r_\pi(\text{var } \overleftarrow{L}_2 \vee \text{var } \overleftarrow{Y}_2) = r_\pi(\text{var } L_2 \vee \text{var } Y_2) - 1 = 3$. В самом деле, плоская укладка основы левого графа Кэли полугруппы $F_3(\text{var } L_2 \vee \text{var } Y_2)$ представлена на Рис.8, а гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф в основе левого графа Кэли полугруппы $F_4(\text{var } L_2 \vee \text{var } Y_2)$, изоморфного правому графу Кэли 32-элементной двойственной полугруппы $F_4(\text{var } \overleftarrow{L}_2 \vee \text{var } \overleftarrow{Y}_2)$, состоит из следующих попарно не пересекающихся маршрутов между вершинами множеств $\{ab, ba, bca\}$ и $\{ca, cba, dba\}$: $ab - b - cb - bc - c - ac - ca$; $ab - cba$; $ab - dba$; $ba - a - ca$; $ba - cba$; $ba - dba$; $bca - ca$; $bca - cba$; $bca - dcba - cdba - dba$.

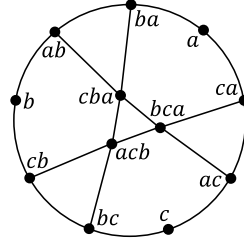


Рис. 8. Плоская укладка основы левого графа Кэли полугруппы $F_3(\text{var } L_2 \vee \text{var } Y_2)$

Аналогичным образом докажем и равенства $r_\pi(\text{var } \overleftarrow{L}_2^1) = r_\pi(\text{var } \overleftarrow{L}_2 \vee \text{var } \overleftarrow{N}_2) = 2$. В самом деле, плоская укладка основ левых графов Кэли полугруппы $F_2(\text{var } L_2^1)$ и полугруппы $F_2(\text{var } L_2 \vee \text{var } N_2)$ представлена на Рис.9, а гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф в основе левого графа Кэли полугруппы $F_3(\text{var } L_2^1)$, изоморфного правому графу Кэли 15-элементной двойственной полугруппы $F_3(\text{var } \overleftarrow{L}_2^1)$, состоит из следующих попарно не пересекающихся маршрутов между вершинами множеств $\{ca, cab, cba\}$ и $\{ba, ca, acb\}$: $ca - a - ba$; $ca - bca$; $ca - ac - c - bc - cb - acb$; $cab - ab - ba$; $cab - bca$; $cab - acb$; $cba - ba$; $cba - bca$; $cba - acb$. В свою очередь, гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф в основе левого графа Кэли полугруппы $F_3(\text{var } L_2 \vee \text{var } N_2)$, изоморфного правому графу Кэли 12-элементной двойственной полугруппы $F_3(\text{var } \overleftarrow{L}_2 \vee \text{var } \overleftarrow{N}_2)$, состоит из следующих попарно не пересекающихся маршрутов между вершинами множеств $\{a, ab, ac\}$ и $\{a^2, ba, ca\}$: $a - a^2$; $a - ba$; $a - ca$; $ab - a^2$; $ab - ba$; $ab - ca$; $ac - a^2$; $ac - ba$; $ac - ca$.

Тот факт, что ранг планарности многообразия полугрупп правых нулей равен четырем известен давно [2, теорема 63]. Остается заметить, что многообразие \mathbf{S}_3 самодвойственно, поэтому $r_\pi(\overleftarrow{\mathbf{S}}_3) = r_\pi(\mathbf{S}_3) = 1$.

Что и требовалось доказать. \square

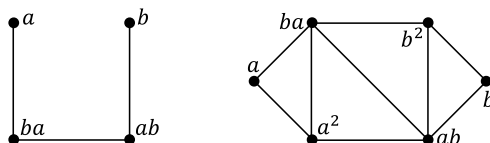


Рис. 9. Плоская укладка
основ левого графа Кэли полугрупп
 $F_2(\text{var } L_2^1)$ [слева] и $F_2(\text{var } L_2 \vee \text{var } N_2)$ [справа]

Следствие 1. Ранг планарности многообразия порожденного полугруппами третьего порядка либо не превышает 4, либо бесконечен, в последнем случае это многообразие принадлежит множеству:

$$\{\text{var } N_2, \text{var } L_2, \text{var } L_2 \vee \text{var } N_2, \text{var } L_2^1\}$$

4 Заключение

Результаты статьи впервые были представлены на международной научной конференции «Комбинаторно-вычислительные методы алгебры и логики», 15 июля - 19 июля, 2024, Омск, Россия, проводимой в Омском научном центре СО РАН и посвященной памяти В.А. Романькова, ранее исследовавшего регулярные замощения плоскости графами Кэли групп [16], а потому автор благодарен всем участникам конференции за плодотворные обсуждения и рецензентам за конструктивные замечания.

References

- [1] L.M. Martynov, *New problems of algebra and logic. Anniversary 900th meeting of the seminar*, Omsk algebraic seminar, November 12, 2015.
- [2] D.V. Solomatín, *Researches of semigroups with planar Cayley graphs: results and problems*, Prikl. Diskretn. Mat., **54** (2021), 5–57. Zbl 1486.05137
- [3] D.V. Solomatín, *Planarity ranks of modular varieties of semigroups*, arXiv:2501.12930
- [4] M. Petrich, *Introduction to semigroups*, Merrill, Columbus, 1973. Zbl 0321.20037
- [5] Y. Luo, W. Zhang, *On the variety generated by all semigroups of order three*, J. Algebra, **334**:1 (2011), 1–30. Zbl 1243.20071
- [6] G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (1895-1897, 1932), 282–356.
- [7] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig: Veit & Comp. viii, 1914. Zbl 1175.01034
- [8] S.I. Adian, *Algorithmic unsolvability of problems of recognition of certain properties of groups*, Dokl. USSR Academy of Sciences, **103**:4, (1955), 533–535. Zbl 0065.00901
- [9] M.O. Rabin, *Recursive unsolvability of group theoretic problems*, Ann. Math., **67**:2 (1958), 172–174. Zbl 0079.24802
- [10] H. Maschke, *The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayley's color diagrams*, Am. J. Math., **18**:2, (1896), 156–194.
- [11] K. Knauer and U. Knauer, *On planar right groups*, Semigroup Forum, **92**:1, (2016), 142–157. Zbl 1353.20043

- [12] A.A. Markov, *Impossibility of some algorithms in the theory of associative systems*, Dokl. USSR Academy of Sciences, **55**:7, (1947), 587–590.
- [13] W. McCune, *Prover9 and Mace4*, URL <https://www.cs.unm.edu/~mccune/mace4/>
- [14] C. Kuratowski, *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, Fundamenta, **15** (1930), 271–283. JFM 56.1141.03
- [15] A.L. Makariev, *On semigroups of idempotents with acyclic Cayley graphs*, Mathematics and computer science: science and education: interuniversity collection of scientific papers, **6**, Omsk State Pedagogical University, Omsk, 2007, 26–34.
- [16] V.A. Roman'kov, Zh.T. Belenkova, *Regular Cayley graphs*, Sib. Mat. J., Deposited in VINITI, **802-B97** (1997), 1–37.

DENIS VLADIMIROVICH SOLOMATIN
OMSK STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY,
14, NABEREZHNAJA TUKHACHEVSKOGO,
644099, OMSK, RUSSIA
Email address: denis_2001j@bk.ru