S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, № 1, стр. 110–124 (2025) УДК 512.54
https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.009 MSC 20F05

О КВАЗИМНОГООБРАЗИИ, ПОРОЖДЕННОМ 3-НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППОЙ

А.И. Будкин

Представлено И.Б. Горшковым

Abstract: In this paper we find a condition under which the completion of a torsion-free nilpotent group from the variety $\mathcal{N}_3$ of nilpotent groups of class ≤ 3 is contained in the quasivariety generated by this group. We show that the completion of each group from a quasivariety $qF(\mathcal{N}_3)$ generated by the free 3-nilpotent group $F(\mathcal{N}_3)$ belongs to $qF(\mathcal{N}_3)$. We prove the theorem which allows us to extract roots from a commutant of groups from $qF(\mathcal{N}_3)$ while remaining in $qF(\mathcal{N}_3)$. We find conditions under which the $\mathcal{N}_3$-free product of groups from $qF(\mathcal{N}_3)$ is again contained in $qF(\mathcal{N}_3)$. We show that $qF(\mathcal{N}_3)$ is not closed with respect to $\mathcal{N}_3$-free products.

Keywords: quasivariety, nilpotent group, completion, $\mathcal{N}_3$-free products.

1 Введение

Работа посвящена исследованию квазимногообразия $qF(\mathcal{N}_3)$, порождённого свободной 3-ступенно нильпотентной группой $F(\mathcal{N}_3)$.

Пополнением группы G называется всякая минимальная полная группа, содержащая G. А. И. Мальцев [1], используя методы теории групп и

Budkin, A.I., On the quasivariety generated by a 3-nilpotent group.

Поступила 30 апреля 2024 г., опубликована 19 марта 2025 г.

алгебр Ли, доказал существование и единственность с точностью до изоморфизма локально нильпотентного пополнения для произвольной локально нильпотентной группы без кручения. М. И. Каргаполовым в [2] докано следующее обобщение сформулированной теоремы А. И. Мальцева: если множества π' и π простых чисел не пересекаются, то произвольная локально нильпотентная π'-группа обладает единственным локально нильпотентным π-пополнением, являющимся π'-группой. Методы, используемые в [2] при всех доказательствах, по существу принадлежат общей теории групп. В данной работе найдено условие, при котором пополнение 3-ступенно нильпотентной группы без кручения содержится в квазимногообразии, порождённом этой группой. В частности, доказано, что пополнение каждой группы из $qF(\mathcal{N}_3)$ содержится в $qF(\mathcal{N}_3)$. Также установлено, что пополнение любой 2-ступенно нильпотентной группы без кручения G содержится в qG. Кроме того, доказана теорема, позволяющая извлекать корни из коммутанта групп из $qF(\mathcal{N}_3)$, оставаясь при этом в $qF(\mathcal{N}_3)$.

Пусть $\mathcal{N}_c$ — это многообразие нильпотентных групп ступени не выше c, $\mathcal{R}_p$ — многообразие нильпотентных групп ступени не выше 2 экспоненты p (p — простое число, $p \neq 2$). Замкнутость квазимногообразий групп относительно свободных $\mathcal{N}_2$-произведений и свободных $\mathcal{R}_p$-произведений рассматривалась в ([3] лемма 2) и ([4] лемма 3), соответственно (см. также [5], теорема 4.2.12). В данной работе найдены условия, при выполнении которых $\mathcal{N}_3$-свободное произведение групп из $qF(\mathcal{N}_3)$ снова содержится в $qF(\mathcal{N}_3)$. Здесь показано, что квазимногообразие $qF(\mathcal{N}_3)$ не замкнуто относительно $\mathcal{N}_3$-свободных произведений.

2 Предварительные сведения

В работе используются следующие обозначения:

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ — множества натуральных и целых чисел соответственно;

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y$, $[x, y, z] = [[x, y], z]$;

$\mathcal{N}_{2,\infty}$, $\mathcal{N}_{3,\infty}$ — классы групп без кручения из $\mathcal{N}_2$ и $\mathcal{N}_3$ соответственно;

uG — универсально аксиоматизируемый класс, порождённый группой G.

$F_X(\mathcal{N}_3)$ — свободная в $\mathcal{N}_3$ группа с множеством свободных порождающих X; $F_2 = F_2(\mathcal{N}_3)$ — свободная в $\mathcal{N}_3$ группа со свободными порождающими a, b.

$\langle x, y, \dots \rangle$ — группа, порождённая элементами $x, y, \dots$; $\langle x \rangle$ — циклическая группа, порождённая x;

$Z(G)$ — центр группы G;

$\gamma_1(G) = G, \gamma_2(G) = G' = [G, G], \gamma_3(G) = [\gamma_2(G), G]$.

Коммутаторы

$[x_3, x_2, x_2], [x_3, x_2, x_3], [x_3, x_1, x_1], [x_3, x_1, x_2], [x_3, x_1, x_3],$

$[x_2, x_1, x_1], [x_2, x_1, x_2], [x_2, x_1, x_3]$
составляют полный список базисных коммутаторов веса 3 от переменных x_1, x_2, x_3. Хорошо известно, что этими коммутаторами порождается $\gamma_3(F_3(\mathcal{N}_3))$.

При написании тождеств и квазитождеств кванторы всеобщности будем опускать.

Нам потребуются известные коммутаторные тождества ([8], теорема 33.33), истинные в каждой нильпотентной группе ступени не выше 3:

$$[a, bc] = [a, c][a, b][a, b, c], \tag{1}$$

$$[ab, c] = [a, c][a, c, b][b, c], \tag{2}$$

$$[a, b, c][b, c, a][c, a, b] = 1 \tag{3}$$

(первые два тождества означают линейность коммутаторов по модулю $\gamma_3(G)$ по соответствующим аргументам, третье — частный вариант тождества Витта).

Полезными окажутся следующие тождества, истинное в нильпотентной группе ступени 3:

$$[y^n, x^k] = [y, x]^{nk}[y, x, x]^{nk\frac{k-1}{2}}[y, x, y]^{nk\frac{n-1}{2}}, \tag{4}$$

$$(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\frac{n(n-1)}{2}}[y, x, x]^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}[y, x, y]^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}, \tag{5}$$

которые легко доказываются по индукции.

Напомним определение свободного произведения групп в многообразии $\mathcal{N}_3$. Предположим, что группы A и B имеют в $\mathcal{N}_3$ представления:

$$A = \langle \{x_i \mid i \in I_1\}; \{t_j = 1 \mid j \in J_1\}\rangle, B = \langle \{y_i \mid i \in I_2\}; \{r_j = 1 \mid j \in J_2\}\rangle$$

Тогда группа G, имеющая в $\mathcal{N}_3$ представление

$$G = \langle \{x_i \mid i \in I_1\} \cup \{y_i \mid i \in I_2\}; \{t_j = 1 \mid j \in J_1\} \cup \{r_j = 1 \mid j \in J_2\}\rangle,$$

обозначается через $G = A *_{\mathcal{N}_3} B$ и называется свободным произведением групп A и B в многообразии $\mathcal{N}_3$. Часто вместо $A *_{\mathcal{N}_3} B$ будем писать $G = A * B$, опуская индекс $\mathcal{N}_3$. Подгруппы группы G, порождённые множествами элементов $\{x_i \mid i \in I_1\}$ и $\{y_i \mid i \in I_2\}$, изоморфны группам A и B. Их будем обозначать через A и B соответственно.

Пусть $\{G_i \mid i \in I\}$ — произвольное множество групп, D — фильтр над I. Элементы фильтрованного произведения $\prod\limits_{i\in I} G_i/D$ обозначаются через fD, где f — элемент декартова произведения $\overline{\prod\limits_{i\in I}} G_i$.

Скажем, что группа H вложима в группу G, если H изоморфна некоторой подгруппе группы G.

Нам понадобится следующая теорема Дика ([9], с. 281, [6], с. 55).

Лемма 1. *Пусть группа G имеет в данном квазимногообразии $\mathcal{N}$ представление*

$$G = \langle \{x_i \;\mid\; i \in I\} \;;\; \{r_j(x_{j_1}, \dots, x_{j_{l(j)}}) = 1 \mid j \in J\}\rangle.$$

Предположим, что $H \in \mathcal{N}$ и группа H содержит множество элементов $\{g_i \mid i \in I\}$ такое, что для всякого $j \in J$ равенство $r_j(g_{j_1}, \dots, g_{j_{l(j)}}) = 1$ истинно в H. Тогда отображение $x_i \to g_i$ $(i \in I)$ продолжается до гомоморфизма G в H.

Будем пользоваться (частный случай теоремы 3 [10]) признаком принадлежности конечно определённой группы G квазимногообразию $q\mathcal{R}$.

Лемма 2. *Конечно определённая в квазимногообразии $\mathcal{M}$ группа G принадлежит квазимногообразию, порождённому классом групп $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$), тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G, g \neq 1$, существует гомоморфизм φ_g группы G в некоторую группу из класса $\mathcal{R}$ такой, что $g^{\varphi_g} \neq 1$.*

С основными понятиями теории групп можно познакомиться в [6], теории квазимногообразий — в [5], [7].

3 Пополнения групп

Скажем, что группа G является $(*)$-группой, если

а) G является нильпотентной ступени не выше трёх группой без кручения,

б) G обладает множеством порождающих $a_1, a_2, \dots$, удовлетворяющих условию: для любого $n \in \mathbb{N}$ существует вложение $\beta_n : G \to G$ такое, что из элементов $a_1^{\beta_n}, a_2^{\beta_n}, \dots$ извлекаются в G корни n-й степени.

Лемма 3. *Пусть G — $(*)$-группа. Тогда при любом k из каждого элемента группы G^β, где $\beta = \beta_{6k^2}$, извлекается в G корень k-й степени.*

Доказательство. Считаем, что $k > 1$. Берём произвольный неединичный элемент $g \in G^\beta$. Элемент g можно представить в следующем виде:

$$g = (a_{i_1}^\beta)^{u_1} \dots (a_{i_n}^\beta)^{u_n} = \sqrt[6k^2]{a_{i_1}^\beta}^{\,6k^2 u_1} \dots \sqrt[6k^2]{a_{i_n}^\beta}^{\,6k^2 u_n}$$

для подходящих целых чисел $u_1, \dots, u_n$. Лемма будет доказана, если покажем, что из любого элемента $x^k y^{6k^2 v}$ $(x, y \in G,\ v$ — целое число) извлекается в G корень k-й степени.

Из тождества (5) и линейности коммутаторов веса 3 выводим:

$$x^k y^{6k^2 v} =$$

$$= (xy^{6kv})^k [x, y^{6kv}]^{\frac{k(k-1)}{2}} [x, y^{6kv}, x]^{\frac{k(k-1)(k-2)}{6}} [x, y^{6kv}, y^{6kv}]^{\frac{k(k-1)(2k-1)}{6}} =$$

$$= (xy^{6kv})^k [x, y^{6kv}]^{\frac{k(k-1)}{2}} c_1^k$$

для некоторого $c_1 \in \gamma_3(G)$. Из (4) следует, что в G существует элемент $[x, y^{6kv}]^{\frac{k-1}{2}}$. Из (5) и нильпотентности группы G ступени не выше трёх вытекает, что

$$(xy^{6kv}[x, y^{6kv}]^{\frac{k-1}{2}})^k = (xy^{6kv})^k [x, y^{6kv}]^{\frac{k(k-1)}{2}} [[x, y^{6kv}]^{\frac{k-1}{2}}, xy^{6kv}]^{\frac{k(k-1)}{2}} = \\ = (xy^{6kv})^k [x, y^{6kv}]^{\frac{k(k-1)}{2}} c_2^k$$

для некоторого $c_2 \in \gamma_3(G)$. Из полученных равенств следует, что

$$x^k y^{6k^2 v} = (xy^{6kv}[x, y^{6kv}]^{\frac{k-1}{2}})^k c_2^{-k} c_1^k = a^k$$

для некоторого $a \in G$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — $(*)$-группа. Тогда группа G вложима в полную группу из uG, т.е. универсальные теории групп G и её минимального пополнения совпадают.*

Доказательство. Пусть $\delta_i : G \to G_i$ — изоморфизм, $\alpha_i = \beta_{6(i!)^2}\delta_i : G \to G_i$. Отметим, что ввиду леммы 3 из элементов группы G^{α_i} извлекаются в G_i корни степени $i!$.

Пусть D — произвольный неглавный ультрафильтр над $\mathbb{N}$, $H = \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} G_i/D$ — ультрапроизведение. Определим отображение $\alpha : G \to H$ следующим образом:

$$g^\alpha = f_g D, \text{ где } f_g(i) = g^{\alpha_i} \text{ для каждого } i \in \mathbb{N}.$$

Несложно убедиться, что $\alpha : G \to H$ — вложение. Поскольку при $i \geq k$ из элемента $f_g(i)$ извлекается корень k-й степени, то из элемента $f_g D$ также извлекается корень k-й степени. Положим

$$\sqrt{G^\alpha} = \{x \in H \mid x^k \in G^\alpha \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}\}.$$

Покажем, что $\sqrt{G^\alpha}$ — подгруппа. Возьмём любые элементы $xD, yD \in \sqrt{G^\alpha}$. Достаточно убедиться, что $xDyD = xyD \in \sqrt{G^\alpha}$. Ясно, что существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $x^k D, y^k D \in G^\alpha$, т.е. $x^k D = f_g D, y^k D = f_h D$ для некоторых $g, h \in G$. Из определения фильтрованного произведения следует, что

$$I = \{i \mid x(i)^k = f_g(i) = g^{\alpha_i}\} \cap \{i \mid y(i)^k = f_h(i) = h^{\alpha_i}\} \in D.$$

Пусть при $i \in I$ и $i > k^8$, $g_i = \sqrt[k]{g^{\alpha_i}}$, $h_i = \sqrt[k]{h^{\alpha_i}}$ (в частности, $g_i = x(i), h_i = y(i)$, поскольку извлечение корня в нильпотентной группе без кручения однозначно ([6], теорема 16.2.8)). По (4), (5)

$$(g_i h_i)^{k^8} = g_i^{k^8} h_i^{k^8} [h_i, g_i]^{\frac{k^8(k^8-1)}{2}} [h_i, g_i, g_i]^{\frac{k^8(k^8-1)(k^8-2)}{6}} [h_i, g_i, h_i]^{\frac{k^8(k^8-1)(2k^8-1)}{6}},$$

$$[h_i, g_i]^{k^4} = ([h_i^k, g_i^k][g_i, h_i, h_i]^{\frac{k^2(k-1)}{2}} [g_i, h_i, g_i]^{\frac{k^2(k-1)}{2}})^{k^2},$$

откуда

$$(g_i h_i)^{k^8} = g_i^{k^8} h_i^{k^8} ([h_i^k, g_i^k]^{k^2} [g_i, h_i, h_i]^{\frac{k^4(k-1)}{2}} [g_i, h_i, g_i]^{\frac{k^4(k-1)}{2}})^{\frac{k^2(k^8-1)}{2}}$$

$$[h_i, g_i, g_i]^{\frac{k^8(k^8-1)(k^8-2)}{6}}[h_i, g_i, h_i]^{\frac{k^8(k^8-1)(2k^8-1)}{6}}$$

$$= g_i^{k^8} h_i^{k^8} [h_i^k, g_i^k]^{\frac{k^4(k^8-1)}{2}} [g_i, h_i, h_i]^{k^3 s} [g_i, h_i, g_i]^{k^3 t},$$

где $s = \frac{k^3(k^8-1)(k-1)}{4} - \frac{k^5(k^8-1)(2k^8-1)}{6}$, $t = \frac{k^3(k^8-1)(k-1)}{4} - \frac{k^5(k^8-1)(k^8-2)}{6}$. Отсюда

$$(g_i h_i)^{k^8} = (g^{\alpha_i})^{k^7} (h^{\alpha_i})^{k^7} [h^{\alpha_i}, g^{\alpha_i}]^{\frac{k^4(k^8-1)}{2}} [g^{\alpha_i}, h^{\alpha_i}, h^{\alpha_i}]^s [g^{\alpha_i}, h^{\alpha_i}, g^{\alpha_i}]^t.$$

Так как это равенство истинно при всех $i > k^8$ и при $i \in I$
$g_i = x(i), h_i = y(i)$, $g_i^k = g^{\alpha_i} = f_g(i)$, $h_i^k = h^{\alpha_i} = f_h(i)$,
то в группе H справедливо равенство

$$(xDyD)^{k^8} =$$

$$= (f_g D)^{k^7} (f_h D)^{k^7} [f_h D, f_g D]^{\frac{k^4(k^8-1)}{2}} [f_g D, f_h D, f_h D]^s [f_g D, f_h D, f_g D]^t.$$

Значит, $(xDyD)^{k^8} \in G^\alpha$, откуда $xDyD \in \sqrt{G^\alpha}$. Таким образом, $\sqrt{G^\alpha}$ — подгруппа. Ясно, что $\sqrt{G^\alpha}$ — полная группа. Поскольку всякий универсально аксиоматизируемый класс замкнут относительно взятия подгрупп и ультразамкнут, то $\sqrt{G^\alpha} \in uG$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть квазимногообразие $\mathcal{M}$ порождается множеством $(*)$-групп. Тогда каждая группа A из $\mathcal{M}$ вложима в полную группу из $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что A — конечно порождённая группа. По признаку принадлежности (лемма 2) группа A аппроксимируется множеством порождающих квазимногообразие $\mathcal{M}$ групп, каждая из которых по лемме 4 вложима в полную группу из $\mathcal{M}$. Отсюда, A вложима в декартово произведение полных групп из $\mathcal{M}$, которое является полной группой из $\mathcal{M}$.

Рассмотрим общий случай. Хорошо известно (см, например, [9], §8.3, теорема 2), что всякая группа вложима в подходящее ультрапроизведение своих конечно порождённых подгрупп. По только что доказанному, всякая конечно порождённая подгруппа группы A вложима в полную группу из $\mathcal{M}$, значит, A вложима в ультрапроизведение полных групп из $\mathcal{M}$, которое является полной группой из $\mathcal{M}$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 непосредственно следует

Следствие 1. *Всякая группа из $qF_2(\mathcal{N}_3)$ вложима в полную группу из $qF_2(\mathcal{N}_3)$.*

Лемма 5. *Всякое квазимногообразие $\mathcal{M}$ нильпотентных групп без кручения ступени не выше двух порождается конечно порождёнными группами, в представлениях которых в $\mathcal{N}_{2,\infty}$ в порождающих и определяющих соотношениях всякое определяющее соотношение есть произведение коммутаторов веса 2 (т.е. коммутаторное).*

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}$ — квазимногообразие, порождённое всеми конечно порождёнными группами из $\mathcal{M}$, заданными в $\mathcal{N}_{2,\infty}$ коммутаторными определяющими соотношениями. Предположим, что $\mathcal{N} \subsetneq \mathcal{M}$.

В ([11], лемма 1]) (см. также [5], теорема 4.2.7) доказано, что всякое нетривиальное квазитождество (т.е. квазитождество, ложное в некоторой неабелевой группе из $\mathcal{N}_{2,\infty}$) эквивалентно в $\mathcal{N}_{2,\infty}$ коммутаторному квазитождеству. Поскольку $\mathcal{N} \subsetneq \mathcal{M}$, то мы можем зафиксировать коммутаторное квазитождество

$$\Phi = t_1(x_1, \ldots, x_n) = 1 \ \& \ \ldots \ \& \ t_k(x_1, \ldots, x_n) = 1 \ \rightarrow \ t(x_1, \ldots, x_n) = 1,$$

истинное в каждой группе из $\mathcal{N}$ и ложное в некоторой группе G из $\mathcal{M}$. Пусть группа A имеет в $\mathcal{M}$ следующее представление:

$$A = \langle a_1, \ldots, a_n; t_1(a_1, \ldots, a_n) = 1, \ldots, t_k(a_1, \ldots, a_n) = 1\rangle.$$

Покажем, что $t(a_1, \ldots, a_n) \neq 1$, откуда следует, что квазитождество Φ ложно в A. Поскольку Φ ложно в G, то существуют элементы $g_1, \ldots, g_n$ из G такие, что

$$t_1(g_1, \ldots, g_n) = 1, \ldots, t_k(g_1, \ldots, g_n) = 1, t(g_1, \ldots, g_n) \neq 1.$$

По теореме Дика существует гомоморфизм $\varphi : A \to G$, при котором $a_1^{\varphi} = g_1, \ldots, a_n^{\varphi} = g_n$. Значит, $t(a_1, \ldots, a_n)^{\varphi} = t(g_1, \ldots, g_n) \neq 1$, откуда $t(a_1, \ldots, a_n) \neq 1$.

Поскольку группа A задаётся в $\mathcal{M}$ коммутаторными определяющими соотношениями, то $A/A' = \langle a_1A'\rangle \times \cdots \times \langle a_nA'\rangle$ — прямое произведение бесконечных циклических групп. Видим, что если в представлении группы A в $\mathcal{N}_{2,\infty}$ в порождающих $a_1, \ldots, a_n$ присутствует некоммутаторное определяющее соотношение, например, соотношение

$$a_1^{s_1} \ldots a_n^{s_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} [a_i, a_j]^{k_{ij}} = 1,$$

то в A/A' истинно соотношение $(a_1A')^{s_1} \ldots (a_nA')^{s_n} = 1$, и поэтому группа A/A' не является прямым произведением n бесконечных циклических групп, что не так.

Итак, группа A задаётся в $\mathcal{N}_{2,\infty}$ в порождающих $a_1, \ldots, a_n$ коммутаторными определяющими соотношениями, $A \in \mathcal{M}$, $A \notin \mathcal{N}$. Это противоречит определению квазимногообразия $\mathcal{N}$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие нильпотентных групп ступени не выше двух без кручения. Тогда любая группа A из $\mathcal{M}$ вложима в полную группу из $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Хорошо известно, что всякая абелева группа без кручения вложима в полную абелеву группу без кручения. Следовательно, данная теорема справедлива для квазимногообразия $\mathcal{M}$ абелевых групп без кручения.

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие нильпотентных групп ступени не выше двух без кручения. По лемме 5 $\mathcal{M}$ порождается конечно порождёнными группами, в представлениях которых в $\mathcal{N}_{2,\infty}$ всякое определяющее соотношение есть произведение коммутаторов веса 2. Возьмём любую группу G из этих групп, и пусть G в порождающих $a_1, \ldots, a_n$ группа G задаётся коммутаторными определяющими соотношениями. Тогда по теореме Дика для любого натурального числа m отображение $a_1 \to a_1^m, \ldots, a_n \to a_n^m$ продолжаемо до гомоморфизма $\varphi : G \to G$. Ясно, что φ — вложение. Применение теоремы 1 завершает доказательство теоремы 2. Теорема доказана.

Следующая теорема также позволяет присоединять к группе корни из элементов, при этом оставаясь в квазимногообразии qF_2.

Лемма 6. *Пусть $B = \langle f, A\rangle$ — конечно порождённая 3-ступенно нильпотентная группа без кручения, $f^k \in B'$ для некоторого ненулевого числа k. Если $A \in qF_2$, то $B \in qF_2$.*

Доказательство. Считаем, что в качестве k взято наименьшее положительное число такое, что $f^k \in B'$. В случае $k = 1$ видим, что $f \in B'$, следовательно, по теореме 16.2.5 [6] f содержится в подгруппе Фраттини группы B, поэтому f можно выбросить из множества порождающих группы B, откуда следует, что $B = A \in qF_2$. Итак, предполагаем, что $k > 1$.

Изучим определяющие соотношения группы B.

Возьмём сначала любой элемент вида $[f, x, y]$ из B, где $x, y \in B$. Из линейности коммутаторов следует, что $[f, x, y]^k = [f^k, x, y]$. Поскольку $f^k \in B'$, то видим, что $[f, x, y]^k = 1$. Но B — группа без кручения, откуда $[f, x, y] = 1$. Итак, из $f^k \in B'$ в $\mathcal{N}_{3,\infty}$ следует, что $[f, x, y] = 1$. Аналогично из $f^k \in B'$ в $\mathcal{N}_{3,\infty}$ следует, что $[x, f, y] = 1$, $[x, y, f] = 1$.

Рассмотрим теперь элемент вида $[f, xy] \in B$, $x, y \in B$. Из вышесказанного и коммутаторных тождеств (1), (2) следует, что $[f, xy] = [f, x][f, y]$. Из доказанного получаем, что всякий элемент из B можно записать в виде $f^h[f, x]\widetilde{a}$, где $x, \widetilde{a}$ — подходящие элементы из A, h — некоторое целое число.

Фиксируем элементы $x, c \in A$ такие, что $f^k = [f, x]c$. Ясно, что $c \in A \cap B'$. Покажем, что $c^k \in A'$.

Для любых $a_1, a_2, c_1, c_2 \in A$ и целых u, v имеем:

$$[f^u[f, a_1]c_1, f^v[f, a_2]c_2]^k = [f^u, c_2]^k[c_1, f^v]^k[c_1, c_2]^k = [f^k, c_2]^u[c_1, f^k]^v[c_1, c_2]^k =$$
$$[[f, x]c, c_2]^u[c_1, [f, x]c]^v[c_1, c_2]^k = [c, c_2]^u[c_1, c]^v[c_1, c_2]^k \in A'.$$

Так как $c \in B'$, отсюда получаем, что $c^k \in A'$.

Среди соотношений группы B вида $f^p = [f, y]c_1$ ($p > 0$, $y \in A$, $c_1 \in A$) пусть выбрано соотношение с наименьшим положительным p. Ясно, что $k \geq p$.

Возьмём любое соотношение вида $f^n = [f, y_1]c_2$ ($n > 0$, $y_1, c_2 \in A$). Ясно, $n \geq p$. Имеем: $n = pq + l$, где $0 \leq l < p$. Тогда $f^n = f^{pq}f^l = [f, y]^q c_1^q f^l = [f, y_1]c_2$, откуда $f^l = c_1^{-q}c_2[f, y]^{-q}[f, y_1]$. Итак, $f^l = [f, x_2]c_3$, где $x_2 = y_1y^{-q}$, $c_3 = c_1^{-q}c_2$. Из выбора p получаем, что $l = 0$ и $f^n =$

$[f,y]^q c_1^q = [f,y_1]c_2$. Отсюда соотношение $f^n = [f,y_1]c_2$ следует из соотношений $f^p = [f,y]c_1$ и $[f,y]^q c_1^q = [f,y_1]c_2$ (которое можно переписать так: $[f, y^q y_1^{-1}]c_1^q c_2^{-1} = 1$). В частности, доказано, что k делится на p.

Отметим ещё, что $f^{pk} = ([f,y]c_1)^k = [f^k,y]c_1^k = [[f,x]c,y]c_1^k = [c,y]c_1^k$. Откуда $f^{pk}, f^{k^2} \in A'$.

Итак, группа B задаётся в $\mathcal{N}_{3,\infty}$ следующими определяющими соотношениями: определяющие соотношения группы A, некоторый набор соотношений вида $[f,x_j]h_j = 1$ $(x_j, h_j \in A, j \in J)$, $f^k = [f,x]c$ $(c \in A, c^k \in A', x \in A)$, $f^p = [f,y]c_1$ $(y, c_1 \in A)$, причём k делится на p. Последние два определяющих соотношения могут совпадать.

Далее для доказательства того, что $B \in qF_2$, воспользуемся признаком принадлежности (лемма 2). Возьмём произвольный неединичный элемент $g \in B$. Надо построить гомоморфизм $\varphi : B \to F_2$ такой, что $g^\varphi \neq 1$. Рассматривая вместо g элемент $g^{k^2} \in A$, можно и будем предполагать, что $g \in A$.

Так как $A \in qF_2$, то по признаку принадлежности (лемма 2) существует гомоморфизм $\alpha : A \to F_2$, при котором $g^\alpha \neq 1$. Поскольку $(c^k)^\alpha \in (A')^\alpha \subseteq F_2'$, то $c^\alpha \in F_2'$.

Пусть $\beta : F_2 \to F_2$ — изоморфное вложение, при котором $a^\beta = a^{2k}$, $b^\beta = b^{2k}$. Пусть

$$x^\alpha = a^{k_1}b^{k_2}[b,a]^{k_3}[b,a,a]^{k_4}[b,a,b]^{k_5},$$
$$c^\alpha = [b,a]^{u_1}[b,a,a]^{u_2}[b,a,b]^{u_3}.$$

Наша ближайшая цель — найти в F_2 такой элемент $z \in F_2'$, что

$$z^k = [z, x^{\alpha\beta}]c^{\alpha\beta}. \tag{6}$$

Для $z \in F_2'$, это равенство эквивалентно следующему:

$$z^k = [z, a^{2kk_1}b^{2kk_2}][b^{2k}, a^{2k}]^{u_1}[b,a,a]^{8u_2k^3}[b,a,b]^{8u_3k^3}. \tag{7}$$

Из коммутаторных тождеств и тождества (4) следует, что (учитываем, что $z \in F_2'$)

$[z, a^{2kk_1}b^{2kk_2}] = [z, a^{2kk_1}][z, b^{2kk_2}] = [z,a]^{2kk_1}[z,b]^{2kk_2}$,

$[b^{2k}, a^{2k}] = [b,a]^{4k^2}[b,a,a]^{2k^2(2k-1)}[b,a,b]^{2k^2(2k-1)}$.

Итак, равенство (7) переписывается в виде:

$$z^k = [z,a]^{2kk_1}[z,b]^{2kk_2}[b,a]^{4k^2u_1}f_1,$$

где $f_1 = [b,a,a]^{2k^2(2k-1)u_1+8u_2k^3}[b,a,b]^{2k^2(2k-1)u_1+8u_3k^3}$.

Ищем z в виде $z = [b,a]^w[b,a,a]^{w_1}[b,a,b]^{w_2}$ $(w, w_1, w_2$ пока неизвестные целые числа). Имеем:

$z^k = [b,a]^{kw}[b,a,a]^{kw_1}[b,a,b]^{kw_2}$,

$[z,a] = [[b,a]^w, a] = [b,a,a]^w$,

$[z,b] = [b,a,b]^w$.

Суммируя полученное, замечаем, что равенство (6) преобразуется в равенство

$[b,a]^{kw}[b,a,a]^{kw_1}[b,a,b]^{kw_2} = [b,a,a]^{2kk_1w}[b,a,b]^{2kk_2w}[b,a]^{4k^2u_1}f_1$.

Это равенство сводится к разрешимости в целых числах следующей системы уравнений:

$w = 4ku_1$

$w_1 = 2k_1w + 2k(2k-1)u_1 + 8u_2k^2,$

$w_2 = 2k_2w + 2k(2k-1)u_1 + 8u_3k^2,$

что очевидно.

Рассмотрим следующее отображение ρ порождающих группы B в F_2. Полагаем, что $t^\rho = t^{\alpha\beta}$ для каждого $t \in A$, $f^\rho = z$, $(f^k)^\rho = z^k$. Чтобы воспользоваться леммой 1, надо убедиться, что $(f^\rho)^p = [f^\rho, y^{\alpha\beta}]c_1^{\alpha\beta}$ (т.е. $z^p = [z, y^{\alpha\beta}]c_1^{\alpha\beta}$), $[f^\rho, x_j^{\alpha\beta}]h_j^{\alpha\beta} = 1$ (т.е. $[z, x_j^{\alpha\beta}]h_j^{\alpha\beta} = 1, j \in J$).

Видим, что

$z^{k^2} = [z^k, x^{\alpha\beta}](c^k)^{\alpha\beta} = [[z, x^{\alpha\beta}]c^{\alpha\beta}, x^{\alpha\beta}](c^k)^{\alpha\beta} = [c^{\alpha\beta}, x^{\alpha\beta}](c^k)^{\alpha\beta}$, $f^{k^2} = [f^k, x]c^k = [[f, x]c, x]c^k = [c, x]c^k$. Следовательно, $z^{k^2} = (f^{k^2})^{\alpha\beta}$.

Учитывая, что $f^{pk} \in A$, $f^{k^2} \in A$, получаем, что

$z^{pk^2} = ((f^{k^2})^{\alpha\beta})^p = (f^{k^2p})^{\alpha\beta} = ((f^{pk})^{\alpha\beta})^k = ((([f, y]c_1)^k)^{\alpha\beta})^k =$
$= [(f^{k^2})^{\alpha\beta}, y^{\alpha\beta}](c_1^{k^2})^{\alpha\beta} = [z^{k^2}, y^{\alpha\beta}](c_1^{k^2})^{\alpha\beta} = ([z, y^{\alpha\beta}]c_1^{\alpha\beta})^{k^2}$.

Из однозначности извлечения корней в нильпотентной группе без кручения следует, что $z^p = [z, y^{\alpha\beta}]c_1^{\alpha\beta}$.

Рассмотрим теперь соотношение $[f, x_j]h_j = 1$. Замечаем, что

$1 = [f^{k^2}, x_j]h_j^{k^2}$, отсюда $1 = [(f^{k^2})^{\alpha\beta}, x_j^{\alpha\beta}](h_j^{k^2})^{\alpha\beta} = [z^{k^2}, x_j^{\alpha\beta}](h_j^{k^2})^{\alpha\beta} = ([z, x_j^{\alpha\beta}]h_j^{\alpha\beta})^{k^2}$. Следовательно, $[z, x_j^{\alpha\beta}]h_j^{\alpha\beta} = 1$.

По лемме 1 отображение ρ продолжается до гомоморфизма $\rho_1 : B \to F_2$, при этом $g^{\rho_1} = g^\rho = g^{\alpha\beta} \neq 1$. Лемма доказана.

Следующая теорема позволяет извлекать корни из коммутанта группы из qF_2, оставаясь при этом в qF_2.

Теорема 3. *Пусть $B = \langle b_1, \ldots, b_n, A\rangle$ — конечно порождённая 3-ступенно нильпотентная группа без кручения и $b_i^{k_i} \in B'$ для некоторого ненулевого k_i $(i = 1, \ldots, n)$. Если $A \in qF_2$, то $B \in qF_2$.*

Доказательство. Так как $1 = [b_i^{k_i}, b_j^{k_j}, b_s^{k_s}] = [b_i, b_j, b_s]^{k_ik_jk_s}$ при любых i, j, s, то $[b_i, b_j, b_s] = 1$. По (4)

$$1 = [b_i^{k_i}, b_j^{k_j}] = [b_i, b_j]^{k_ik_j}[b_i, b_j, b_j]^{k_ik_j\frac{k_j-1}{2}}[b_i, b_j, b_i]^{k_ik_j\frac{k_i-1}{2}},$$

отсюда $[b_i, b_j]^{k_ik_j} = 1$, следовательно $[b_i, b_j] = 1$. Из линейности коммутаторов веса 3 получаем, что

$$b_i^{k_i} = \prod_l [b_l, a_{il}] \prod_{l,k} [b_l, c_{lk}, b_k] \prod_{l,s,k} [b_l, d_s, g_k] \prod_{s,k,l} [f_s, f_k, b_l] h_i$$

для подходящих $a_{il}, c_{lk}, d_s, g_k, f_l \in A$, $h_i \in A'$. Как и при доказательстве леммы 6 замечаем, что коммутаторы $[b_l, c_{lk}, b_k], [b_l, d_s, d_k], [f_s, f_k, b_l]$ в некоторых степенях равны единице, следовательно, все коммутаторы веса 3, в запись которых входит некоторое b_l, равны единице. Итак,

$b_i^{k_i} = \prod_l [b_l, a_{il}] h_i$. Отсюда для подходящих целых чисел s_l имеем:

$$b_i^{k_i k_1 \ldots k_n} = \prod_l [b_l^{k_l}, a_{il}]^{s_l} h_i^{k_i k_1 \ldots k_n} =$$

$$= \prod_l [\prod_j [b_j, a_{lj}] h_l, a_{il}]^{s_l} h_i^{k_i k_1 \ldots k_n} = \prod_l [h_l, a_{il}]^{s_l} h_i^{k_i k_1 \ldots k_n} \in A'.$$

Итак, $b_i^{k_i k_1 \ldots k_n} \in A'$. Требуемое теперь в силу индукции следует из леммы 6. Теорема доказана.

4 Замкнутость относительно свободных произведений

Покажем сначала, что квазимногообразие $qF_2(\mathcal{N}_3)$ не замкнуто относительно $\mathcal{N}_3$-свободных произведений.

Предложение 1. *Пусть группа G имеет в $\mathcal{N}_3$ представление*

$$G = \langle x_1, x_2, x_3; [x_1, x_2, x_1] = 1, [x_1, x_2, x_2] = 1 \rangle \ (\text{ т.е. } G = F_2(\mathcal{N}_2) * Z).$$

Тогда $G \notin qF_2(\mathcal{N}_3)$.

Доказательство. Предположим, что $F_2 = F_2(\mathcal{N}_3)$ и $G \in qF_2$. Поскольку $[x_1, x_2, x_3] \neq 1$ в G, по признаку принадлежности (лемма 2) существует гомоморфизм $\varphi : G \to F_2$ такой, что $[x_1, x_2, x_3]^\varphi \neq 1$. Пусть $x_i^\varphi = a^{k_i} b^{m_i} c_i$, $c_i \in F_2'$ $(i = 1, 2, 3)$. Тогда

$$[x_1, x_2]^\varphi = [a^{k_1} b^{m_1} c_1, a^{k_2} b^{m_2} c_2] = [a, b]^{k_1 m_2 - k_2 m_1} d$$

для некоторого $d \in \gamma_3(F_2)$. Отсюда

$$[x_1, x_2, x_i]^\varphi = [[a, b]^{k_1 m_2 - k_2 m_1}, a^{k_i} b^{m_i}] =$$

$$= [a, b, a]^{k_i (k_1 m_2 - k_2 m_1)} [a, b, b]^{m_i (k_1 m_2 - k_2 m_1)}.$$

Так как $[x_1, x_2, x_i]^\varphi = 1$ при $i = 1, 2$, то

$$k_i (k_1 m_2 - k_2 m_1) = 0, m_i (k_1 m_2 - k_2 m_1) = 0 \ (i = 1, 2).$$

Но $[x_1, x_2, x_3]^\varphi \neq 1$, поэтому $k_1 m_2 - k_2 m_1 \neq 0$. Итак, получаем, что $k_1 = k_2 = m_1 = m_2 = 0$, значит $[x_1, x_2]^\varphi = [c_1, c_2] = 1$. Это противоречит тому, что $[x_1, x_2, x_3] \neq 1$. Утверждение доказано.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{M} = qF_2(\mathcal{N}_3)$. Предположим, что группы G_1 и G_2 имеют в $\mathcal{N}_3$ представления*

$$G_1 = \langle x_1, x_2, \ldots; \Sigma_1 \rangle, G_2 = \langle y_1, y_2, \ldots; \Sigma_2 \rangle,$$

определяющие соотношения в которых — произведения коммутаторов веса 3 от трёх переменных либо коммутаторы видов $[x_i, x_j]$, $[y_i, y_j]$. Пусть N — нормальная подгруппа группы $G_1 * G_2$, порождённая некоторыми коммутаторами $[x_i, y_j]$ (возможно единичная). Если $G_1, G_2 \in \mathcal{M}$, то $G = (G_1 * G_2)/N \in \mathcal{M}$.

Доказательство. Возьмём произвольный неединичный элемент g из G. Ввиду признака принадлежности (лемма 2) надо установить существование гомоморфизма φ группы G в подходящую группу $M \in \mathcal{M}$, при котором образ g не равен единице.

Заметим, что $G/\gamma_3(G)$ задаётся в $\mathcal{N}_2$ определяющими соотношениями, являющимися коммутаторами от порождающих. Из теоремы 4.2.12 [5] следует, что $G/\gamma_3(G) \in qF_2(\mathcal{N}_2) \subseteq \mathcal{M}$. Если $g \notin \gamma_3(G)$, то в качестве φ берём естественный гомоморфизм $\varphi : G \to G/\gamma_3(G)$.

Поскольку $G/[G_1, G_2] \cong G_1 \times G_2 \in \mathcal{M}$, то при $g \notin [G_1, G_2]$ в качестве φ берём естественный гомоморфизм $\varphi : G \to G/[G_1, G_2]$.

Итак, в дальнейшем будем предполагать, что $g \in \gamma_3(G) \cap [G_1, G_2]$. Зафиксируем запись элемента g в виде произведения наименьшего числа неединичных коммутаторов веса 3. Так как $g \in \gamma_3(G) \cap [G_1, G_2]$, то в этой записи отсутствуют коммутаторы видов $[x_i, x_j, x_k], [y_i, y_j, y_k]$. Из тождества (3) следует, что $[y_j, x_i, x_i] = [x_i, y_j, x_i]^{-1}$, $[y_j, x_i, y_j] = [x_i, y_j, y_j]^{-1}$, поэтому можно и будем считать, что коммутаторы видов $[y_j, x_i, x_i]$, $[y_j, x_i, y_j]$ не входят в запись g.

Случай 1. Коммутатор вида $[x_i, y_j, x_i]$ либо $[x_i, y_j, y_j]$ входит в запись g в ненулевой степени (пусть они входят в запись g в степенях k_i, m_i соответственно).

По лемме 1 существует гомоморфизм $\varphi : G \to F_2$, при котором $x_i^\varphi = a, y_j^\varphi = b$, образы остальных порождающих группы G равны 1. Тогда $g^\varphi = [a, b, a]^{k_i}[a, b, b]^{m_i} \neq 1$. Следовательно φ — требуемый гомоморфизм.

Считаем, что коммутаторы из случая 1 (т.е. коммутаторы веса 3 от любых двух переменных x_i, y_j) не входят в запись g. Исходя из равенств $[y_k, x_i, x_j] = [x_i, y_k, x_j]^{-1}$, $[y_k, x_j, x_i] = [x_j, y_k, x_i]^{-1}$, можно и будем считать, что коммутаторы видов $[y_k, x_i, x_j]$, $[y_k, x_j, x_i]$ не входят в запись g.

Случай 2. В запись g входит $[x_i, x_j, y_k]^t$ $(t \neq 0)$ и не входят коммутаторы $[x_i, y_k, x_j], [x_j, y_k, x_i]$. Видим, что $[x_i, x_j] \neq 1$ в G (иначе $[x_i, x_j, y_k]^t$ можно удалить из записи g). Отметим, что если $[x_i, y_k] \in N$ и $[x_j, y_k] \in N$, то $[x_i, x_j, y_k]^t = [x_j, y_k, x_i]^{-t}[y_k, x_i, x_j]^{-t} = 1$, поэтому $[x_i, x_j, y_k]^t$ элемент можно удалить из записи g. Итак, $[x_i, y_k] \notin N$ либо $[x_j, y_k] \notin N$.

Пусть сначала $[x_j, y_k] \notin N$. По лемме 1 существует гомоморфизм $\varphi : G \to F_2$, при котором $x_i^\varphi = a, x_j^\varphi = b, y_k^\varphi = a$, образы остальных порождающих группы G равны 1. Тогда $g^\varphi = [a, b, a]^t \neq 1$. Следовательно, φ — требуемый гомоморфизм.

Случай $[x_i, y_k] \notin N$ аналогичен.

Случай 3. В запись g входит выражение вида $[x_i, y_k, x_j]^s[x_j, y_k, x_i]^l$, где i, j, k попарно различные, $s \neq 0$ либо $l \neq 0$. В этом случае $[x_i, y_k] \notin N$ либо $[x_j, y_k] \notin N$.

Предположим сначала, что $[x_i, y_k] \notin N$ и $[x_j, y_k] \notin N$. По лемме 1 существует гомоморфизм $\varphi : G \to F_2$, при котором $x_i^\varphi = a, x_j^\varphi = a, y_k^\varphi = b$, образы остальных порождающих группы G равны 1. Тогда $g^\varphi = [a, b, a]^{s+l}$.

Следовательно, при $s+l \neq 0$ φ — требуемый гомоморфизм. Если $l=-s$, то ввиду тождества (3),

$$[x_i,y_k,x_j]^s[x_j,y_k,x_i]^l=[y_k,x_j,x_i]^{-s}[x_j,x_i,y_k]^{-s}[x_j,y_k,x_i]^l=[x_j,x_i,y_k]^{-s}.$$

В этом случае заменяем $[x_i,y_k,x_j]^s[x_j,y_k,x_i]^{-s}$ на $[x_j,x_i,y_k]^{-s}$ и видим, что количество коммутаторов в записи g можно уменьшить, что не так.

Пусть теперь $[x_i,y_k]\in N$ и $[x_j,y_k]\notin N$. Тогда $g=[x_j,y_k,x_i]^l[x_i,x_j,y_k]^t\ldots$ для некоторого t. Если соотношение $[x_i,x_j]=1$ следует из определяющих соотношений группы G, то ввиду $[x_i,y_k]\in N$ и тождества (3), имеем: $[x_j,y_k,x_i]^l[x_i,x_j,y_k]^t=[y_k,x_i,x_j]^{-l}[x_i,x_j,y_k]^{-l}=1$. Это означает, что выражение $[x_j,y_k,x_i]^l[x_i,x_j,y_k]^t$ можно исключить из записи g, уменьшив при этом число коммутаторов в записи g. Итак, соотношение $[x_i,x_j]=1$ не следует из определяющих соотношений группы G. По лемме 1 существует гомоморфизм $\varphi: G\to F_2$, при котором $x_i^\varphi=a, x_j^\varphi=b, y_k^\varphi=a$, образы остальных порождающих группы G равны 1. Тогда $g^\varphi=[b,a,a]^l[a,b,a]^t=[a,b,a]^{t-l}$. Следовательно, при $t\neq l$ φ — требуемый гомоморфизм. Если $t=l$, то $[x_j,y_k,x_i]^l[x_i,x_j,y_k]^t=[y_k,x_i,x_j]^{-l}[x_i,x_j,y_k]^{-l}[x_i,x_j,y_k]^l=1$, так как $[x_i,y_k]\in N$. В этом случае $[x_j,y_k,x_i]^l[x_i,x_j,y_k]^t$ можно удалить из записи элемента g, уменьшив в записи g число коммутаторов.

Случай $[x_i,y_k]\notin N$ и $[x_j,y_k]\in N$ аналогичен предыдущему.

Случаи, когда в записи g участвуют коммутаторы видов $[x_i,y_j,y_k]$, $[y_j,x_i,y_k]$, $[y_j,y_k,x_i]$ аналогичны рассмотренным. Теорема доказана.

Группа G из следствия 2 называется частично коммутативной в многообразии $\mathcal{N}_3$. Отметим, что квазимногообразия, порождённые частично коммутативными группами в классе метабелевых групп, исследовались в [12]. Индукцией по числу порождающих получаем

Следствие 2. *Предположим, что группа G имеет в $\mathcal{N}_3$ представление*

$$G=\langle x_1,x_2,\ldots,x_n;\Sigma\rangle,$$

где Σ — любое множество определяющих соотношений вида $[x_i,x_j]$. Тогда $G\in qF_2(\mathcal{N}_3)$.

Примерами применения теоремы 4 служат утверждения 2 и 3.

Предложение 2. *Пусть группа A_m имеет в $\mathcal{N}_3$ следующее представление:*

$$A_m=\langle\{x_i,y_i,z_i\mid i=1,\ldots,m\};\prod_{i=1}^m[x_i,y_i,z_i]=1\rangle.$$

Тогда $A_m\in qF_2$.

Доказательство индукцией по m. Вводя удобные обозначения, считаем, что $A_1=\langle x_1,x_2,x_3;[x_3,x_1,x_2]=1\rangle$ в $\mathcal{N}_3$. Возьмём произвольный неединичный элемент g из A_1.

Ввиду признака принадлежности (лемма 2) надо установить существование гомоморфизма φ группы A_1 в подходящую группу $M\in qF_2$, при котором образ g не равен единице. Заметим, что $A_1/\gamma_3(A_1) \cong F_{3m}(\mathcal{N}_2) \in qF_2(\mathcal{N}_2) \subseteq qF_2$. Если $g \notin \gamma_3(A_1)$, то в качестве φ берём естественный гомоморфизм $\varphi : A_1 \to A_1/\gamma_3(A_1)$.

Пусть $g \in \gamma_3(A_1)$. Тогда g можно записать в виде произведения базисных коммутаторов. Считаем, что

$$g = [x_3, x_1, x_1]^{k_1}[x_3, x_1, x_3]^{k_2}[x_3, x_2, x_2]^{k_3}\times$$

$$\times[x_3, x_2, x_3]^{k_4}[x_2, x_1, x_1]^{k_5}[x_2, x_1, x_2]^{k_6}[x_2, x_1, x_3]^{k_7}.$$

Если $k_3 \neq 0$ либо $k_4 \neq 0$, то по лемме 1 существует гомоморфизм $\varphi : A_1 \to F_2$, при котором $x_1^\varphi = 1, x_2^\varphi = a, x_3^\varphi = b$, при этом $g^\varphi = [b, a, a]^{k_3}[b, a, b]^{k_4} \neq 1$. Следовательно, при $k_3 \neq 0$ либо $k_4 \neq 0$ φ — требуемый гомоморфизм.

Аналогично, существует гомоморфизм $\varphi_2 : A_1 \to F_2$, при котором $x_1^{\varphi_2} = a, x_2^{\varphi_2} = 1, x_3^{\varphi_2} = b$, при этом $g^{\varphi_2} = [b, a, a]^{k_1}[b, a, b]^{k_2} \neq 1$. Значит, при $k_1 \neq 0$ либо $k_2 \neq 0$ φ_2 — искомый гомоморфизм.

Аналогично рассматриваем гомоморфизм $\varphi_3 : A_1 \to F_2$, при котором $x_1^{\varphi_3} = a, x_2^{\varphi_3} = b, x_3^{\varphi_3} = 1$, при нём $g^{\varphi_3} = [b, a, a]^{k_5}[b, a, b]^{k_6} \neq 1$. Значит, при $k_5 \neq 0$ либо $k_6 \neq 0$ φ_3 — искомый гомоморфизм.

Можно и будем предполагать, что $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 0$. В этом случае рассматриваем гомоморфизм $\varphi_4 : A_1 \to F_2$, при котором $x_1^{\varphi_4} = a, x_2^{\varphi_4} = b, x_3^{\varphi_4} = a$, при нём $g^{\varphi_3} = [b, a, a]^{k_7} \neq 1$. Значит, φ_4 — нужный гомоморфизм. Итак, $A_1 \in qF_2$.

$A_m/\langle[x_1, y_1, z_1]\rangle \cong A_1 * A_{m-1}$. Ввиду индукции и теоремы 4 $A_m/\langle[x_1, y_1, z_1]\rangle \in qF_2$. По признаку принадлежности (лемма 2) достаточно построить гомоморфизм $\varphi : A_m \to F_2$ такой, что $[x_1, y_1, z_1]^\varphi \neq 1$. Таким гомоморфизмом является, например, гомоморфизм φ, при котором $x_1^\varphi = a, y_1^\varphi = b, z_1^\varphi = b, x_2^\varphi = a^{-1}, y_2^\varphi = b, z_2^\varphi = b$, образы остальных порождающих группы A_m равны 1. Существование этого гомоморфизма следует из леммы 1. Утверждение доказано.

Предложение 3. *Пусть группа A_{rm} $(r \geq 2)$ задана в $\mathcal{N}_3$ порождающими*

$$\{x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, a_j, b_j, d_j \mid i = 1, \dots m, j = 1, \dots, r\}$$

и определяющими соотношениями

$$[a_1, b_1, d_1]\prod_{i=1}^{m}[x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}] = \dots = [a_r, b_r, d_r]\prod_{i=1}^{m}[x_{ir}, y_{ir}, z_{ir}]\rangle,$$

и всеми соотношениями вида

$$[f_u, f_v] = 1 \text{ при } u \neq v,$$

где f_l пробегает множество $\{x_{il}, y_{il}, z_{il} \mid i = 1, \dots m\}$. Тогда $A_{rm} \in qF_2$ и $A_{rm}/\langle[a_1, b_1, d_1]\prod_{i=1}^{m}[x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}]\rangle \in qF_2$.

Доказательство. По утверждению 2 $A_t \in qF_2$ при каждом t. Пусть $c = [a_1, b_1, d_1] \prod_{i=1}^{m} [x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}] \in A_{rm}$. Группа $A_{rm}/\langle c \rangle$ может быть собрана из групп, изоморфных A_{m+1}, при помощи свободных произведений и фактор-групп. При этом условия теоремы 4 будут выполнены. Итак, по теореме 4 $A_{rm}/\langle c \rangle \in qF_2$. По признаку принадлежности (лемма 2) достаточно построить гомоморфизм $\varphi : A_{rm} \to F_2$ такой, что $c^{\varphi} \neq 1$. Таким гомоморфизмом является, например, гомоморфизм φ, при котором $a_i^{\varphi} = b, b_i^{\varphi} = a, d_i^{\varphi} = a (i = 1, \ldots, r)$, образы остальных порождающих группы A_{rm} равны 1. Существование этого гомоморфизма следует из леммы 1. Утверждение доказано.

В заключение хочу выразить благодарность Шаховой Светлане за внимательное прочтение этой работы и полезные замечания.

References

[1] A. I. Mal'tsev, *Nilpotent torsion-free groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **13**: (1949), 201–212.

[2] M. I. Kargapolov, *On the π-completion of locally nilpotent groups*, Algebra i Logika. Seminar, **1**:1 (1962), 5–13. Zbl 0146.03601

[3] A. I. Budkin, *A lattice of quasivarieties of nilpotent groups*, Algebra and Logic, **33**:1 (1994), 14–21. Zbl 0823.20025

[4] A. N. Fedorov, *Subquasivarieties of nilpotent minimal non-Abelian group varieties*, Sib. Math. J., **21**:6 (1980), 840–850

[5] A. I. Budkin,*Quasivarieties of groups*, Barnaul, Altay State University, 2002.

[6] M. I. Kargapolov and Yu. I. Merzlyakov, *Fundamentals of the Theory of Groups*, Springer, New York, Heidelberg, and Berlin (1979). Zbl 0549.20001

[7] V. A. Gorbunov, *Algebraic Theory of Quasivarieties*, Consultants Bureau, New York (1998).

[8] H. Neumann, *Varieties of groups*, Springer, New York, Heidelberg, and Berlin (1967). Zbl 0251.20001

[9] A. I. Malcev,*Algebraic Systems*, Springer and Akademie, Berlin, Heidelberg, and New York (1973).

[10] A. I. Budkin, V. A. Gorbunov, *Quasivarieties of algebraic systems*, Algebra and Logic, **14**:2 (1975), 123–142. Zbl 0317.08003

[11] A. N. Fedorov, *Quasi-identities of a free 2-nilpotent group*, Math. Notes, **40**:5 (1986), 837–841. Zbl 0622.20021

[12] E. I. Timoshenko, *Quasivarieties generated by partially commutative groups*, Sib. Math. J., 2013, **54**:4 (2013), 722–730. Zbl 1290.20021

Alexandr Ivanovich Budkin
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
Email address: budkin@math.asu.ru