

НЕКОРРЕКТНАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА  
ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

К.С. ФАЯЗОВ , И.О. ХАЖИЕВ 

*Представлено* О.С. Розановой

**Abstract:** This work is devoted to the study of an ill-posed boundary value problem for an inhomogeneous high-order mixed-type equation. An a priori estimate of the solution is obtained depending on the initial data. The uniqueness and conditional stability of the solution are proved.

**Keywords:** mixed-type equation, ill-posed problem, a priori estimate, uniqueness, stability, set of correctness.

## 1 Введение. Постановка задачи

Работа посвящена исследованию начально-краевой задачи для неоднородного уравнения смешанного типа высокого порядка.

Пусть  $Q_T = \{(x, y, t) : (x, y) \in \Omega, 0 < t < T\}$ ,  $\Omega = \{(x, y) : |x| < \pi, 0 < y < \pi\}$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ .

**Задача.** Найти решение  $u(x, y, t)$  уравнения

$$\partial_t^n u + \operatorname{sgn}(x) \partial_x^2 u + \partial_y^{2m} u = f(x, y, t) \quad (1)$$

в области  $Q_T \cap \{x \neq 0\}$  и удовлетворяющее следующим условиям: начальным

$$\partial_t^p u|_{t=0} = \varphi_p(x, y), \quad p = 0, 1, \dots, n-1, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

граничным

$$\begin{aligned} u|_{x=-\pi} = u|_{x=\pi} = 0, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \partial_y^{2q} u|_{y=0} = \partial_y^{2q} u|_{y=\pi} = 0, \quad q = 0, 1, \dots, (m-1), \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (3)$$

и условиям склеивания

$$u|_{x=-0} = u|_{x=+0}, \quad u_x|_{x=-0} = u_x|_{x=+0}, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где  $n = 2^s$ ,  $s, m \in N$ ,  $\varphi_p(x, y)$ - достаточные гладкие функции и удовлетворяют условиям согласования,  $p = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $f(x, y, t)$  - функция источника.

Уравнение (1) относится к классу уравнений смешанного типа и исследуемая задача некорректна в смысле Ж.Адамара.

В данной работе доказывается условная корректность задачи (1)-(4) на множестве корректности.

Исследование условной кооректности краевых задач началось с работ [1-2]. В работах [3-5, 7] исследуются некорректные краевые задачи для уравнений высокого порядка смешанного и составного типа. Заметим, что некорректные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений исследовались в работах S. Agmon, L.Nirenberg, F. John, R.J. Knops, L.E. Payne, A.P. Calderon, С.Г. Крейн, Н.А. Levine, К.С. Фаязов.

Так как задача (1)-(4) относится к классу некорректно поставленных задач математической физики возникает необходимость нахождения априорных оценок для решения уравнения (1), благодаря которым нам удастся доказать теоремы о единственности и условной устойчивости решения искомой задачи на множестве корректности.

## 2 Вспомогательные факты

Для решения задачи (1)-(4) нам понадобятся результаты следующей спектральной задачи.

**Спектральная задача.** Найти такие значения  $\lambda$  при которых задача

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} x \partial_x^2 \omega + \partial_y^{2m} \omega + \lambda \omega = 0, \quad (x, y) \in \Omega \cap \{x \neq 0\}, \\ \omega(-\pi, y) = \omega(\pi, y) = 0, \quad y \in [0; \pi], \\ \partial_y^{2q} \omega|_{y=0} = \partial_y^{2q} \omega|_{y=\pi} = 0, \quad q = 0, 1, \dots, (m-1), \quad x \in [-\pi; \pi], \\ \omega(-0, y) = \omega(+0, y), \quad \omega_x(-0, y) = \omega_x(+0, y), \quad y \in [0; \pi] \end{aligned} \quad (5)$$

имеет нетривиальное решение.

Используя результаты работы [9, 10] можно доказать, что задача (5) имеет  $\bar{\lambda}_{k,j} = \mu_k^+ + (-1)^{m+1} j^{2m}$ ,  $\tilde{\lambda}_{k,j} = \mu_k^- + (-1)^{m+1} j^{2m}$ ,  $\{\bar{\lambda}_{k,j}\}_{k,j=1}^\infty$ ,  $\{\tilde{\lambda}_{k,j}\}_{k,j=1}^\infty$  собственные значения и соответствующие им собственные функции  $\{\bar{\omega}_{k,j}\}_{k,j=1}^\infty$ ,

$\{\tilde{\omega}_{k,j}\}_{k,j=1}^{\infty}$ , где  $\mu_k^+$ ,  $-\mu_k^-$  образуют неубывающие последовательности и являются решениями трансцендентного уравнения  $tg\sqrt{\pm\mu_k^{\pm}\pi} + th\sqrt{\pm\mu_k^{\pm}\pi} = 0$ .

Решения уравнения  $tg\sqrt{\pm\mu_k^{\pm}\pi} + th\sqrt{\pm\mu_k^{\pm}\pi} = 0$  можно легко найти с помощью метода Ньютона. При  $\varepsilon = 10^{-10}$  с погрешностью вычислим  $\mu_1^+ \approx 0,56672194089$ ,  $\mu_2^+ \approx 3,06251868904$ ,  $\mu_3^+ \approx 7,56250005484$ ,  $\mu_4^+ \approx 14,06250000014$ ,  $\mu_k^+ \approx (k - \frac{1}{4})^2$ ,  $k > 4$ ,  $\mu_k^- = -\mu_k^+$ ,  $k \in N$ . Отметим, что  $\mu_k^+ = (k - \frac{1}{4})^2 + O(e^{-(k+\frac{1}{2})\pi})$ . Отсюда, для любой  $k, j \in N$ , оценим

$$\begin{aligned} |\bar{\lambda}_{k,j}| &= \left| \mu_k^+ + (-1)^{m+1} j^{2m} \right| \geq \left| \mu_k^+ - j^{2m} \right| = \left| (k - \frac{1}{4})^2 - j^{2m} + O(e^{-2(k+\frac{1}{2})\pi}) \right| \geq \\ & \quad \left| (k - \frac{1}{4})^2 - j^{2m} \right| - \left| O(e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}) \right| = \\ & \left| k - \frac{1}{4} - j^m \right| \left( k - \frac{1}{4} + j^m \right) - \left| O(e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}) \right| \geq \frac{1}{4} (2k - \frac{1}{4}) - \left| O(e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}) \right| > \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом,  $|\tilde{\lambda}_{k,j}| > \frac{2}{5}$ .

Обозначим  $(u, v) = \int_{\Omega} u v d\Omega$  скалярное произведение и  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$

в  $L_2(\Omega)$ . Отметим, что из (5) следует, что  $\bar{\omega}_{k,j}, \tilde{\omega}_{k,j} \in \overset{\circ}{W}_2^{2,2m}(\Omega)$ , и их можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{k,j}(x, y) &= X_k^+(x) \cdot Y_j(y), \\ \tilde{\omega}_{k,j}(x, y) &= X_k^-(x) \cdot Y_j(y), \end{aligned}$$

и они обладают свойством

$$\begin{aligned} (\bar{\omega}_{k,j}, \bar{\omega}_{p,q}) &= \begin{cases} 1, & k = p \wedge j = q, \\ 0, & k \neq p \vee j \neq q, \end{cases} & (\tilde{\omega}_{k,j}, \tilde{\omega}_{p,q}) &= \begin{cases} -1, & k = p \wedge j = q, \\ 0, & k \neq p \vee j \neq q, \end{cases} \\ (\bar{\omega}_{k,j}, \tilde{\omega}_{p,q}) &= 0, & k, j, p, q \in N, \end{aligned}$$

где

$$X_k^+(x) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\mu_k^+}(x-\pi)}{\sqrt{\pi} \cos \sqrt{\mu_k^+}\pi}, & 0 < x \leq \pi, \\ \frac{sh \sqrt{\mu_k^+}(x+\pi)}{\sqrt{\pi} ch \sqrt{\mu_k^+}\pi}, & -\pi \leq x < 0, \end{cases} \quad X_k^-(x) = \begin{cases} \frac{sh \sqrt{-\mu_k^-}(x-\pi)}{\sqrt{\pi} ch \sqrt{-\mu_k^-}\pi}, & 0 < x \leq \pi, \\ \frac{\sin \sqrt{-\mu_k^-}(x+\pi)}{\sqrt{\pi} \cos \sqrt{-\mu_k^-}\pi}, & -\pi \leq x < 0, \end{cases}$$

$$Y_j(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin jy.$$

**Лемма 1.** (см. [10]) Любая функция  $\varphi(x, y) \in \overset{\circ}{W}_2^{1,2m-1}(\Omega)$  представима в виде ряда

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (sgn x \varphi, \bar{\omega}_{k,j}) \bar{\omega}_{k,j} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (sgn x \varphi, \tilde{\omega}_{k,j}) \tilde{\omega}_{k,j}$$

сходящегося в норме  $\overset{\circ}{W}_2^{1,2m-1}(\Omega)$ .

Обозначим через  $H_0(\Omega)$  замыкание линейной оболочки систем функций  $\{\bar{\omega}_{k,j}\}, \{\tilde{\omega}_{k,j}\}$  по нормам  $L_2(\Omega)$ .

**Теорема 1.** (см. [10]) Собственные функции задачи (5) образует базис Рисса в  $L_2(\Omega)$  и любая функция

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{sgn} x \varphi, \bar{\omega}_{k,j}) \bar{\omega}_{k,j} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{sgn} x \varphi, \tilde{\omega}_{k,j}) \tilde{\omega}_{k,j}$$

(определение и свойства базисов Рисса см. [6]).

Согласно [9, 10], имеем

$$\|u(x, y, t)\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{sgn}(x) u, \bar{\omega}_{k,j})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{sgn}(x) u, \tilde{\omega}_{k,j})^2. \quad (6)$$

Под обобщенным решением краевой задачи (1) - (4) назовем функцию  $u(x, y, t)$ , принадлежащую  $W_2^{1,2m-1,n}(Q_T)$  и удовлетворяющую тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} (\operatorname{sgn} x u \partial_t^n V - u_x V_x - \operatorname{sgn} x \partial_y^{2m-1} u \partial_y V) dQ_T = \\ & \sum_{p=1}^n (-1)^{p+1} \int_{\Omega} \operatorname{sgn} x \partial_t^{p-1} V \Big|_{t=0} \partial_t^{n-p} u \Big|_{t=0} d\Omega - \int_{Q_T} \operatorname{sgn} x f V dQ_T \end{aligned} \quad (7)$$

для любой функции  $V(x, y, t) \in W_2^{2,2m,n}(Q_T)$ , удовлетворяющей условиям  $\partial_t^p V|_{t=T} = 0$ ,  $p = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $\partial_y^{2q} V|_{y=0} = \partial_y^{2q} V|_{y=\pi} = 0$ ,  $q = 0, 1, \dots, (m-1)$ ,  $V|_{x=-\pi} = V|_{x=\pi} = 0$ .

Пусть решение задачи (1) - (4) существует и тогда он имеет вид

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{u}_{k,j}(t) \bar{\omega}_{k,j}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{u}_{k,j}(t) \tilde{\omega}_{k,j}(x, y)$$

где  $\bar{u}_{k,j}(t) = \int_{\Omega} \operatorname{sgn} x u(x, y, t) \bar{\omega}_{k,j}(x, y) d\Omega$ ,  $\tilde{u}_{k,j}(t) = - \int_{\Omega} \operatorname{sgn} x u(x, y, t) \tilde{\omega}_{k,j}(x, y) d\Omega$ .

Используя выражения  $V = \vartheta_{k,j}(t) \bar{\omega}_{k,j}(x, y)$ ,  $V = \vartheta_{k,j}(t) \tilde{\omega}_{k,j}(x, y)$  из равенство (7), условия  $\partial_t^p \vartheta_{k,j}(T) = 0$ ,  $p = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $\vartheta_{k,j}(t) \in W_2^n(0, T)$  и обозначения  $\bar{\varphi}_{p_{k,j}} = \int_{\Omega} \operatorname{sgn} x \varphi_p(x, y) \bar{\omega}_{k,j}(x, y) d\Omega$ ,  $\tilde{\varphi}_{p_{k,j}} = - \int_{\Omega} \operatorname{sgn} x \varphi_p(x, y) \tilde{\omega}_{k,j}(x, y) d\Omega$ ,

$\bar{f}_{k,j}(t) = \int_{\Omega} \operatorname{sgn} x f(x, y, t) \bar{\omega}_{k,j}(x, y) d\Omega$ ,  $\tilde{f}_{k,j}(t) = - \int_{\Omega} \operatorname{sgn} x f(x, y, t) \tilde{\omega}_{k,j}(x, y) d\Omega$ ,

$p = 0, 1, \dots, n-1$ , заметим, что функции  $\bar{u}_{k,j}(t)$ ,  $\tilde{u}_{k,j}(t)$  при каждом  $k \in N$ ,  $j \in N$  являются решением следующих задач, соответственно

$$\begin{cases} \frac{d^n}{dt^n} \{\bar{u}_{k,j}\} - \bar{\lambda}_{k,j} \bar{u}_{k,j} = \bar{f}_{k,j}, \\ \frac{d^p}{dt^p} \{\bar{u}_{k,j}\} \Big|_{t=0} = \bar{\varphi}_{p_{k,j}}, p = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (8)$$

и

$$\begin{cases} \frac{d^n}{dt^n} \{\tilde{u}_{k,j}\} - \tilde{\lambda}_{k,j} \tilde{u}_{k,j} = \tilde{f}_{k,j}, \\ \frac{d^p}{dt^p} \{\tilde{u}_{k,j}\} \Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_{p_{k,j}}, p = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (9)$$

### 3 Априорная оценка

**Лемма 2.** *Для решения уравнения*

$$\frac{d^n v(t)}{dt^n} - b^{\frac{n}{2}} v(t) = g(t), \quad n = 2^s, \quad s \in N$$

при  $b > 0$ ,  $b$  - некоторая константа,  $0 < t < T$ , справедлива оценка

$$|v(t)|^2 \leq 2n \left( n \sum_{k=0}^{n-1} b^{-k} \left| \frac{d^k}{dt^k} v(0) \right|^2 + \alpha^2 \right)^{1 - \frac{t}{T}} \times \\ \left( n \sum_{k=0}^{n-1} b^{-k} \left| \frac{d^k}{dt^k} v(T) \right|^2 + \alpha^2 \right)^{\frac{t}{T}} + n\alpha^2. \quad (10)$$

где  $\alpha = b^{\frac{1-n}{2}} \int_0^T |g(t)| dt$ .

*Доказательство.* Доказательство данного неравенства приведем последовательно, начиная с уравнения первого порядка.

1. Пусть  $v(t)$  решение уравнения  $v_t - av = h(t)$ , где  $a$  - некоторая константа. Тогда легко заметить, что для функции  $v(t)$  справедлива оценка

$$|v(t)| \leq (|v(0)| + \alpha_1)^{1 - \frac{t}{T}} (|v(T)| + \alpha_1)^{\frac{t}{T}} + \alpha_1, \quad (11)$$

где  $\alpha_1 = \int_0^T |h(t)| dt$ .

2. При  $s = 1$  рассмотрим дифференциальное уравнение  $v_{tt} - bv = g(t)$ . Введем обозначения  $\frac{1}{\sqrt{b}} \frac{dv}{dt} = w$ ,  $\rho = v + w$ ,  $\sigma = v - w$ . Тогда после некоторых преобразований имеем

$$\begin{aligned} \rho_t - \sqrt{b}\rho &= b^{-1/2}g(t) \\ \rho(0) &= v(0) + b^{-1/2}v_t(0) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_t + \sqrt{b}\sigma &= -b^{-1/2}g(t) \\ \sigma(0) &= v(0) - b^{-1/2}v_t(0) \end{aligned}$$

Применяя неравенство (11) получим, что для функции  $v(t)$  верно неравенство

$$|v(t)|^2 \leq \left( \left| v(0) + b^{-\frac{1}{2}}v_t(0) \right| + \alpha \right)^{2\frac{T-t}{T}} \left( \left| v(T) + b^{-\frac{1}{2}}v_t(T) \right| + \alpha \right)^{2\frac{t}{T}} + \alpha^2 + \\ \left( \left| v(0) - b^{-\frac{1}{2}}v_t(0) \right| + \alpha \right)^{2\frac{T-t}{T}} \left( \left| v(T) - b^{-\frac{1}{2}}v_t(T) \right| + \alpha \right)^{2\frac{t}{T}} + \alpha^2. \quad (12)$$

Используя неравенство  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , для решения уравнения  $v_{tt} - bv = g(t)$  получаем

$$|v(t)|^2 \leq 4 \left( 2 \left( |v(0)|^2 + |b|^{-1} |v_t(0)|^2 \right) + \alpha^2 \right)^{\frac{T-t}{T}} \times \\ \left( 2 \left( |v(T)|^2 + |b|^{-1} |v_t(T)|^2 \right) + \alpha^2 \right)^{\frac{t}{T}} + 2\alpha^2 \quad (13)$$

где  $\alpha = |b|^{-1/2} \int_0^T |g(t)| dt$ .

3. Теперь рассмотрим уравнение  $\frac{d^4 v}{dt^4} - b^2 v = g(t)$ , когда  $s = 2$ . Введем обозначения  $\frac{1}{b} \frac{d^2 v}{dt^2} = w$ ,  $\rho = v + w$ ,  $\sigma = v - w$ , тогда имеем

$$\rho_{tt} - b\rho = b^{-1}g(t) \\ \rho(0) = v(0) + b^{-1}v_{tt}(0), \rho_t(0) = v_t(0) + b^{-1}v_{ttt}(0), \quad (14)$$

и

$$\sigma_{tt} + b\sigma = -b^{-1}g(t) \\ \sigma(0) = v(0) - b^{-1}v_{tt}(0), \sigma_t(0) = v_t(0) - b^{-1}v_{ttt}(0). \quad (15)$$

Очевидно, что для решения задачи (14) согласно (13) верна оценка

$$|\rho(t)|^2 \leq 4 \left( 2 \left( |\rho(0)|^2 + |b|^{-1} |\rho_t(0)|^2 \right) + \alpha^2 \right)^{\frac{T-t}{T}} \times \\ \left( 2 \left( |\rho(T)|^2 + |b|^{-1} |\rho_t(T)|^2 \right) + \alpha^2 \right)^{\frac{t}{T}} + 2\alpha^2.$$

где  $\alpha = |b|^{-3/2} \int_0^T |g(t)| dt$ .

Уравнение (15) перепишем в виде  $\sigma_{tt} - i^2 b \sigma = -b^{-1}g(t)$ . Тогда из (12)

$$|\sigma(t)|^2 \leq 2 \left( \left| \sigma(0) + ib^{-\frac{1}{2}} \sigma_t(0) \right|^2 + \alpha^2 \right)^{\left(1 - \frac{t}{T}\right)} \left( \left| \sigma(T) + ib^{-\frac{1}{2}} \sigma_t(T) \right|^2 + \alpha^2 \right)^{\frac{t}{T}} + \alpha^2 + \\ 2 \left( \left| \sigma(0) - ib^{-\frac{1}{2}} \sigma_t(0) \right|^2 + \alpha^2 \right)^{\left(1 - \frac{t}{T}\right)} \left( \left| \sigma(T) - ib^{-\frac{1}{2}} \sigma_t(T) \right|^2 + \alpha^2 \right)^{\frac{t}{T}} + \alpha^2$$

откуда

$$|\sigma(t)|^2 \leq 4 \left( 2 \left( |\sigma(0)|^2 + b^{-1} |\sigma_t(0)|^2 \right) + \alpha^2 \right)^{1 - \frac{t}{T}} \times \\ \left( 2 \left( |\sigma(T)|^2 + b^{-1} |\sigma_t(T)|^2 \right) + \alpha^2 \right)^{\frac{t}{T}} + 2\alpha^2.$$

Замечая, что  $|v(t)|^2 \leq \frac{1}{2} \left( |\rho(t)|^2 + |\sigma(t)|^2 \right)$  и учитывая начальные условия задачи (14), (15) можно получить следующую оценку для решения

уравнения четвертого порядка

$$|v(t)|^2 \leq 8 \left( 4 \sum_{k=0}^3 |b|^{-k} \left| \frac{d^k}{dt^k} v(0) \right|^2 + \alpha^2 \right)^{1 - \frac{t}{T}} \times \\ \left( 4 \sum_{k=0}^3 |b|^{-k} \left| \frac{d^k}{dt^k} v(T) \right|^2 + \alpha^2 \right)^{\frac{t}{T}} + 4\alpha^2.$$

4. Пусть  $s = r$ ,  $r \in N$ , и рассмотрим уравнение  $\frac{d^{2r}v}{dt^{2r}} - b^{2r-1}v = g(t)$ . Предполагаем, что следующая оценка верна

$$|v(t)|^2 \leq 2 \cdot 2^r \left( 2^r \sum_{k=0}^{2^r-1} |b|^{-k} \left| \frac{d^k v(0)}{dt^k} \right|^2 + \alpha^2 \right)^{1 - \frac{t}{T}} \times \\ \left( 2^r \sum_{k=0}^{2^r-1} |b|^{-k} \left| \frac{d^k v(T)}{dt^k} \right|^2 + \alpha^2 \right)^{\frac{t}{T}} + 2^r \alpha^2, \quad (16)$$

где  $\alpha = |b|^{\frac{1-2^r}{2}} \int_0^T |g(t)| dt$ .

5. Теперь  $s = r + 1$  и рассмотрим уравнение  $\frac{d^{2^{r+1}}v}{dt^{2^{r+1}}} - b^{2^r}v = g(t)$ . На основе метода математической индукции докажем, что справедлива оценка

$$|v(t)|^2 \leq 2 \cdot 2^{r+1} \left( 2^{r+1} \sum_{k=0}^{2^{r+1}-1} |b|^{-k} \left| \frac{d^k v(0)}{dt^k} \right|^2 + \alpha^2 \right)^{1 - \frac{t}{T}} \times \\ \left( 2^{r+1} \sum_{k=0}^{2^{r+1}-1} |b|^{-k} \left| \frac{d^k v(T)}{dt^k} \right|^2 + \alpha^2 \right)^{\frac{t}{T}} + 2^{r+1} \alpha^2, \quad (17)$$

где  $\alpha = |b|^{\frac{1-2^{r+1}}{2}} \int_0^T |g(t)| dt$ .

Введем обозначения  $\frac{1}{b^{2^r-1}} \frac{d^{2^r}v}{dt^{2^r}} = w$ ,  $\rho = v + w$ ,  $\sigma = v - w$ , тогда имеем

$$\frac{d^{2^r}\rho}{dt^{2^r}} - b^{2^r-1}\rho = b^{-2^r-1}g(t), \\ \frac{d^k\rho}{dt^k} \Big|_{t=0} = \frac{d^k v}{dt^k} \Big|_{t=0} + b^{-2^r-1} \frac{d^{2^r+k}v}{dt^{2^r+k}} \Big|_{t=0}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^r - 1. \quad (18)$$

и

$$\frac{d^{2^r}\sigma}{dt^{2^r}} + b^{2^r-1}\sigma = -b^{-2^r-1}g(t), \\ \frac{d^k\sigma}{dt^k} \Big|_{t=0} = \frac{d^k v}{dt^k} \Big|_{t=0} - b^{-2^r-1} \frac{d^{2^r+k}v}{dt^{2^r+k}} \Big|_{t=0}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^r - 1. \quad (19)$$

Применяя (16) для (18) имеем оценку

$$\begin{aligned}
|\rho(t)|^2 &\leq 2 \cdot 2^r \left( 2^r \sum_{k=0}^{2^r-1} |b|^{-k} \left| \frac{d^k}{dt^k} \rho(0) + b^{-2^{r-1}} \frac{d^{2^r+k}}{dt^{2^r+k}} \rho(0) \right|^2 + \alpha^2 \right)^{1-\frac{t}{T}} \times \\
&\quad \left( 2^r \sum_{k=0}^{2^r-1} |b|^{-k} \left| \frac{d^k}{dt^k} \rho(T) + b^{-2^{r-1}} \frac{d^{2^r+k}}{dt^{2^r+k}} \rho(T) \right|^2 + \alpha^2 \right)^{\frac{t}{T}} + 2^r \alpha^2 \leq \\
2^{r+1} &\left( 2^r \sum_{k=0}^{2^r-1} |b|^{-k} \left( \frac{d^k}{dt^k} \rho(0) \right)^2 + |b|^{-2^r-k} \left( \frac{d^{2^r+k}}{dt^{2^r+k}} \rho(0) \right)^2 + \alpha^2 \right)^{1-\frac{t}{T}} \times \\
&\left( 2^r \sum_{k=0}^{2^r-1} |b|^{-k} \left( \frac{d^k}{dt^k} \rho(T) \right)^2 + |b|^{-2^r-k} \left( \frac{d^{2^r+k}}{dt^{2^r+k}} \rho(T) \right)^2 + \alpha^2 \right)^{\frac{t}{T}} + 2^r \alpha^2 \leq \\
2^{r+1} &\left( 2^r \sum_{k=0}^{2^{r+1}-1} |b|^{-k} \left| \frac{d^k}{dt^k} \rho(0) \right|^2 + \alpha^2 \right)^{1-\frac{t}{T}} \left( 2^r \sum_{k=0}^{2^{r+1}-1} |b|^{-k} \left| \frac{d^k}{dt^k} \rho(T) \right|^2 + \alpha^2 \right)^{\frac{t}{T}} + 2^r \alpha^2,
\end{aligned}$$

где  $\alpha = |b|^{\frac{1-2^r}{2}} \int_0^T |b^{-2^{r-1}} g(t)| dt = |b|^{\frac{1-2^{r+1}}{2}} \int_0^T |g(t)| dt$ .

Аналогичным образом для функции  $\sigma(t)$  имеем оценку

$$\begin{aligned}
|\sigma(t)|^2 &\leq 2^{r+1} \left( 2^r \sum_{k=0}^{2^{r+1}-1} |b|^{-k} \left| \frac{d^k}{dt^k} \sigma(0) \right|^2 + \alpha^2 \right)^{1-\frac{t}{T}} \times \\
&\quad \left( 2^r \sum_{k=0}^{2^{r+1}-1} |b|^{-k} \left| \frac{d^k}{dt^k} \sigma(T) \right|^2 + \alpha^2 \right)^{\frac{t}{T}} + 2^r \alpha^2.
\end{aligned}$$

Замечая, что  $|v(t)|^2 \leq \frac{1}{2} (|\rho(t)|^2 + |\sigma(t)|^2)$  и можно получить следующую оценку для решения уравнения  $2^{r+1}$  порядка

$$\begin{aligned}
|v(t)|^2 &\leq 2 \cdot 2^{r+1} \left( 2^{r+1} \sum_{k=0}^{2^{r+1}-1} |b|^{-k} \left| \frac{d^k}{dt^k} v(0) \right|^2 + \alpha^2 \right)^{1-\frac{t}{T}} \\
&\quad \left( 2^{r+1} \sum_{k=0}^{2^{r+1}-1} |b|^{-k} \left| \frac{d^k}{dt^k} v(T) \right|^2 + \alpha^2 \right)^{\frac{t}{T}} + 2^{r+1} \alpha^2.
\end{aligned}$$

Значит  $\forall n = 2^s, s \in N, s \geq 1$  верна оценка (10).  $\square$



Применяя лемму 2 для решения задач (8), (9) имеем соответствующие оценки

$$|\bar{u}_{k,j}(t)|^2 \leq 2n \left( n \sum_{r=0}^{n-1} |\bar{\lambda}_{k,j}|^{-\frac{2r}{n}} \left| \frac{d^k}{dt^k} \bar{u}_{k,j}(0) \right|^2 + \bar{\alpha}_{k,j}^2 \right)^{1-\frac{t}{T}} \times \\ \left( n \sum_{r=0}^{n-1} |\bar{\lambda}_{k,j}|^{-\frac{2r}{n}} \left| \frac{d^k}{dt^k} \bar{u}_{k,j}(T) \right|^2 + \bar{\alpha}_{k,j}^2 \right)^{\frac{t}{T}} + n\bar{\alpha}_{k,j}^2, \quad (20)$$

$$|\tilde{u}_{k,j}(t)|^2 \leq 2n \left( n \sum_{r=0}^{n-1} |\tilde{\lambda}_{k,j}|^{-\frac{2r}{n}} \left| \frac{d^k}{dt^k} \tilde{u}_{k,j}(0) \right|^2 + \tilde{\alpha}_{k,j}^2 \right)^{1-\frac{t}{T}} \times \\ \left( n \sum_{r=0}^{n-1} |\tilde{\lambda}_{k,j}|^{-\frac{2r}{n}} \left| \frac{d^k}{dt^k} \tilde{u}_{k,j}(T) \right|^2 + \tilde{\alpha}_{k,j}^2 \right)^{\frac{t}{T}} + n\tilde{\alpha}_{k,j}^2. \quad (21)$$

На основе (6) имеем

$$\|u(x, y, t)\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left( |\bar{u}_{k,j}(t)|^2 + |\tilde{u}_{k,j}(t)|^2 \right).$$

Заметим, что для любых  $k, j$  справедливы оценки

$$\left( \sqrt[n]{|\bar{\lambda}_{k,j}|^2} \right)^{-p} < C_1, \quad \sqrt[n]{|\tilde{\lambda}_{k,j}|^2}^{-p} < C_1, \quad p = 1, \dots, n-1,$$

где  $C_1 = \frac{25}{4}$ .

Суммируя неравенства (20) и (21) по  $k, j$  и используя неравенство Гельдера, получим

$$\|u\|_0^2 \leq 4n \left( nC_1 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \left( |\bar{\varphi}_{p_{k,j}}|^2 + |\tilde{\varphi}_{p_{k,j}}|^2 \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_{k,j}^2 + \tilde{\alpha}_{k,j}^2) \right)^{1-\frac{t}{T}} \times \\ \left( nC_1 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \left( \left| \frac{d^p}{dt^p} \bar{u}_{k,j}(T) \right|^2 + \left| \frac{d^p}{dt^p} \tilde{u}_{k,j}(T) \right|^2 \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_{k,j}^2 + \tilde{\alpha}_{k,j}^2) \right)^{\frac{t}{T}} + \\ n \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_{k,j}^2 + \tilde{\alpha}_{k,j}^2),$$

где  $\bar{\alpha}_{k,j} = |\bar{\lambda}_{k,j}|^{\frac{1-n}{n}} \int_0^T |\bar{f}_{k,j}(t)| dt$ ,  $\tilde{\alpha}_{k,j} = |\tilde{\lambda}_{k,j}|^{\frac{1-n}{n}} \int_0^T |\tilde{f}_{k,j}(t)| dt$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_{k,j}^2 + \tilde{\alpha}_{k,j}^2) &\leq \\ T \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left( |\bar{\lambda}_{k,j}|^{\frac{2(1-n)}{n}} |\bar{f}_{k,j}(t)|^2 + |\tilde{\lambda}_{k,j}|^{\frac{2(1-n)}{n}} |\tilde{f}_{k,j}(t)|^2 \right) dt &\leq \\ C_2 T \int_0^T \|f(x, y, t)\|_0^2 dt, \end{aligned}$$

где  $C_2 = \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|u(x, y, t)\|_0^2 &\leq 4n \left( C_1 n \sum_{k=0}^{n-1} \|\varphi_p\|^2 + C_2 T \int_0^T \|f\|_0^2 dt \right)^{1-\frac{t}{T}} \times \\ &\left( C_1 n \sum_{p=0}^{n-1} \left\| \frac{d^p}{dt^p} u(x, y, T) \right\|^2 + C_2 T \int_0^T \|f\|_0^2 dt \right)^{\frac{t}{T}} + C_2 n T \int_0^T \|f\|_0^2 dt. \quad (22) \end{aligned}$$

#### 4 Теоремы о единственности и условной устойчивости

Пусть  $M = \left\{ u : \sum_{p=0}^{n-1} \left\| \frac{d^p u(x, y, t)}{dt^p} \Big|_{t=T} \right\|^2 \leq \theta^2 \right\}$ .

**Теорема 2.** Пусть решение задачи (1) - (4) существует и  $u(x, y, t) \in M$ . Тогда решение задачи (1) - (4) единственно.

*Доказательство.* Пусть  $u_1, u_2$  являются решениями задачи (1) - (4) с одинаковыми данными соответственно. Тогда  $u = u_1 - u_2$  удовлетворяет задаче (1) - (4) с однородными начальными данными (2) и условиями (3), (4). Из (22) следует  $\|u(x, y, t)\|_0 \leq 0 \Rightarrow u(x, y, t) = 0$  или  $u_1(x, y, t) \equiv u_2(x, y, t)$  для  $\forall(x, y, t) \in \Omega$ .  $\square$

Введем обозначения: через  $u(x, y, t)$  обозначим решение задачи (1) - (4) с точными данными, а через  $u_\varepsilon(x, y, t)$  решение задачи (1) - (4) с приближенными данными.

**Теорема 3.** Пусть решение задачи (1) - (4) существует и  $u(x, y, t), u_\varepsilon(x, y, t) \in M$ . Пусть  $\|\varphi_p(x, y) - \varphi_{p\varepsilon}(x, y)\|_0 \leq \varepsilon$ ,  $p = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $\|f(x, y, t) - f_\varepsilon(x, y, t)\|_0 \leq \varepsilon$ . Тогда для любого решения задачи (1) - (4) при  $(x, y, t) \in Q_T$  имеет место неравенство

$$\|u(x, y, t) - u_\varepsilon(x, y, t)\|_0^2 \leq \delta(\varepsilon, \theta, t),$$

где  $\delta(\varepsilon, \theta, t) = 4n((C_1n^2 + C_2T^2)\varepsilon^2)^{\frac{T-t}{T}}(4C_1n\theta^2 + C_2T^2\varepsilon^2)^{\frac{t}{T}} + C_2nT^2\varepsilon^2$ .

*Доказательство.* Пусть решение задачи (1) - (4) существует. Рассмотрим разность  $U(x, y, t) = u(x, y, t) - u_\varepsilon(x, y, t)$ . Заметим, что  $u(x, y, t)$ ,  $u_\varepsilon(x, y, t) \in M$ . Функция  $U(x, y, t)$  является решением уравнения в области  $Q_T \cap \{x \neq 0\}$

$$\partial_t^n U + \operatorname{sgn}(x)\partial_x^2 U + \partial_y^{2m} U = f(x, y, t) - f_\varepsilon(x, y, t)$$

с начальными данными

$$\frac{d^p}{dt^p} U(x, y, 0) = \varphi_p(x, y) - \varphi_{p\varepsilon}(x, y), \quad p = 0, 1, \dots, n-1, \quad (x, y) \in \bar{\Omega},$$

граничными данными

$$\begin{aligned} U|_{x=-\pi} = U|_{x=\pi} = 0, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \partial_y^{2q} U|_{y=0} = \partial_y^{2q} U|_{y=\pi} = 0, \quad q = 0, 1, \dots, (m-1), \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

а также условиями склеивания

$$U|_{x=-0} = U|_{x=+0}, \quad U_x|_{x=-0} = U_x|_{x=+0}, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Из неравенства (22) следует

$$\begin{aligned} \|U\|_0^2 \leq 4n \left( C_1n \sum_{p=0}^{n-1} \|\varphi_p - \varphi_{p\varepsilon}\|_0^2 + C_2T \int_0^T \|f - f_\varepsilon\|_0^2 dt \right)^{1-\frac{t}{T}} \times \\ \left( C_1n \sum_{p=0}^{n-1} \left\| \frac{d^p U(x, y, t)}{dt^p} \right\|_{t=T} \right)_0^2 + C_2T \int_0^T \|f - f_\varepsilon\|_0^2 dt \Big)^{\frac{t}{T}} + nC_2T \int_0^T \|f - f_\varepsilon\|_0^2 dt. \end{aligned}$$

Оценим каждый множитель правой части отдельно:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{n-1} \|\varphi_p - \varphi_{p\varepsilon}\|_0^2 = \|\varphi_1 - \varphi_{1\varepsilon}\|_0^2 + \|\varphi_2 - \varphi_{2\varepsilon}\|_0^2 + \dots + \\ \|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1\varepsilon}\|_0^2 \leq \varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^2 = n\varepsilon^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{n-1} \left\| \frac{d^p U(x, y, t)}{dt^p} \right\|_{t=T} \Big|_0^2 = \sum_{p=0}^{n-1} \left\| \frac{d^p u}{dt^p} \Big|_{t=T} - \frac{d^p u_\varepsilon}{dt^p} \Big|_{t=T} \right\|_0^2 \leq \\ 2 \sum_{p=0}^{n-1} \left\| \frac{d^p u}{dt^p} \Big|_{t=T} \right\|_0^2 + 2 \sum_{p=0}^{n-1} \left\| \frac{d^p u_\varepsilon}{dt^p} \Big|_{t=T} \right\|_0^2 \leq 4\theta^2, \end{aligned}$$

$$\int_0^T \|f - f_\varepsilon\|_0^2 dt \leq T\varepsilon^2.$$

После несложных преобразований получим неравенство

$$\|U\|_0^2 \leq 4n(C_1 n^2 \varepsilon^2 + C_2 T^2 \varepsilon^2)^{\frac{T-t}{T}} (4C_1 n \theta^2 + C_2 T^2 \varepsilon^2)^{\frac{t}{T}} + C_2 n T^2 \varepsilon^2.$$

Что и требовалось доказать.  $\square$

## References

- [1] K.S. Fayazov, *A certain ill-posed Cauchy problem for first-order and second-order differential equations with operator coefficients*, Siberian Math. J., **35**:3 (1994), 631–635. Zbl 0865.34044
- [2] K.S. Fayazov, *An ill-posed Cauchy problem for a differential equation with operator coefficients*, Dokl. Math., **45**:3 (1992), 635 – 637. Zbl <https://zbmath.org/0799.35029>
- [3] K.S. Fayazov, I.O. Khajiev, *Conditional Correctness of the Initial-Boundary Value Problem for a System of High-Order Mixed-Type Equations*, Russ. Math., **66**:2 (2022), 53–63. Zbl 1505.35274
- [4] K.S. Fayazov, I.O. Khajiev, *Conditional correctness of boundary-value problem for composite fourth-order differential equation*, Russ. Math., **59**:4 (2015), 54–62. Zbl 1431.35015
- [5] K.S. Fayazov, I.O. Khajiev, *Stability Estimates and Approximate Solutions to a Boundary Value Problem for a Fourth Order Partial Differential Equation*, Mathematical notes of NEFU, **22**:1 (2015), 78–88. Zbl 1374.35119
- [6] I. Ts. Gokhberg and M. G. Krein, *An Introduction to the Theory of Linear Non-Self-Adjoint Operators in a Hilbert Space*, Nauka, Moscow, 1965. Zbl 0138.07803
- [7] I.O. Khajiev, *Estimation of the conditional stability of an ill-posed initial-boundary problem for a high-order mixed type equation*, Uzb. Math. J., **65**:4 (2021), 48–61. Zbl 1499.65467
- [8] M. M. Lavrent'ev, L. Ya. Savel'ev, *Operator theory and ill-posed problems* 2nd ed., Novosibirsk: Izdatel'stvo Instituta Matematiki Im. S. L. Soboleva SO RAN, 2010.
- [9] S.G. Pyatkov, *Properties of eigenfunctions of a spectral problem and their applications*, in: Some Applications of Functional Analysis to Problems of Mathematical Physics, Institute of Mathematics, Novosibirsk, 1986, 65–84 (in Russian).
- [10] S.G. Pyatkov, *On properties of eigenfunctions of a certain spectral problem and their applications*, in: Correct boundary value problems for non-classical equations of mathematical physics, Collect. sci. Works, Novosibirsk, 1984, 115–130 (in Russian). Zbl 0594.35075

FAYAZOV KUDRATILLO SADRIDINOVICH  
 TURIN POLYTECHNIC UNIVERSITY IN TASHKENT,  
 KICHIK KHALKA YULI STR. 17,  
 100195, TASHKENT, UZBEKISTAN  
*Email address:* kudratillo52@mail.ru

IKROMBEK OZODOVICH KHAJIEV  
 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, TURIN POLYTECHNIC UNIVERSITY IN TASHKENT,  
 UNIVERSITET STR. 4,  
 100174, TASHKENT, UZBEKISTAN  
*Email address:* kh.ikrom04@gmail.com