

РАСЧЁТ НЕСТАЦИОНАРНОГО
НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРНОЙ
ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ
СЕЧЕНИЕМ

Б.В. СЕМИСАЛОВ , И.А. БУГОЕЦ, Л.И. КУТКИН

Представлено М.А. ШИШЛЕНИНЫМ

Abstract: For equations of the rheological mesoscopic Vinogradov-Pokrovskii model the boundary value problem is formulated that describes non-isothermal Poiseuille-type flows of a viscoelastic polymer fluid through the channel with the elliptic cross-section under the condition that the pressure gradient and the temperature of the channel's wall undergo rapid (impulse) changes. To solve the problem, we develop the numerical algorithm based on the collocation method, the application of polynomial and rational approximations with respect to spatial variables and of finite-difference scheme for the time marching. The analysis of distributions of the fluid's velocity and temperature in the channel, as well as, of the time dependencies of fluid's flow and mean temperature is performed. The critical relations between the amplitudes and durations of impulses of the pressure gradient and of the temperature are computed. They are those values surpassing which leads to the divergence of the numerical solution that, as we suppose, can be

SEMISALOV, B.V., BUGOETS, I.A., KUTKIN, L.I. SIMULATION OF THE NON-STATIONARY NON-ISOTHERMAL POLYMER FLUID FLOW THROUGH THE CHANNEL WITH ELLIPTIC CROSS-SECTION.

© 2024 СЕМИСАЛОВ Б.В., БУГОЕЦ И.А., КУТКИН Л.И..

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-281.

Поступила 1 ноября 2024 г., опубликована 14 апреля 2025.

associates with the destruction (the stability loss) of a Poiseuille-type flow.

Keywords: polymer fluid, mesoscopic model, impulse impact, Poiseuille-type flow, channel with elliptic cross-section, destruction of the flow, critical relations of the parameters, highly-accurate algorithm, accounting for singularities of the solution.

1 Введение

Моделирование и расчёт пуазейлевских течений вязкоупругих полимерных жидкостей представляют актуальную научную задачу, связанную с развитием современных технологий экструзии и печати [1, 2]. Одной из основных проблем в этой области является математическое описание процесса потери устойчивости течения, связанной с нелинейными эффектами. В работах [3, 4, 5] впервые предложен и апробирован подход к решению этой проблемы на основе анализа разрушения решения дифференциальной задачи, описывающей течения полимерной жидкости в рамках реологической мезоскопической модели [6, 7]. Под разрушением решения здесь и далее понимается ситуация, когда при изменении параметров модели и/или с течением времени классическое решение рассматриваемых уравнений перестаёт существовать. Подход основан на локализации особых точек аналитических продолжений искомых решений, координаты которых в комплексной плоскости зависят от времени и от параметров модели. Выход особой точки в область переменных задачи означает разрушение решения. На основе такого подхода в указанных работах определены критические соотношения реологических параметров и градиента давления в канале, при которых решение разрушается. Предсказания о соотношениях критических значений числа Рейнольдса Re и числа Вайсенберга W – их обратная пропорциональность – полученные при использовании нового подхода, согласуются с результатами экспериментов из [8, 9].

Нужно заметить, что для применения указанного подхода в приложениях требуется рассмотреть более сложные постановки. Важным фактором при этом является учёт диссипации кинетической энергии жидкости и теплопереноса под воздействием резкого (импульсного) изменения температуры стенки канала или градиента давления. Подобные воздействия приводят к сложному вязкоупругому и термомеханическому отклику полимерной системы, который является существенно нелинейным и нестационарным. Исследование таких эффектов для мезоскопического класса моделей на данный момент отсутствует.

Представленная работа нацелена на восполнение этого пробела. Ниже для уравнений мезоскопической модели Покровского–Виноградова

сформулирована задача о неизотермическом течении пуазейлевского типа вязкоупругой полимерной жидкости в канале с эллиптическим сечением под действием резко меняющегося градиента давления и температуры стенки канала. Для решения задачи предложен алгоритм, основанный на методе коллокаций, применении полиномиальных и дробно-рациональных барицентрических интерполяций (ДРБИ) [10, 11] и разностных схем по времени в комбинации с итерациями по нелинейности. Отметим, что применение ДРБИ и специальных замен переменных в рамках нашей работы позволяет адаптировать метод к большим градиентам решений, возникающим у стенки канала, которые, как мы считаем, связаны с наличием особых точек у аналитического продолжения решения. В результате для каждого расчётного режима с высокой степенью достоверности удаётся определить, будет ли решение существовать достаточно долго после импульса градиента давления и температуры, или произойдёт его разрушение.

Такие расчёты позволяют определить критические соотношения значений амплитуд и продолжительностей импульсов, которые характеризуют переход к более сложной непуазейлевской и хаотичной динамике.

2 Постановка задачи

Используя уравнения механики жидкости [14, 15, 16], дополненные реологическими соотношениями из [6, 17], следуя [18], запишем уравнения *реологической мезоскопической модели Покровского–Виноградова*, которая описывает неизотермические течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости. Эти уравнения в безразмерном виде в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla P = \frac{1}{\operatorname{Re}} \operatorname{div}(Y\Pi) + (\operatorname{Fr}^{-2} - \operatorname{Ga}(Y - 1))\mathbf{e}_g, \quad (2)$$

$$\frac{da_{ij}}{dt} - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_l}{\partial x_l} a_{lj} - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_l} a_{li} - \frac{1}{\operatorname{We}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \mathcal{L}_{ij} = 0, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (3)$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{\operatorname{Pr}} \left(\Delta Y + C_d Y \Phi \right). \quad (4)$$

Здесь t — время; u_1, u_2, u_3 — компоненты вектора скорости жидкости \mathbf{u} , P — давление;

$a_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ — компоненты симметрического тензора анизотропии Π второго ранга;

$\operatorname{div}(Y\Pi) = (\operatorname{div}(Y\mathbf{a}_1), \operatorname{div}(Y\mathbf{a}_2), \operatorname{div}(Y\mathbf{a}_3))^T$ — вектор;

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ — столбцы симметрической матрицы $\Pi = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$;

$Y = \frac{T}{T_0}$, T — температура, $T_0 = 293.15 \text{ K} = 20^\circ \text{ C}$ — температура окружающей среды,

$$\mathfrak{L}_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{W} + \frac{\bar{k}(a_{11} + a_{22} + a_{33})}{3} a_{ij} + \beta(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) \right) / \bar{\tau}_0(Y), \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$\bar{k} = k - \beta$, k, β ($0 < \beta < 1$) — феноменологические параметры модели, характеризующие вклады, связанные с анизотропией (величина β учитывает ориентацию макромолекулярного клубка, число k — его размеры), ниже, следуя [19], полагаем $k = 1.2\beta$;

$$\bar{\tau}_0 = \tau_0(Y) = \frac{J(Y)}{Y}, \quad J(Y) = \exp\left(-\bar{E}_A \frac{Y-1}{Y}\right);$$

$\text{Re} = \frac{\rho u_H l}{\eta_0^*}$ — число Рейнольдса; $\rho (= \text{const})$ — плотность среды;

$W = \frac{\tau_0^* u_H}{l}$ — число Вейсенберга;

η_0^*, τ_0^* — начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации при $T = T_0$;

Φ — диссипативная функция (её выражение приведено в [18], см. также важные комментарии по поводу термодинамической согласованности модели во введении статьи [20]), C_d — коэффициент диссипации уравнения теплопроводности (4);

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа;

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)$ — полная производная по времени;

$\text{Ga} = \text{Ra}/\text{Pr}$, $\bar{E}_A = E_A/T_0$;

постоянные Ra (число Рэлея), Pr (число Прандтля), Fr (число Фруда), E_A (энергия активации) описаны в [14, 6], их значения, соответствующие рассмотренной постановке, указаны в приложении статьи [18], \mathbf{e}_g — единичный вектор, определяющий направление силы тяжести (зададим его противоположно направленным с осью x , рис. 1).

Далее для координат используем обозначения x, y, z ($x = x_1, y = x_2, z = x_3$).

Система (1)–(4) записана в безразмерном виде: время t ; координаты x, y, z ; компоненты вектора скорости u_1, u_2, u_3 ; давление P ; компоненты

тензора анизотропии a_{ij} отнесены к l/u_H ; l ; u_H ; ρu_H^2 ; $W/3$ соответственно, где l — характерная длина, u_H — характерная скорость течения.

Пусть полимерная жидкость течёт в канале с эллиптическим поперечным сечением Ω , лежащим в плоскости (y, z) ; большая полуось Ω равна единице, малую полуось обозначим $r < 1$. Пусть фокусы эллипсов имеют координаты $(\pm\delta, 0)$, $\delta < 1$ (речь идёт о безразмерных величинах), рис. 1. В канале вдоль оси x действует перепад давления $\Delta P(t)$. Будем искать частное решение исходной системы (1)–(4) следующего вида

$$\begin{cases} u_2 = u_3 \equiv 0, & u_1 = u(t, y, z), \\ P = \mathcal{P}(t, y, z) - A(t)x, & Y = Y(t, y, z), \\ a_{ij} = a_{ij}(t, y, z), & i, j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (5)$$

Величина $A(t) = \frac{\Delta P(t)}{\rho u_H^2 h}$ есть безразмерный перепад давления на отрезке по x длины h . Следуя [18], получаем $\Phi = u_y a_{12} + u_z a_{13}$.

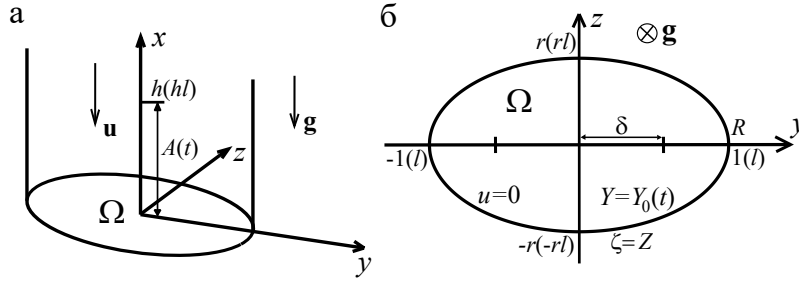


Рис. 1. Канал с сечением эллиптической формы (а), эллиптическое сечение (б).

Обозначим

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{a_{ij}}{\text{Re}}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad \alpha_i = \alpha_{ii} + \alpha^2, \quad \alpha^2 = \frac{1}{W\text{Re}}; \\ K_I &= \text{Re}\left(\alpha^2 + \frac{\bar{k}}{3}I\right), \quad I = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}, \quad \tilde{K}_I = K_I + \beta\text{Re}I. \end{aligned}$$

Тогда с учётом (5) запишем систему (2), (3) в виде двух систем:

$$\begin{cases} u_t - (Y\alpha_{12})_y - (Y\alpha_{13})_z = A(t) + \text{Ga}(Y - 1) - \text{Fr}^{-2}, \\ (\alpha_{12})_t - \alpha_2 u_y - \alpha_{23} u_z + (\tilde{K}_I \alpha_{12} + \beta\text{Re}(\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{33}))/\bar{\tau}_0 = 0, \\ (\alpha_{13})_t - \alpha_{23} u_y - \alpha_3 u_z + (\tilde{K}_I \alpha_{13} + \beta\text{Re}(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22}))/\bar{\tau}_0 = 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} (\alpha_{11})_t - 2(\alpha_{12} u_y + \alpha_{13} u_z) + (K_I \alpha_{11} + \beta\text{Re}(\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2))/\bar{\tau}_0 = 0, \\ (\alpha_{22})_t + (\tilde{K}_I \alpha_{22} + \beta\text{Re}(\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{23}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}))/\bar{\tau}_0 = 0, \\ (\alpha_{33})_t + (\tilde{K}_I \alpha_{33} + \beta\text{Re}(\alpha_{13}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33} + \alpha_{23}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}))/\bar{\tau}_0 = 0, \\ (\alpha_{23})_t + (\tilde{K}_I \alpha_{23} + \beta\text{Re}(\alpha_{12}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23}))/\bar{\tau}_0 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Для определения производных давления получаем следующие выражения:

$$\mathcal{P}_y = (Y\alpha_{22})_y + (Y\alpha_{23})_z, \quad \mathcal{P}_z = (Y\alpha_{23})_y + (Y\alpha_{33})_z.$$

Для определения температуры имеем

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} + C_d Y (u_y a_{12} + u_z a_{13}) \right). \quad (8)$$

Умножим второе и третье уравнения (6) на Y , добавим и вычтем из второго уравнения выражение $Y_t \alpha_{12}$, а из третьего уравнения $Y_t \alpha_{13}$. Выражения, полученные таким образом, продифференцируем по y и по z соответственно и сложим с производной первого уравнения (6) по t . В результате придём к квазилинейному уравнению 2-го порядка для функции $u(t, y, z)$:

$$u_{tt} - Y \tilde{\Delta} u - \tilde{A} u_y - \tilde{B} u_z + \left(\tilde{K}_I / \bar{\tau}_0 \right) [u_t - A(t) - \text{Ga}(Y - 1) + \text{Fr}^{-2}] + F = A'(t) + \text{Ga} Y_t, \quad (9)$$

где

$$\tilde{\Delta} u = \alpha_2 u_{yy} + 2\alpha_{23} u_{yz} + \alpha_3 u_{zz},$$

$$\tilde{A} = \tilde{A}(t, y, z) = (Y\alpha_2)_y + (Y\alpha_{23})_z, \quad \tilde{B} = \tilde{B}(t, y, z) = (Y\alpha_{23})_y + (Y\alpha_3)_z,$$

$$F = F(t, y, z) = Y \left[\alpha_{12} \left(\frac{\tilde{K}_I}{\bar{\tau}_0} \right)_y + \alpha_{13} \left(\frac{\tilde{K}_I}{\bar{\tau}_0} \right)_z \right] + \\ + \beta \text{Re} \left[\left(\frac{Y l_{33}}{\bar{\tau}_0} \right)_y + \left(\frac{Y l_{22}}{\bar{\tau}_0} \right)_z \right] - (Y_t \alpha_{12})_y - (Y_t \alpha_{13})_z,$$

$$l_{22} = \alpha_{12} \alpha_{23} - \alpha_{13} \alpha_{22}, \quad l_{33} = \alpha_{13} \alpha_{23} - \alpha_{12} \alpha_{33}.$$

Для постановки задачи в области Ω удобно переписать уравнения (6)–(9) в *эллиптических координатах* ζ, γ . Соответствующая замена переменных представляет собой конформное отображение и имеет вид

$$y = \delta \cosh \zeta \sin \gamma, \quad z = \delta \sinh \zeta \cos \gamma, \quad (10)$$

где $\delta = \sqrt{1 - r^2}$, $0 \leq \zeta < \infty$, $0 \leq \gamma < 2\pi$. Выражая в (6)–(9) производные неизвестных функций по переменным y, z через производные по переменным ζ, γ (соотношения для этого приведены в пункте 2.2 статьи [21]), получаем разрешающую систему уравнений для функций $u(\zeta, \gamma)$, $\alpha_{ij}(\zeta, \gamma)$ и $Y(\zeta, \gamma)$ в эллиптической системе координат. Дополним эти уравнения граничными условиями: условиями прилипания жидкости для скорости и значениями температуры стенки канала:

$$u(t, Z, \gamma) = 0 \text{ при } t > 0, \quad \text{где } Z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right), \quad (11)$$

$$Y(t, Z, \gamma) = Y_b(t, \gamma) \text{ при } t > 0, \quad (12)$$

где $\zeta = Z$ – уравнение границы канала, $Y_b(\gamma)$ – распределение температуры на стенке канала.

Начальные данные сформулируем в предположении, что при $t = 0$ жидкость в канале покоится, и её температура находится в равновесии с внешней средой:

$$\alpha_{ij}(0, \zeta, \gamma) = 0, \quad u(0, \zeta, \gamma) = 0, \quad u_t(0, \zeta, \gamma) = 0, \quad Y(0, \zeta, \gamma) = 1 \quad (13)$$

для всех точек ζ, γ из Ω .

Ниже с применением вычислительного эксперимента исследуем влияние импульсов градиента давления $A(t)$ и резких изменений температуры стенки канала $Y_b(t, \gamma)$ на картину течения и на реализуемость установившихся пуазейлевских режимов течения после воздействия таких импульсов.

3 Описание вычислительного алгоритма

Для реализации расчётов введём сетку по времени с шагом τ и узлами $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Обозначим $u^n = u^n(\zeta, \gamma) = u(t_n, \zeta, \gamma)$, $\alpha_{ij}^n = \alpha_{ij}^n(\zeta, \gamma) = \alpha_{ij}(t_n, \zeta, \gamma)$, $Y^n = Y^n(\zeta, \gamma) = Y(t_n, \zeta, \gamma)$ и аппроксимируем в уравнениях (6)–(9) производные по времени в точке $t = t_{n+1}$ разностными отношениями вида

$$\begin{aligned} u_{tt}^{n+1} = u_{tt}|_{t=t_{n+1}} &\approx \frac{2u^{n+1} - 5u^n + 4u^{n-1} - u^{n-2}}{\tau^2}, \\ u_t^{n+1} = u_t|_{t=t_{n+1}} &\approx \frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\tau}, \end{aligned} \quad (14)$$

$n = 2, 3, \dots$ Эти отношения в литературе часто называют разностной аппроксимацией «назад» или методом Гира второго порядка.

3.1. Аппроксимация неизвестных функций и их производных.

На каждом шаге описанной схемы по времени будем искать решения уравнений (6)–(9), записанных в эллиптической системе координат, с граничными условиями и начальными данными (11)–(13) в классе достаточно гладких в области Ω 2π -периодических по переменной γ функций. Далее для записи вычислительной схемы необходимо аппроксимировать в указанных уравнениях функции $\alpha_{ij}^n(\zeta, \gamma)$, $u^n(\zeta, \gamma)$ и $Y^n(\zeta, \gamma)$ и их производные по переменным ζ и γ . В качестве способа аппроксимации по переменной ζ используем дробно-рациональные барицентрические интерполяции [22, 10, 11], а по переменной γ – тригонометрические полиномы с ядром Дирихле. Для приближения функций $\alpha_{ij}^n(\zeta, \gamma)$, $u^n(\zeta, \gamma)$ и $Y^n(\zeta, \gamma)$ применим прямые (тензорные) произведения указанных одномерных интерполяций.

В области $\Omega = \{(\zeta, \gamma) : 0 \leq \zeta \leq Z, 0 \leq \gamma < 2\pi\}$ введём сетку с узлами (ζ_k, γ_m) , где $\zeta_k = \mathcal{L} \circ g(\xi_k)$, $\xi_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2K}$ – нули полинома Чебышёва степени K , $\hat{\zeta} = g(\xi)$ – конформное отображение, переводящее отрезок $[-1, 1]$ в себя, $\mathcal{L}(\hat{\zeta}) = Z(\hat{\zeta} + 1)/2$ – линейное отображение отрезка $[-1, 1]$ в

$[0, Z]$; $\gamma_m = \frac{2\pi(m-1)}{2M-1}$, $k = \overline{1, K}$, $m = \overline{1, M}$, $M = 2M - 1$. Пусть $\hat{\zeta}_0 = -1$, $\hat{\zeta}_k = g(\xi_k)$, тогда $\zeta_k = \mathcal{L}(\hat{\zeta}_k)$, $k = \overline{0, K}$. Будем полагать (см. введение), что аналитические продолжения неизвестных функций по переменной ζ имеют особые точки, лежащие на действительной прямой вне отрезка $[0, Z]$ близко к точке $\zeta = Z$, см. по этому поводу рассуждения из [3, 4]. Тогда, следуя оценкам погрешности из [10], отображение $g(\xi)$ следует выбирать таким образом, чтобы обратное отображение $g^{-1}(\hat{\zeta})$ уносило эти особые точки на достаточно большое расстояние от отрезка $[-1, 1]$. В качестве такого отображения в этой работе используем модификацию функции, предложенной в [23], с параметром ε :

$$g(\xi) = 1 + \varepsilon \sinh \left[\frac{\xi - 1}{2} \sinh^{-1} \frac{2}{\varepsilon} \right], \quad \varepsilon > 0. \quad (15)$$

Несложно проверить, что если образы особых точек α_{ij}^n , u^n , Y^n как функций переменной ζ под действием отображения \mathcal{L}^{-1} лежат в окрестности точки $1 + \varepsilon$, то отображение (15) обладает нужными свойствами.

Пусть $(\alpha_{ij}^n)_{km} = \alpha_{ij}^n(\zeta_k, \gamma_m)$, $u_{km}^n = u^n(\zeta_k, \gamma_m)$, $Y_{km}^n = Y^n(\zeta_k, \gamma_m)$. Построим приближения

$$\alpha_{ij}^n(\zeta, \gamma) \approx P(\alpha_{ij}^n, \zeta, \gamma) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M l_{kK}(\hat{\zeta}) D_{mM}(\gamma) (\alpha_{ij}^n)_{km}, \quad (16)$$

$$u^n(\zeta, \gamma) \approx P_b(u^n, \zeta, \gamma) = \sum_{k=0}^K \sum_{m=1}^M l_{kK}^b(\hat{\zeta}) D_{mM}(\gamma) u_{km}^n, \quad (17)$$

$$Y^n(\zeta, \gamma) \approx P_b(Y^n, \zeta, \gamma) + Y_b^n,$$

где

$$l_{kK}(\hat{\zeta}) = \frac{J_k(\hat{\zeta})}{\mathfrak{D}_K(\hat{\zeta})}, \quad J_k(\hat{\zeta}) = \frac{\omega_k}{\hat{\zeta} - \hat{\zeta}_k}, \quad \mathfrak{D}_K(\hat{\zeta}) = \sum_{k=1}^K J_k(\hat{\zeta}),$$

$\omega_k = (-1)^{k-1} \sin \frac{2k-1}{2K} \pi$ – веса барицентрической интерполяции с узлами $\hat{\zeta}_k$, см. [24];

$$D_{mM}(\gamma) = \frac{2}{2M-1} \frac{\sin[(M-0.5)(\gamma - \gamma_m)]}{2 \sin((\gamma - \gamma_m)/2)},$$

$$l_{kK}^b(\hat{\zeta}) = \begin{cases} \frac{(1 - \hat{\zeta})(1 + \hat{\zeta})^2}{(1 - \hat{\zeta}_k)(1 + \hat{\zeta}_k)^2} l_{kK}(\hat{\zeta}), & k = \overline{1, K}, \\ \frac{\hat{\zeta} - 1}{4\mathfrak{D}_K(\hat{\zeta})} \sum_{j=1}^K \mathcal{Z}_j(\hat{\zeta}), & k = 0, \end{cases}$$

где $\mathcal{Z}_j(\hat{\zeta}) = \omega_j \frac{\hat{\zeta}_j(\hat{\zeta} + 3) + 3\hat{\zeta} + 5}{(1 + \hat{\zeta}_j)^2}$; l_{kK} , l_{kK}^b , D_{mM} играют роль фундаментальных многочленов интерполяции; $D_{mM}(\gamma) = \frac{2}{2M-1} D_M(\gamma - \gamma_m)$,

D_M – ядро Дирихле; модифицированный многочлен $l_{kK}^b(\hat{\zeta})$ в формуле (17) обеспечивает автоматическое выполнение граничных условий (11). В рамках этой работы в условиях (12) будем полагать величину Y_b независимой от γ : $Y_b(t_n, \gamma) \equiv Y_b^n$. Для выполнения этих условий на каждом шаге по времени в выражении (17) для функции $Y^n(\zeta, \gamma)$ присутствует постоянная Y_b^n . Далее для краткости опустим эту постоянную.

Для аппроксимации уравнений (6)–(9), записанных в эллиптической системе координат, далее будет использован метод коллокаций с узлами (ζ_k, γ_m) , поэтому нам потребуются значения производных интерполяций (16), (17) в этих узлах. Дифференцируя функцию $P(\alpha_{ij}^n, \zeta, \gamma)$ по ζ , переходя к пределу при $\zeta \rightarrow \zeta_l$, $\gamma \rightarrow \gamma_q$, $l = \overline{1, K}$, $q = \overline{1, M}$, используя свойство фундаментальных многочленов: $l_{kK}(\hat{\zeta}_l) = \delta_{kl}$, $D_{mM}(\gamma_q) = \delta_{mq}$ (δ_{mq} – символ Кронекера) и правило Лопиталья, находим

$$\frac{\partial \alpha_{ij}^n}{\partial \zeta}(\zeta_l, \gamma_q) \approx \lim_{(\zeta, \gamma) \rightarrow (\zeta_l, \gamma_q)} \frac{\partial P(\alpha_{ij}^n, \zeta, \gamma)}{\partial \zeta} = \sum_{k=1, k \neq l}^K \xi_{lk}(\alpha_{ij}^n)_{kq} + \nu_l(\alpha_{ij}^n)_{lq},$$

где

$$\xi_{lk} = \frac{\omega_k}{\omega_l(\hat{\zeta}_l - \hat{\zeta}_k)}, \quad \nu_l = - \sum_{s=1, s \neq l}^K \xi_{ls}, \quad l, k = \overline{1, K}, \quad l \neq k.$$

Дифференцируя интерполяцию $P_b(u^n, \zeta, \gamma)$ по ζ один и два раза, по аналогии получаем

$$\frac{\partial u^n}{\partial \zeta}(\zeta_l, \gamma_q) \approx \sum_{k=0, k \neq l}^K \eta_{lk} u_{kq}^n + \mu_l u_{lq}^n, \quad \frac{\partial^2 u^n}{\partial \zeta^2}(\zeta_l, \gamma_q) \approx \sum_{k=0, k \neq l}^K \chi_{lk} u_{kq}^n + \kappa_l u_{lq}^n,$$

где

$$\eta_{lk} = \begin{cases} \frac{(1 - \hat{\zeta}_l^2)(1 + \hat{\zeta}_l)}{(1 - \hat{\zeta}_k^2)(1 + \hat{\zeta}_k)} \xi_{lk}, & l \neq k; \quad l, k = \overline{1, K}, \\ \frac{\hat{\zeta}_l - 1}{4\omega_l} \sum_{j=1}^K \mathcal{Z}_j(\hat{\zeta}_l), & k = 0; \quad l = \overline{1, K}, \\ 0, & l = 0; \quad k = \overline{1, K}, \end{cases}$$

$$\mu_l = \frac{1 - 3\hat{\zeta}_l}{1 - \hat{\zeta}_l^2} - s_l, \quad s_l = \sum_{j=1, j \neq l}^K \xi_{lj} \quad \text{при } l = \overline{1, K}, \quad \mu_0 = 0,$$

$$\chi_{lk} = \begin{cases} \frac{2(1 - 3\hat{\zeta}_l)(1 + \hat{\zeta}_l)}{(1 - \hat{\zeta}_k^2)(1 + \hat{\zeta}_k)} \xi_{lk} + \frac{(1 - \hat{\zeta}_l^2)(1 + \hat{\zeta}_l)}{(1 - \hat{\zeta}_k^2)(1 + \hat{\zeta}_k)} \gamma_{lk}, & l \neq k; \quad l, k = \overline{1, K}, \\ \frac{1}{2\omega_l} \sum_{j=1}^K \left(\omega_j \frac{2\hat{\zeta}_j(\hat{\zeta}_l + 1) + 6\hat{\zeta}_l + 2}{(1 + \hat{\zeta}_j)^2} - s_l(\hat{\zeta}_l - 1) \mathcal{Z}_j(\hat{\zeta}_l) \right), & k = 0; \quad l = \overline{1, K}, \\ \frac{-4\omega_k}{(1 - \hat{\zeta}_k^2)(1 + \hat{\zeta}_k)^2 \sigma_1}, & l = 0; \quad k = \overline{1, K}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\kappa_l &= -2 \frac{3\hat{\zeta}_l + 1}{(1 - \hat{\zeta}_l^2)(1 + \hat{\zeta}_l)} - 2 \frac{1 - 3\hat{\zeta}_l}{1 - \hat{\zeta}_l^2} s_l - \sum_{j=1, j \neq l}^K \gamma_{lj} \text{ при } l = \overline{1, K}, \\ \kappa_0 &= \sum_{j=1}^K \frac{\omega_j}{\sigma_1(1 + \hat{\zeta}_j)^2} \left(\frac{\hat{\zeta}_j + 3}{2} + \frac{2(1 + \hat{\zeta}_j)\sigma_3}{\sigma_1} - \frac{2\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{2(1 + \hat{\zeta}_j)\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \right), \\ \gamma_{lk} &= -2\xi_{lk} \left[s_l + \frac{1}{\hat{\zeta}_l - \hat{\zeta}_k} \right], \quad \sigma_i = (-1)^i \sum_{j=1}^K \frac{\omega_j}{(1 + \hat{\zeta}_j)^i}, \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Дифференцируя интерполяции $P(\alpha_{ij}^n, \zeta, \gamma)$ и $P_b(u^n, \zeta, \gamma)$ по γ , находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_{ij}^n}{\partial \gamma}(\zeta_l, \gamma_q) &\approx \sum_{m=1, m \neq q}^M \tilde{\xi}_{qm} (\alpha_{ij})_{lm}^n + \tilde{\nu}_q (\alpha_{ij})_{lq}^n, \\ \frac{\partial u^n}{\partial \gamma}(\zeta_l, \gamma_q) &\approx \sum_{m=1, m \neq q}^M \tilde{\xi}_{qm} u_{lm}^n + \tilde{\nu}_q u_{lq}^n, \quad \frac{\partial^2 u^n}{\partial \gamma^2}(\zeta_l, \gamma_q) \approx \sum_{m=1, m \neq q}^M \tilde{\chi}_{qm} u_{lm}^n + \tilde{\kappa}_q u_{lq}^n,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_{qm} &= \frac{(-1)^{q-m}}{2} \left(\sin \frac{\pi(q-m)}{\mathcal{M}} \right)^{-1}, \quad \tilde{\nu}_q = 0, \quad m, q = \overline{1, \mathcal{M}}, \quad q \neq m; \\ \tilde{\chi}_{qm} &= \frac{(-1)^{q-m+1}}{2} \cos \frac{\pi(q-m)}{\mathcal{M}} \left(\sin \frac{\pi(q-m)}{\mathcal{M}} \right)^{-2}, \quad \tilde{\kappa}_q \equiv -\frac{M(M-1)}{3}.\end{aligned}$$

Обозначим $\mathcal{K} = K + 1$,

$$\begin{aligned}\Lambda_{ij}^n, (\Lambda_{ij}^n)_\zeta &- \mathcal{K} \times \mathcal{M}\text{-матрицы с элементами } \alpha_{ij}^n(\zeta_k, \gamma_m) \text{ и } \frac{\partial \alpha_{ij}^n}{\partial \zeta}(\zeta_k, \gamma_m); \\ U^n, U_\zeta^n, U_{\zeta\zeta}^n &- \mathcal{K} \times \mathcal{M}\text{-матрицы с элементами } u^n(\zeta_k, \gamma_m), \frac{\partial u^n}{\partial \zeta}(\zeta_k, \gamma_m), \\ \frac{\partial^2 u^n}{\partial \zeta^2}(\zeta_k, \gamma_m); \\ \Upsilon^n, \Upsilon_\zeta^n, \Upsilon_{\zeta\zeta}^n &- \mathcal{K} \times \mathcal{M}\text{-матрицы с элементами } Y^n(\zeta_k, \gamma_m), \frac{\partial Y^n}{\partial \zeta}(\zeta_k, \gamma_m), \\ \frac{\partial^2 Y^n}{\partial \zeta^2}(\zeta_k, \gamma_m).\end{aligned}$$

Сформируем $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ матрицы

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \xi_{01} & \dots & \xi_{0K} \\ 0 & \nu_1 & \dots & \xi_{1K} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \xi_{K1} & \dots & \nu_K \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \mu_0 & \eta_{01} & \dots & \eta_{0K} \\ \eta_{10} & \mu_1 & \dots & \eta_{1K} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \eta_{K0} & \eta_{K1} & \dots & \mu_K \end{pmatrix}, \\ A_2 &= \begin{pmatrix} \kappa_0 & \chi_{01} & \dots & \chi_{0K} \\ \chi_{10} & \kappa_1 & \dots & \chi_{1K} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \chi_{K0} & \chi_{K1} & \dots & \kappa_K \end{pmatrix},\end{aligned}$$

где $\xi_{0k} = \frac{-\omega_k}{[\mathfrak{D}_K(-1)(1 + \hat{\zeta}_k)]^2} \sum_{j=1}^K \frac{\omega_j(\hat{\zeta}_j - \hat{\zeta}_k)}{(1 + \hat{\zeta}_j)^2}$, $k = \overline{1, K}$. Для аппроксимации производных по ζ в уравнениях (6)–(9), записанных в эллиптической системе координат, имеем формулы

$$(\Lambda_{ij}^n)_\zeta \approx A_1 \Lambda_{ij}^n, \quad U_\zeta^n \approx A_1 U^n, \quad U_{\zeta\zeta}^n \approx A_2 U^n. \quad (18)$$

Сформируем $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ -матрицы

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 & \tilde{\xi}_{12} & \dots & \tilde{\xi}_{1\mathcal{M}} \\ \tilde{\xi}_{21} & \tilde{\nu}_2 & \dots & \tilde{\xi}_{2\mathcal{M}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{\xi}_{\mathcal{M}1} & \tilde{\xi}_{\mathcal{M}2} & \dots & \tilde{\nu}_\mathcal{M} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}_1 & \tilde{\chi}_{12} & \dots & \tilde{\chi}_{1\mathcal{M}} \\ \tilde{\chi}_{21} & \tilde{\kappa}_2 & \dots & \tilde{\chi}_{2\mathcal{M}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{\chi}_{\mathcal{M}1} & \tilde{\chi}_{\mathcal{M}2} & \dots & \tilde{\kappa}_\mathcal{M} \end{pmatrix}.$$

Для аппроксимации производных по γ в уравнениях (6)–(9), записанных в эллиптической системе координат, имеем формулы

$$(\Lambda_{ij}^n)_\gamma \approx \Lambda_{ij}^n \mathcal{B}_1^T, \quad U_\gamma^n \approx U^n \mathcal{B}_1^T, \quad U_{\gamma\gamma}^n \approx U^n \mathcal{B}_2^T, \quad (\Lambda_{ij}^n)_{\zeta\gamma} \approx A_1 \Lambda_{ij}^n \mathcal{B}_1^T, \quad (19)$$

$$U_{\zeta\gamma}^n \approx A_1 U^n \mathcal{B}_1^T.$$

Здесь $\mathcal{K} \times \mathcal{M}$ -матрицы $(\Lambda_{ij}^n)_\gamma$, U_γ^n , $U_{\gamma\gamma}^n$, $(\Lambda_{ij}^n)_{\zeta\gamma}$, $U_{\zeta\gamma}^n$ определяются аналогично $(\Lambda_{ij}^n)_\zeta$, U_ζ^n .

Приближения производных функции $Y^n(\zeta, \gamma)$, включающие выражения для матриц Υ^n , Υ_ζ^n , $\Upsilon_{\zeta\zeta}^n$, Υ_γ^n , $\Upsilon_{\gamma\gamma}^n$ и $\Upsilon_{\zeta\gamma}^n$, строятся полностью аналогично приближению производных функции $u^n(\zeta, \gamma)$.

Далее для построения алгоритмов воспользуемся спектральным разложением матриц \mathcal{A}_2 , \mathcal{B}_2 , аппроксимирующих вторые производные:

$$\mathcal{A}_2 = R_A D_A R_A^{-1}, \quad \mathcal{B}_2 = R_B D_B R_B^{-1}, \quad (20)$$

где R_A , R_B – матрицы собственных векторов \mathcal{A}_2 и \mathcal{B}_2 ; D_A , D_B – диагональные матрицы собственных значений \mathcal{A}_2 и \mathcal{B}_2 – d_A^k , d_B^m , $k = \overline{0, K}$, $m = \overline{1, \mathcal{M}}$.

Замечание 1. Используя выражения для величин $\tilde{\chi}_{qm}$, несложно видеть, что матрица \mathcal{B}_2 является симметричной, следовательно матрица R_B является ортогональной, $R_B^{-1} = R_B^T$. Строго говоря, при наличии у матрицы \mathcal{A}_2 комплексно-сопряжённых собственных чисел, матрица D_A является блочно-диагональной, содержащей на диагонали блоки размера 2×2 . Однако, как показали численные эксперименты, выбранный способ приближения исключает такую возможность. Важным обстоятельством является также медленный рост чисел обусловленности матрицы R_A с ростом K , обеспечивающий устойчивость алгоритма к погрешностям округления.

3.2. Решение задачи линейной алгебры. После линеаризации уравнений (6)–(9), записанных в эллиптической системе координат, воспользуемся приближениями, описанными в разделе 3.1 и методом локаций с узлами (ζ_k, γ_m) в области Ω , $k = \overline{0, K}$, $m = \overline{1, \mathcal{M}}$. В результате получатся линейные матричные уравнения для выражения матриц Λ_{ij}^{n+1} ,

$U^{n+1}, \Upsilon^{\widehat{n+1}}$ через матрицы $\Lambda_{ij}^\nu, U^\nu, \Upsilon^\nu, \nu = n, n-1, n-2$. Однако в силу нелинейности и связности уравнений исходной дифференциальной задачи решение этих матричных уравнений в итерациях по времени приводит к достаточно быстрому росту погрешности и расходимости алгоритма. Эта проблема становится особенно критичной при моделировании импульсных воздействий на жидкость с резким изменением градиента давления и температуры стенки канала.

Решением такой проблемы является применение на каждом временном шаге итераций по нелинейности. При этом момент времени $t = t_{n+1}$ и значения решений в предыдущие моменты времени $t = t_n, t_{n-1}, \dots$ фиксируются, а решения в текущий момент времени насчитываются во вложенном цикле. Пусть s – номер шага цикла итераций по нелинейности. Для решений на шаге s введём обозначения $\widehat{\Lambda}_{ij}^s = \Lambda_{ij}^{n+1,s}, \widehat{U}^s = U^{n+1,s}, \widehat{\Upsilon}^s = \Upsilon^{n+1,s}$. Решения $\widehat{\Lambda}_{ij}^s, \widehat{U}^s, \widehat{\Upsilon}^s$ выражаются через $\widehat{\Lambda}_{ij}^{s-1}, \widehat{U}^{s-1}, \widehat{\Upsilon}^{s-1}$ в соответствии с формулами (22)–(24) и начальными условиями $\Lambda_{ij}^{n+1,0} = \Lambda_{ij}^n, U^{n+1,0} = U^n, \Upsilon^{n+1,0} = \Upsilon^n$. При этом итерации по нелинейности останавливаются, если

$$\frac{\|\widehat{\Lambda}_{ij}^s - \widehat{\Lambda}_{ij}^{s-1}\|}{\|\widehat{\Lambda}_{ij}^s\|} \leq \varepsilon_{NI}, \quad \frac{\|\widehat{U}^s - \widehat{U}^{s-1}\|}{\|\widehat{U}^s\|} \leq \varepsilon_{NI}, \quad \frac{\|\widehat{\Upsilon}^s - \widehat{\Upsilon}^{s-1}\|}{\|\widehat{\Upsilon}^s\|} \leq \varepsilon_{NI}, \quad (21)$$

$i, j = 1, 2, 3$, либо по прошествии N_{it}^{\max} итераций, где значения N_{it}^{\max} приведены в табл. 3. В случае остановки номер s обозначим σ и положим $\Lambda_{ij}^{n+1} = \widehat{\Lambda}_{ij}^\sigma, U^{n+1} = \widehat{U}^\sigma, \Upsilon^{n+1} = \widehat{\Upsilon}^\sigma$. Здесь и далее норма обозначает максимальный элемент матрицы, ε_{NI} – положительное малое число (см. табл. 3). При переходе на следующий шаг по времени меняются значения функций $A(t)$ и $A'(t)$, стоящих в правой части (9), либо значения функции $Y_b(t, \gamma)$ в условиях (12).

Запишем для примера уравнение итерационного метода для выражения $\widehat{\Lambda}_{11}^{s+1}$, полученное из первого уравнения (7) после перехода в эллиптическую систему координат, выполнения линеаризации по Ньютону относительно функции $\alpha_{11}(\zeta, \gamma)$ и дискретизации по пространственным переменным:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{11} \cdot \widehat{\Lambda}_{11}^{s+1} &= \left\{ \frac{3}{2\tau} + \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\bar{k}}{3} + 2\beta \right) \widehat{\Lambda}_{11}^s + \frac{\bar{k}}{3} \widehat{\mathcal{I}}^s + \varkappa^2 E_I \right] / \bar{\mathfrak{T}}_0^s \right\} \cdot \widehat{\Lambda}_{11}^{s+1} = \\ &= \frac{4\Lambda_{11}^n - \Lambda_{11}^{n-1}}{2\tau} + 2(\widehat{\Lambda}_{12}^s \cdot \mathcal{R} + \widehat{\Lambda}_{13}^s \cdot \mathcal{Q}) \cdot (\mathcal{A}_1 \widehat{U}^s) + \\ &+ 2(\widehat{\Lambda}_{12}^s \cdot \mathcal{Q} - \widehat{\Lambda}_{13}^s \cdot \mathcal{R}) \cdot (\widehat{U}^s \mathcal{B}_1^T) + \frac{\operatorname{Re} \bar{k}}{3} (\widehat{\Lambda}_{11}^s \cdot \widehat{\Lambda}_{11}^s) / \bar{\mathfrak{T}}_0^s - \beta \operatorname{Re} \widehat{\mathcal{J}}^s / \bar{\mathfrak{T}}_0^s, \\ \widehat{\mathcal{I}}^s &= \widehat{\Lambda}_{11}^s + \widehat{\Lambda}_{22}^s + \widehat{\Lambda}_{33}^s, \quad \widehat{\mathcal{J}}^s = \widehat{\Lambda}_{12}^s \cdot \widehat{\Lambda}_{12}^s + \widehat{\Lambda}_{13}^s \cdot \widehat{\Lambda}_{13}^s - \widehat{\Lambda}_{11}^s \cdot \widehat{\Lambda}_{11}^s. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь точка и дробь означают поэлементное произведение и деление матриц, E_I – матрица размера $\mathcal{K} \times \mathcal{M}$, все элементы которой равны единице, \mathcal{R}, \mathcal{Q} – матрицы размера $\mathcal{K} \times \mathcal{M}$, содержащие значения

функций $R(\zeta, \gamma) = \frac{\sinh \zeta \sin \gamma}{\delta(\sinh^2 \zeta + \cos^2 \gamma)}$, $Q(\zeta, \gamma) = \frac{\cosh \zeta \cos \gamma}{\delta(\sinh^2 \zeta + \cos^2 \gamma)}$ в узлах ζ_k , γ_m соответственно (эти функции возникают при переходе в эллиптическую систему координат), $\overline{\mathfrak{X}}_0^s - \mathcal{K} \times \mathcal{M}$ -матрица со значениями функции $J(Y(t_{n+1}, \zeta, \gamma))/Y(t_{n+1}, \zeta, \gamma)$, насчитанными на шаге s в тех же узлах. Аппроксимации остальных пяти уравнений для функций α_{22} , α_{33} , α_{12} , α_{13} и α_{23} , приведённых в системах (6), (7), записываются аналогично.

Аппроксимации уравнений (8), (9) после перехода в эллиптическую систему координат и выполнения линеаризации относительно функций $u(\zeta, \gamma)$ и $Y(\zeta, \gamma)$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau^2} \widehat{U}^{s+1} - \mathfrak{a}^2 c (\mathcal{A}_2 \widehat{U}^{s+1} + \widehat{U}^{s+1} \mathcal{B}_2^T) = \widehat{\mathcal{F}}_U^s + \frac{\widehat{\mathcal{K}}_I^s}{\overline{\mathfrak{X}}_0^s} \left(\frac{4U^n - U^{n-1}}{2\tau} \right) + \\ + \frac{5U^n - 4U^{n-1} + U^{n-2}}{\tau^2}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{3\text{Pr}}{2\tau} \widehat{\Upsilon}^{s+1} - c (\mathcal{A}_2 \widehat{\Upsilon}^{s+1} + \widehat{\Upsilon}^{s+1} \mathcal{B}_2^T) = \widehat{\mathcal{F}}_Y^s + \text{Pr} \frac{4\Upsilon^n - \Upsilon^{n-1}}{2\tau}, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}}_U^s = \widehat{\Upsilon}^s \cdot [\mathfrak{e}_1 \cdot \mathcal{A}_2 \widehat{U}^s + 2\mathfrak{e}_2 \cdot \mathcal{A}_1 \widehat{U}^s \mathcal{B}_1^T + \mathfrak{e}_3 \cdot \widehat{U}^s \mathcal{B}_2^T + \mathfrak{e}_4 \cdot \mathcal{A}_1 \widehat{U}^s + \mathfrak{e}_5 \cdot \widehat{U}^s \mathcal{B}_1^T] + \\ + \mathfrak{e}_6 \cdot \mathcal{A}_1 \widehat{\Upsilon}^s \cdot \mathcal{A}_1 \widehat{U}^s + \mathfrak{e}_7 \cdot \widehat{\Upsilon}^s \mathcal{B}_1^T \cdot \widehat{U}^s \mathcal{B}_1^T + \mathfrak{e}_2 \cdot (\mathcal{A}_1 \widehat{\Upsilon}^s \cdot \widehat{U}^s \mathcal{B}_1^T + \widehat{\Upsilon}^s \mathcal{B}_1^T \cdot \mathcal{A}_1 \widehat{U}^s) + \\ + (\widehat{\mathcal{K}}_I^s / \overline{\mathfrak{X}}_0^s) \cdot [A(t_n) + \text{Ga}(\widehat{\Upsilon}^s - 1) - \text{Fr}^{-2} - 3U^n/(2\tau)] - \widehat{F}^s + A'(t_n) + \text{Ga} \widehat{\Upsilon}_t^s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}}_Y^s = \left[\frac{1}{g^2} - c \right] (\mathcal{A}_2 \widehat{\Upsilon}^s + \widehat{\Upsilon}^s \mathcal{B}_2^T) + C_d \widehat{\Upsilon}^s \cdot [(\mathcal{R} \cdot \widehat{\Lambda}_{12}^s + \mathcal{Q} \cdot \widehat{\Lambda}_{13}^s) \cdot \mathcal{A}_1 \widehat{U}^s + \\ + (\mathcal{Q} \cdot \widehat{\Lambda}_{12}^s - \mathcal{R} \cdot \widehat{\Lambda}_{13}^s) \cdot \widehat{U}^s \mathcal{B}_1^T], \end{aligned}$$

$\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{e}_7$, \widehat{F}^s – матрицы размера $\mathcal{K} \times \mathcal{M}$, элементы которых имеют достаточно громоздкие выражения, содержащие значения неизвестных функций u , Y , α_{ij} и значения функций R , Q в узлах интерполяции, $\widehat{\Upsilon}_t^s$ – матрица размера $\mathcal{K} \times \mathcal{M}$ со значениями производных функции $Y(t, \zeta, \gamma)$ по времени (для вычисления этих производных использованы формулы (14)); $\widehat{\mathcal{K}}_I^s$ – матрица, содержащая значения функции \widetilde{K}_I^{n+1} . Все значения функций, использованные для вычисления элементов матриц, указанных в этом абзаце, насчитаны на итерации по нелинейности с номером s в момент времени $t = t_{n+1}$. Отметим, что для вычисления производных, стоящих в правых частях уравнений (22)–(24), применяются формулы вида (18), (19), а для выполнения любых других действий реализуются соответствующие поэлементные операции с матрицами. Постоянная $c > 0$ является параметром дискретизации по времени (см. схему из [12]). Для обеспечения сходимости значения c должны быть достаточно большими, см. табл. 3.

Для решения матричного уравнения (22) на каждом шаге s необходимо выполнять деления элементов правой части на элементы матрицы

\mathfrak{M}_{11} . Аналогичные действия выполняются для поиска приближённых значений всех функций α_{ij}^{n+1} на шаге $s + 1$ в узлах коллокации.

Для решения (23) используем спектральные разложения (20) матриц \mathcal{A}_2 , \mathcal{B}_2 , стоящих в левых частях. Умножим (23) на матрицу $R_{\mathcal{A}}^{-1}$ слева и на матрицу $R_{\mathcal{B}}^{-1}$ справа, обозначим $p_\tau = 2/\tau^2$, $\widehat{V}^{s+1} = R_{\mathcal{A}}^{-1}\widehat{U}^{s+1}R_{\mathcal{B}}^{-1}$,

$$\widehat{\mathcal{G}}^s = R_{\mathcal{A}}^{-1} \left[\widehat{\mathcal{F}}_U^s + \frac{\widehat{\mathcal{K}}_I^s}{\widehat{\mathfrak{I}}_0^s} \left(\frac{4U^n - U^{n-1}}{2\tau} \right) + \frac{5U^n - 4U^{n-1} + U^{n-2}}{\tau^2} \right] R_{\mathcal{B}}^{-1}$$

и получим матричное уравнение

$$p_\tau \widehat{V}^{s+1} - c\alpha^2 (D_{\mathcal{A}} \widehat{V}^{s+1} + \widehat{V}^{s+1} D_{\mathcal{B}}) = \widehat{\mathcal{G}}^s,$$

решение которого относительно элементов v_{km}^{s+1} матрицы \widehat{V}^{s+1} даётся элементарными формулами

$$v_{km}^{s+1} = \frac{g_{km}^s}{p_\tau - c\alpha^2 (d_{\mathcal{A}}^k + d_{\mathcal{B}}^m)}, \quad k = \overline{0, K}, \quad m = \overline{1, M},$$

где g_{km}^s – элементы матрицы $\widehat{\mathcal{G}}^s$. В данном случае шаг сетки по времени τ нужно выбирать, исходя из условия $p_\tau \neq c\alpha^2 (d_{\mathcal{A}}^k + d_{\mathcal{B}}^m)$, т. е. $\tau \neq \sqrt{2}/(\alpha \sqrt{c(d_{\mathcal{A}}^k + d_{\mathcal{B}}^m)})$, $\forall k, m$. Зная элементы матрицы \widehat{V}^{s+1} , несложно восстановить значения решения в узлах коллокации: $\widehat{U}^{s+1} = R_{\mathcal{A}} \widehat{V}^{s+1} R_{\mathcal{B}}$.

Аналогичная схема реализуется для поиска \widehat{Y}^{s+1} . Решив последовательно уравнения для $\widehat{\Lambda}_{ij}^{s+1}$, \widehat{U}^{s+1} , \widehat{Y}^{s+1} , переходим на новую итерацию $s + 2$ и так далее, пока не выполняются условия (21). После этого переходим к следующему шагу по времени и снова запускаем цикл итераций по нелинейности. В итоге, при условии сходимости итераций, можем рассчитать решения на любом промежутке времени $t \in [0, t_{\text{end}}]$. Комментарии о высокой эффективности описанного алгоритма решения уравнений на каждом шаге s с точки зрения затрат памяти и числа операций даны в разд. 4.3 работы [12].

4 Результаты расчётов

Для моделирования течения полимерной жидкости в канале с эллиптическим сечением зададим параметры, соответствующие характеристикам технологии термоструйной печати с применением раствора электропроводящего полимера PEDOT:PSS. Воспользуемся данными, найденными в открытой печати и представленными в приложении статьи [18] со ссылками на литературу. Перечень параметров модели приведён в табл. 1, а соответствующие значения безразмерных факторов модели указаны в (25). Отметим, что используя данные из табл. 1, решения, найденные в безразмерной форме в результате вычислений, можно преобразовать к размерному виду.

ТАБЛИЦА 1. Параметры модели

Параметр	Описание	Значение
u_H	Характерная скорость течения	1 м/с
l	Характерная длина (размер сечения канала)	10^{-4} м
r	Безразмерное значение малой полуоси сечения канала, рис. 1	$r = 0.5$
T_0	Характерные значения температуры	293.15 К (20° С)
η_0^*	Начальные значения сдвиговой вязкости раствора PEDOT:PSS	10^{-2} Па·с
τ_0^*	Начальные значения времени релаксации раствора PEDOT:PSS	10^{-5} с
\bar{E}_A	Безразмерная энергия активации	6.14
\hat{D}	Базовое значение безразмерного градиента давления $A(t)$, см. (26)	-1, -10
\hat{Y}	Базовое значение температуры стенки канала $Y_b(t, \gamma)$, см. (28)	1
ρ	Плотность жидкости	1000 кг/м ³
β, k	Феноменологические параметры	$k = 1.2\beta, \beta = 0.1$
C_d	Коэффициент диссипации	1

Отметим, что для расчёта \hat{D} полагалось, что длина канала в 100 раз больше размера сечения l : $h = 100$. В рамках рассматриваемой постановки

$$\text{Re} = 10, \quad W = 0.1, \quad \text{Ra} = 1.06, \quad \text{Pr} = 101.8, \quad \text{Ga} = \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}}, \quad \text{Fr} = 31.9. \quad (25)$$

В численных экспериментах будем запускать расчёт с начальными данными (13) и плавно повышать градиент давления $A(t) = dP(t)$ при $t < t_0$ по закону

$$dP(t) = \hat{D} [1 - \exp(-8 \log 10 (t/t_0)^2)], \quad t < t_0. \quad (26)$$

Множитель “ $-8 \log 10$ ” в аргументе экспоненты обеспечивает близость градиента давления к базовому значению \hat{D} в момент времени $t = t_0$: $\hat{D} - A(t_0) = 10^{-8}$.

При $t > t_0$ смоделируем импульс градиента давления в соответствии с формулой

$$A(t) = dP_I(t) = \hat{D} \left[1 + A_I \exp\left(-\frac{(t-t_I)^2}{2\Delta_I^2}\right) \right], \quad t \geq t_0, \quad (27)$$

либо импульсное изменение температуры стенки канала по формуле

$$Y_b(t, \gamma) = \hat{Y} \left[1 + A_Y \exp\left(-\frac{(t-t_I)^2}{2\Delta_Y^2}\right) \right], \quad t \geq t_0, \quad (28)$$

где $Y_b(t, \gamma)$ – значения температуры на границе канала, см. (12), $t_I > t_0 + \Delta_I$, $t_I > t_0 + \Delta_Y$ в случае действия импульсов давления или температуры соответственно.

Все параметры, присутствующие в (26)–(28), описаны в табл. 2. В столбце «Значение» в скобках указаны размерные величины.

ТАБЛИЦА 2. Безразмерные параметры импульсных воздействий на жидкость (26)–(28)

Параметр	Описание	Значение
t_0	Характеризует время выхода градиента давления на базовое значение \dot{D}	4–10 (0.4–1 мс)
t_I	Момент времени, когда интенсивность импульса максимальна	8–40 (0.8–4 мс)
A_I	Амплитуда импульса градиента давления	$10-10^4$
A_Y	Амплитуда импульса температуры	0.2 – 1.3
Δ_I	Характерная продолжительность импульса градиента давления	0.001–10 (10^{-4} –1 мс)
Δ_Y	Характерная продолжительность импульса температуры на стенке канала	1–30 (0.1–3 мс)

Основные параметры вычислительного процесса с диапазонами их значений приведены в табл. 3.

ТАБЛИЦА 3. Параметры численного метода

Параметр	Описание	Значение
\mathcal{K}, \mathcal{M}	Число узлов сетки вдоль осей ζ и γ	15–41
τ	Шаг сетки по времени	10^{-4} –0.05
ε_S	Погрешность стабилизации течения, см. (29)	10^{-3}
ε_{NI}	Погрешность итераций по нелинейности	10^{-8}
N_{it}^{\max}	Максимальное число итераций по нелинейности	10^3 – 10^4
c	Параметр дискретизации уравнений (23), (24)	80–120
ε	Параметр сгущения для адаптации сетки (15)	0.1

Отметим, что во всех проведённых расчётах шаг сетки по времени удовлетворяет одному из неравенств $\tau < \Delta_I/20$ или $\tau < \Delta_Y/20$.

В численных экспериментах будем наблюдать поток и среднюю температуру жидкости в канале, рассчитанные по формулам

$$\bar{F}(t) = \int_{\Omega} u(t, y, z) d|\Omega|, \quad \bar{T}(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(t, y, z) d|\Omega|,$$

соответственно, где Ω – сечение канала, $|\Omega|$ – его площадь, $d|\Omega|$ – элемент площади сечения. Эти значения получены с применением обобщений формул Clenshaw–Curtis [25] для расчёта интеграла по области $\Omega = \{(\zeta, \gamma) : 0 \leq \zeta \leq Z, 0 \leq \gamma < 2\pi\}$, где для вычисления Z использована формула (11) и данные из табл. 1. Ниже \bar{F} , \bar{T} приведены в размерном виде.

Одной из целей исследования является анализ условий потери устойчивости течения под действием импульсных нагрузок (27), (28). В расчётах с параметрами, заданными в табл. 1, 2, обнаружилось два режима течения: режим, в котором наблюдается разрушение численного решения (как правило, связанное с расходимостью итераций по нелинейности) в некоторой окрестности момента времени $t = t_I$ и режим, в котором после действия импульса решение не разрушается и устанавливается, то есть при некотором $t_S = \bar{N}\tau \gg t_I$ выполняются условия:

$$\frac{\|\Lambda_{ij}^{\bar{N}} - \Lambda_{ij}^{\bar{N}-1}\|}{\tau\|\Lambda_{ij}^{\bar{N}}\|} \leq \varepsilon_S, \quad \frac{\|U^{\bar{N}} - U^{\bar{N}-1}\|}{\tau\|U^{\bar{N}}\|} \leq \varepsilon_S, \quad \frac{\|\Upsilon^{\bar{N}} - \Upsilon^{\bar{N}-1}\|}{\tau\|\Upsilon^{\bar{N}}\|} \leq \varepsilon_S, \quad (29)$$

$i, j = 1, 2, 3$ с малыми значениями ε_S , указанными в табл. 3.

На рис. 2, 3 приведены результаты расчётов при наличии импульса градиента давления (27) с параметрами $t_I = 0.8$ мс, $\Delta_I = 0.0069 - 0.034$ мс, $A_I = 30 - 105$ атм, $\hat{D} = -1$ при фиксированной температуре стенки канала $Y_b(t, \gamma) \equiv 1$. Соотношения A_I и Δ_I для представленных результатов близки к критическим, т. е. незначительное увеличение любого из этих параметров приведёт к расходимости численного решения. Из рис. 2 видно, что увеличение амплитуды импульса градиента давления A_I и уменьшение его продолжительности Δ_I в режиме близком к критическому ведёт к незначительному уменьшению максимального значения $|\bar{F}|$ и более существенному уменьшению максимального значения \bar{T} . Кроме того, как видно из рис. 3, имеется эффект запаздывания от действия импульса, связанный с релаксацией полимерной жидкости: экстремумы графиков на рис. 3 а лежат правее линии $t = t_I$. Запаздывание импульса градиента давления на температуру жидкости ещё более очевидно: в момент времени, когда интенсивность импульса максимальна $t = t_I$ рост температуры \bar{T} практически не заметен, время выхода \bar{T} на максимальные значения примерно на порядок больше, чем время выхода \bar{F} на максимальные значения.

На рис. 4 приведены графики $\bar{F}(t)$ и $\bar{T}(t)$ при импульсном изменении температуры стенки канала (28) в режиме близком к критическому. В этих экспериментах $\hat{D} = -2$, $\hat{Y} = 1$, $t_I = 2$ мс для случая $A_Y = 0.2$, $t_I = 1.8$ мс для $A_Y = 0.6$, $t_I = 1.5$ мс для $A_Y = 1$ и $A_Y = 1.4$. Можно видеть, что эффект запаздывания также имеет место для различных t_I , однако в данном случае характерное время выхода величин \bar{F} и \bar{T} на их максимальные значения совпадает. При этом, прежде чем выйти на стационарные значения, функции $\bar{F}(t)$ и $\bar{T}(t)$ демонстрируют небольшие осцилляции.

На рис. 5, 6 показана динамика распределений температуры и скорости течения полимерной жидкости в канале при импульсном изменении температуры стенки в соответствии с (28). В этом режиме $\hat{D} = -2.5$, $A_Y = 1.2$, $\Delta_Y = 0.8$ и численное решение расходится при $t \approx 3.676$ мс. Видно, что под воздействием импульса температура жидкости внутри

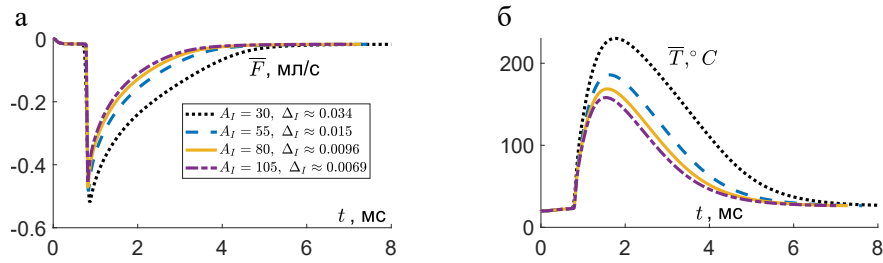


Рис. 2. Зависимость потока жидкости в канале (а) и средней температуры жидкости (б) от времени при наличии импульса градиента давления с параметрами $t_0 = 0.5$ мс, $t_I = 0.8$ мс, $\Delta_I = 0.0069 - 0.034$ мс (безразмерные значения $0.069 - 0.34$), $A_I = 30 - 105$ атм, $\hat{D} = -1$, $\tau = 2.5 \times 10^{-3}$, $\mathcal{K} = 31$, $\mathcal{M} = 21$.

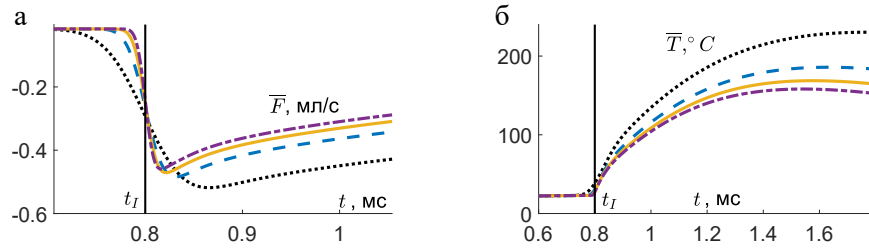


Рис. 3. Графики рис. 2, увеличенные в окрестности точки $t = t_I$.

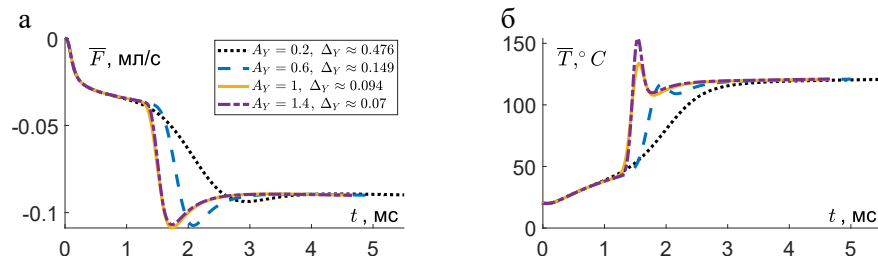


Рис. 4. Зависимость потока жидкости в канале (а) и средней температуры жидкости (б) от времени при наличии импульса температуры стенки канала с параметрами $t_0 = 0.942$ мс, $t_I = 2, 1.8, 1.5$ мс, $\Delta_Y = 0.07 - 0.476$ мс (безразмерные значения $0.7 - 4.76$), $A_Y = 0.2 - 1.4$, $\hat{D} = -2$, $\tau = 2.5 \times 10^{-3}$, $\mathcal{K} = 31$, $\mathcal{M} = 21$.

канала повышается и превышает температуру стенки канала Y_b , вследствие чего уменьшаются вязкость и время релаксации жидкости, и скорость повышается. Далее при уменьшении Y_b до базовых значений \hat{Y} температура жидкости внутри канала остаётся предельно высокой, что

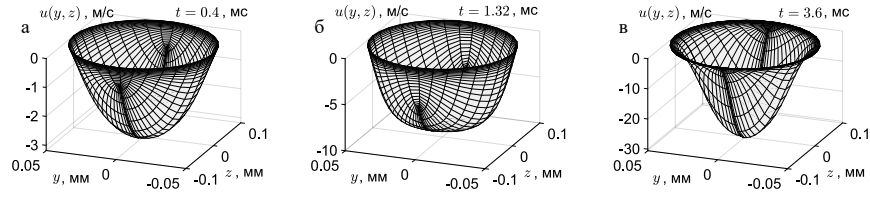


Рис. 5. Распределение скорости жидкости при наличии импульса температуры стенки канала в разные моменты времени t : $t = t_0 = 0.4$ мс (а), после импульса $t = 1.32$ мс (б), перед расходимостью решения $t = 3.6$ мс (в).

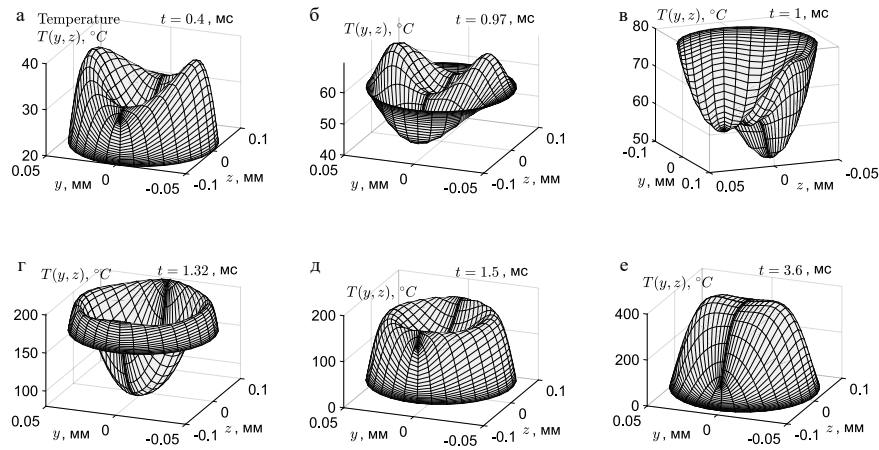


Рис. 6. Распределение температуры жидкости при наличии импульса температуры стенки канала в разные моменты времени t .

приводит к дальнейшему росту скорости в окрестности линии $\zeta = 0$ и к расходимости решения.

Важно отметить, что авторами проведено значительное количество численных экспериментов и установлено, что изменение размера сетки, шага по времени (и даже схемы (14) на известные схемы первого, либо четвёртого порядков) и других численных параметров мало влияет на критические значения Δ_I , Δ_Y , A_I , A_Y . Таким образом, можно утверждать, что разрушение численного решения связано с отсутствием действительных ветвей точных решений исследуемых уравнений. Более строгие рассуждения, проведённые в аналогичном случае для одномерной задачи и основанные на формулах точных решений, изложены в [4].

Отметим, что разрушение решения при воздействии импульса температуры можно наблюдать только тогда, когда значения градиента давления лежат в некоторой окрестности критических величин $|\hat{D}| = \hat{D}_{\text{crit}} \approx 2.1$ атм, т.е. таких значений, при которых решение разрушается без импульсных воздействий.

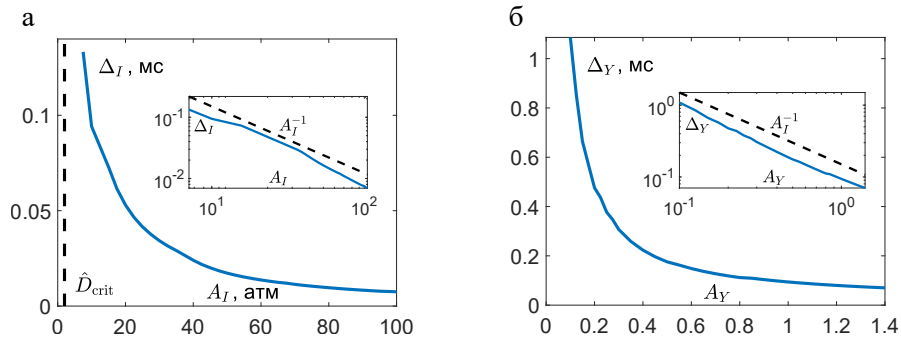


Рис. 7. Критические соотношения амплитуды и продолжительности импульсов давления (а) и температуры (б). На вставках – графики в логарифмическом масштабе.

На рис. 7 при $\hat{D} = -2$ изображены критические соотношения размерных продолжительности и амплитуды импульсов градиента давления и температуры, то есть такие значения, при превышении которых численное решение разрушается, что можно ассоциировать с переходом к сложной непуазейлевской и турбулентной динамике. Как видно из графиков, для реализации пуазейлевского течения при наличии импульсов большей амплитуды требуется сокращать продолжительность импульса и наоборот, для использования продолжительных импульсов – сокращать их амплитуду. На вставках к графикам рис. 7 критические соотношения показаны в логарифмической шкале, откуда видно, что эти соотношения близки к обратной пропорции. Отметим, что значения A_T на рис. 7, б являются довольно малыми по сравнению с A_I на рис. 7, а, однако увеличение A_T выше значений порядка 1.4 приведёт к нефизическим результатам, поскольку в таком случае температура стенки канала превысит 400°C , что близко к температуре спекания или возгорания многих полимерных жидкостей.

5 Заключение

В статье на основе мезоскопического подхода построена модель, описывающая неизотермическое течение пуазейлевского типа несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в канале с эллиптическим сечением. Модель использована для расчёта течений, возникающих в технологиях печати электропроводящим материалом на полимерной основе, при наличии импульсов градиента давления и температуры стенки канала.

С целью численного решения начально-краевой задачи, поставленной для уравнений построенной модели, разработан и реализован вычислительный алгоритм, основанный на полиномиальных и дробно-рациональных интерполяциях и применении конечно-разностной схемы по времени, объединённой с итерациями по нелинейности.

Проведён анализ распределений скорости и температуры жидкости в канале, а также зависимостей потока и средней температуры жидкости от времени. Исследованы условия потери устойчивости пуазейлевских течений под воздействием импульсов градиента давления и температуры. Рассчитаны критические соотношения между амплитудами и продолжительностями импульсов. Эти соотношения близки к обратной пропорции.

В качестве дальнейшего развития модели имеет смысл учесть сжимаемость жидкости и более тонкие реологические эффекты, см. [26].

References

- [1] A. Nourdine, L. Flandin, N. Albérola et al., *Extrusion of a nano-ordered active layer for organic photovoltaic cells*, Sustainable Energy & Fuels, **1**:9 (2017), 2016–2027.
- [2] M. Orrill, S. LeBlanc, *Printed thermoelectric materials and devices: Fabrication techniques, advantages and challenges*, J. Appl. Polym. Sci., **134**:3 (2017), Article ID 44256.
- [3] B.V. Semisalov, *Exact Poiseuil-type solutions for viscoelastic polymer fluid flows through a circular pipe*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **64**:4 (2023), 675–685. Zbl 1541.76008
- [4] B.V. Semisalov, *On a scenario of transition to turbulence for a polymer fluid flow in a circular pipe*, Math. Models Comput. Simul., **16**:2 (2024), 197–207. MR4667399
- [5] L.S. Bryndin, B.V. Semisalov, V.A. Beliaev, V.P. Shapeev, *Numerical analysis of the blow-up of one-dimensional polymer fluid flow with a front*, Comput. Math. Math. Phys., **64**:1 (2024), 151–165. Zbl 7849564
- [6] A.Yu. Altukhov, A.S. Gusev, G.V. Puyshnograï, K.B. Koshelev, *Introduction to the mesoscopic theory of fluidity of polymer systems*, Altai State Pedagogical University press, Barnaul, 2012.
- [7] V.N. Pokrovskii *The mesoscopic theory of polymer dynamics 2nd ed.*, Springer, Berlin, 2010.
- [8] M. Khalid, V. Shankar, G. Subramanian, *Continuous pathway between the elastoinertial and elastic turbulent states in viscoelastic channel flow*, Phys. Rev. Lett., **127** (2021), Article ID 134502.
- [9] B. Chandra, V. Shankar, D. Das, *Onset of transition in the flow of polymer solutions through microtubes*, J. Fluid Mech., **844** (2018), 1052–1083. Zbl 1429.76058
- [10] R. Baltensperger, J.-P. Berrut, B. Noël, *Exponential convergence of a linear rational interpolant between transformed Chebyshev points*, Math. Comput., **68**:277 (1999), 1109–1120. Zbl 0920.65003
- [11] B.V. Semisalov, *Application of rational interpolations for solving boundary-value problems with singularities*, Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model. Program., **15**:4 (2022), 5–19. Zbl 1507.65259
- [12] A.M. Blokhin, B.V. Semisalov, *Finding steady Poiseuille-type flows for incompressible polymeric fluids by the relaxation method*, Comput. Math. Math. Phys. **62**:2 (2022), 302–315. Zbl 1539.76017
- [13] A.M. Blokhin, B.V. Semisalov, *Numerical simulation of a stabilizing Poiseuille-type polymer fluid flow in the channel with elliptical cross-section*, J. Phys.: Conf. Ser., **2099** (2021), Article ID 012014.
- [14] L.G. Loitsyanskii, *Mechanics of liquids and gases*, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto, 1966. MR0197015

- [15] L.I. Sedov, *Mechanics of continuous media. Volume 1*, World Scientific, River Edge, 1997. Zbl 0949.74500
- [16] Shih-I Pai, *Introduction to the theory of compressible flow*, Literary Licensing, LLC, 2013.
- [17] V.N. Pokrovskii, Yu.A. Altukhov, G.V. Pyshnograi, *The mesoscopic approach to the dynamics of polymer melts: Consequences for the constitutive equation*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., **76**:1-3 (1998), 153–181. Zbl 0977.76505
- [18] A.M. Blokhin, B.V. Semisalov, *Simulation of the stationary nonisothermal MHD flows of polymeric fluids in channels with interior heating elements*, J. Appl. Ind. Math., **14**:2 (2020), 222–241. Zbl 1503.76127
- [19] I.E. Golovicheva, S.A. Zinovich, G.V. Pyshnograi, *Effect of the molecular mass on the shear and longitudinal viscosity of linear polymers*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **41**:2 (2000), 347–352. Zbl 0999.74032
- [20] B.V. Semisalov, V.A. Belyaev, L.S. Bryndin, A.G. Gorynin, A.M. Blokhin, S.K. Golushko, V.P. Shapeev, *Verified simulation of the stationary polymer fluid flows in the channel with elliptical cross-section*, Appl. Math. Comput., **430** (2022), Article ID 127294. Zbl 1510.76017
- [21] A.M. Blokhin, B.V. Semisalov, *A stationary flow of an incompressible viscoelastic fluid in a channel with elliptic cross section*, J. Appl. Ind. Math., **9**:1 (2015), 18–26. Zbl 1340.76005
- [22] C. Schneider, W. Werner, *Some new aspects of rational interpolation*, Math. Comput., **47** (1986), 285–299. Zbl 0612.65005
- [23] T.W. Tee, L.N. Trefethen, *A rational spectral collocation method with adaptively transformed Chebyshev grid points*, SIAM J. Sci. Comput., **28**:5 (2006), 1798–1811. Zbl 1123.65105
- [24] H.E. Salzer, *Lagrangian interpolation at the Chebyshev points $x_{n,\nu} = \cos(\nu\pi/n)$, $\nu = O(1)n$; some unnoted advantages*, Computer J., **15** (1972), 156–159. Zbl 0242.65007
- [25] W.M. Gentleman, *Implementing Clenshaw-Curtis quadrature, II: Computing the cosine transformation*, Commun. ACM., **15** (1972), 343–346. Zbl 0234.65024
- [26] A.A. Laas, M.A. Makarova, A.S. Malygina, G.O. Rudakov, G.V. Pyshnograi, *Refining rheological model for description of linear and nonlinear viscoelasticity of polymer systems*, Comput. Continuum Mech., **14**:1 (2021), 12–29.

SEMISALOV BORIS VLADIMIROVICH
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS SB RAS,
PR. KOPTYUGA, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: vibis87@gmail.com

BUGOETS IVAN ANDREEVICH
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS SB RAS,
PR. KOPTYUGA, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: i.bugoets@g.nsu.ru

KUTKIN LEV IL'ICH
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
PIROGOVA STR., 1,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: l.kutkin@g.nsu.ru