



МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ  
ИНФОРМАЦИИ В РАМКАХ ПРИНЦИПА СРЕДНЕГО  
ПОЛЯТ.А. ЗВОНАРЕВА , О.И. КРИВОРОТЬКО *Представлено М.А. ШИШЛЕНИНЫМ*

**Abstract:** The paper formulates and numerically studies the direct and inverse problems for the mean field game model, which describes the process of information dissemination in online social networks taking into account external influences. The mean field game model is reduced to a joint solution of initial-boundary value problems for the Kolmogorov-Fokker-Planck (KFP) and Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equations, as well as the Nash optimality condition. Based on the Sobol global sensitivity analysis, the sensitivity of the function of measuring the user density at fixed times from the start of information dissemination to the control parameters and the initial condition of the KFP problem is shown. An algorithm for numerically solving inverse problems for the KFP and HJB equations that differ in the control function is constructed based on Bayesian optimization. It is shown that the reconstructed initial user density of the network describes the synthetic data of the inverse problem with greater accuracy in the case of fixed control, which is optimal for the exact solution of the inverse problem.

**Keywords:** mean field control, inverse problem, optimization, optimal control.

ZVONAREVA T.A., KRIVOROTKO O.I., MODELING OF THE INFORMATION  
DISSEMINATION IN ONLINE SOCIAL NETWORKS BASED ON MEAN-FIELD APPROACH.

© 2024 ЗВОНАРЕВА Т.А., КРИВОРОТЬКО О.И.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2024-0002 «Обратные некорректные задачи и машинное обучение в биологических, социально-экономических и экологических процессах».

Поступила 27 октября 2024 г., опубликована 14 апреля 2025 г.

## 1 Введение

Социальные сети стали неотъемлемой частью нашей жизни, они способны влиять на различные аспекты общества. Активное развитие в последнее время получила область социальной информатики [1] — междисциплинарная область, в которой предпринимаются попытки использовать большие данные и сложные алгоритмы для решения задач из социальных наук. Но с развитием социальных сетей также возникают различные негативные моменты такие как, например, распространение неподтвержденной информации и доступ к персональным данным. В период распространения эпидемии COVID-19 социальные сети оказывали значительное влияние на общественное отношение (к вакцинации, строгости изоляции и др.), даже появился термин «инфодемия», который обозначает быстрое и широкое распространение как точной, так и неточной информации об эпидемии. Поэтому актуальность управления информацией в онлайн социальных сетях растет.

Процессы распространения информации при некоторых допущениях можно описать в рамках математических моделей. Модель SIR-типа была применена для описания распространения научных идей в 1964 году [2] и основана на обыкновенных дифференциальных уравнениях (ОДУ). В статье рассматривалось множество авторов ( $N = S + I + R$ ), написавших статьи по некоторой дисциплине, где  $S$  — авторы, которые пишут статьи, но не рассматривают конкретную идею,  $I$  — авторы, написавшие статьи с этой идеей,  $R$  — авторы, которые по тем или иным причинам больше не выпускают работы с этой идеей.

Пороговая модель коллективного поведения [3] основана на статистическом моделировании. Автор изучал выбор агента, являющегося свидетелем протеста, «действовать» или «не действовать» и рассматривал изменение доли агентов, присоединившихся к бунту.

Независимая каскадная модель передачи информации из уст в уста [4] может быть рассмотрена как стохастический клеточный автомат. В статье рассматривается множество сетей, где связи между вершинами одной сети — сильные, а связи между узлами из разных сетей — слабые. Процесс протекает в виде дискретных шагов, и на каждом шаге неактивный узел может стать активным с некоторой вероятностью.

Диффузионно-логистическая модель (ДЛМ) распространения информации в онлайн социальных сетях [5] основана на уравнениях в частных производных. Авторы исследовали плотность пользователей, вовлеченных в процесс распространения информации, где под расстоянием понималось минимальное число дружеских связей между источником (пользователем, создавшим информацию) и любым другим пользователем конкретной социальной сети. Было показано [6], что ДЛМ хорошо описывает динамику распространения информации, но не учитывает внешние воздействия (сдерживание распространения информации, продвижение желаемой новости и др.). Поэтому необходимо рассматривать

модели с учетом оптимального управления, которые могут быть описаны в рамках теории среднего поля.

Например, в работе [7] автор исследовал динамику популяций с помощью модели среднего поля, предложил численный метод определения управления, основанный на методе градиентного спуска, и провел несколько численных экспериментов. В работе [8] модель игры среднего поля динамики мнений в социальных сетях приближает большую популяцию сетей (социальных групп), характеризующихся управляемыми, изменяющимися во времени поведением/состоянием/характеристиками. А функционал стоимости формулировался так, чтобы группа корректировала мнение и приближала его к среднему мнению других групп.

Модели среднего поля формулировались также и на основе SIR-моделей. Например, в работе [9] авторы исследуют модель игры среднего поля для управления распространением эпидемий в пространственной области, для предложенной модели предложены быстрые численные алгоритмы. В работе [10] описывается способ применения дифференциальных эпидемиологических моделей среднего поля для прогнозирования распространения COVID-19, а также приведен численный алгоритм решения задачи минимизации функционала стоимости.

При логарифмической функции подражательного поведения агентов и выборе гауссовой плотности начального распределения задача для модели среднего поля может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати [11]. В работе [12] показана сходимость решения вариационной задачи к решению краевой задачи типа Риккати на численном уровне.

В теории игр среднего поля рассматривались также постановки и методы решения обратных задач. Например, в статье [7] рассматривается задача восстановления функции управления градиентным методом. В работе [13] исследовалась задача восстановления компонентов функционала стоимости градиентным методом.

В данной работе в разделе 2 предложена постановка модели среднего поля, основанная на комбинации ДЛМ описания распространения информации в социальных сетях и управления потоком информации. В разделе 3 описана конечно-разностная схема решения задачи среднего поля, заключающаяся в совместном решении уравнений Колмогорова—Фоккера—Планка и Гамильтона—Якоби—Беллмана, начальные условия для которых заданы на разных концах временного интервала. Отличительной особенностью данной работы является анализ глобальной чувствительности модели среднего поля к измерениям интегральной плотности вовлеченных агентов в зависимости от времени (раздел 4). Данный анализ позволил сформулировать обратную задачу для модели среднего поля, заключающуюся в идентификации плотности начального распределения пользователей в социальной сети по измерениям плотности в некоторые последующие моменты времени.

## 2 Модель среднего поля для описания процесса распространения информации

Модели игры среднего поля основаны на предположении, что поведение игроков одинаково и динамика состояния представительного игрока описывается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\begin{cases} dX(t) = b(X(t), u(t), \alpha(t))dt + \sigma(X(t), u(t))dW(t), \\ X(0) = x. \end{cases}$$

Здесь  $X(t) : [1, T] \rightarrow \Omega$  — состояние игрока в момент времени  $t$ ,  $u(t)$  — распределение пользователей в пространстве состояний  $\Omega$  в момент времени  $t$ ,  $\alpha(t)$  — функция управления (стратегия представительного игрока),  $W$  — стандартный винеровский процесс.

Предположение, что игроки рациональны и склонны выбирать стратегию, максимизирующую собственную выгоду, порождает задачу оптимального управления, которая минимизирует функционал стоимости

$$J(\alpha) = E \left[ \int_0^T F(s, X(s), u(s), \alpha(s)) ds + G(X(T), u(T)) \right].$$

Было показано [14], что при постоянной  $\sigma$  распределение агентов  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению Колмогорова—Фоккера—Планка (КФП)

$$\begin{cases} u_t - \frac{\sigma^2}{2} u_{xx} + (u\alpha)_x = 0, & (x, t) \in \Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u_x(x, t) = 0, & x \in \Gamma_\Omega, t \in [0, T]. \end{cases}$$

Для нулевого управления ( $\alpha \equiv 0$ ) и ненулевой правой части  $((1 - u/K_{cap})r(t)u)$  такая модель может описывать процесс распространения информации в онлайн социальных сетях.

**2.1. Постановка начально-краевой задачи для диффузионно-логистической модели.** Для описания распространения информации в онлайн социальных сетях была предложена диффузионно-логистическая модель (ДЛМ) [6, 15]:

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} + \left(1 - \frac{u}{K_{cap}}\right) r(t)u, & x \in [0, 1], t \geq 1, \\ u(x, 1) = \varphi(x), & x \in [0, 1], \\ \beta_1 u_x(0, t) - \beta_2 u(0, t) = 0, u_x(1, t) = 0, & \beta_1, \beta_2 > 0, t \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $u(x, t) \geq 0$  — плотность пользователей, вовлеченных в процесс распространения информации,  $D > 0$  — коэффициент диффузии,  $K_{cap} \geq \max_{(x,t) \in [0,1] \times [1,+\infty)} u(x, t)$  — константа, описывающая максимальную пропускную способность сети, а  $r(t)$  — скорость роста числа активных пользователей. Под  $x \in [0, 1]$  понимается состояние пользователя, где 0

означает, что пользователь вовлечен в процесс распространения информации, а 1 — не вовлечен.

В работах [15, 16, 17] численно исследовалась задача определения начальной функции плотности  $\varphi(x) \geq 0$  по дополнительным данным о плотности пользователей при  $\beta_1 = 1$  и  $\beta_2 = 0$ . Были рассмотрены два вида дополнительных данных о плотности: в различных точках пространства и в различные моменты времени [15, 16], а также интегральные данные в различные моменты времени [17]. Обратная задача была сведена к задаче минимизации целевого функционала и решалась глобальными методами роя частиц [15], оптимизации тензорного произведения [17], локальными градиентными методами [16], методом Нелдера—Мида [15], а также комбинациями глобальных и локальных методов. На основе анализа сингулярных чисел оператора линеаризованной обратной задачи было показано [17], что рассматриваемая обратная задача некорректна, поэтому для построения решения обратной задачи применялись гиперболическая регуляризация и регуляризация А.Н. Тихонова. Было показано, что гиперболическая регуляризация незначительно улучшает решение обратной задачи, а применение регуляризации А.Н. Тихонова позволяет найти устойчивое решение поставленной обратной задачи.

Было показано [6], что ДЛМ хорошо описывает динамику распространения информации, но не учитывает внешние воздействия (сдерживание распространения информации, продвижение желаемой новости и др.). Поэтому мы рассматриваем модель среднего поля, чтобы изучить оптимальное управление процессом.

**2.2. Формулировка задачи управления.** Пусть задача состоит в том, чтобы остановить распространение информации при некотором управлении. Тогда предположение о том, что пользователи рациональны, то есть склонны выбирать стратегию, которая максимизирует выгоду, порождает задачу минимизации функционала стоимости, который отражает затраты пользователей в процессе распространения информации:

$$J(u^\alpha, \alpha) = \int_1^T \int_0^1 \left( d_1 \frac{u^\alpha \alpha^2}{2} + d_2 (x - 1)^2 u^\alpha \right) dx dt. \quad (2)$$

Здесь первое слагаемое — плата пользователя за изменение состояния (люди не склонны быстро менять своё мнение), а второе слагаемое — плата за текущее состояние (чем ближе к 0, то есть чем больше пользователь вовлечен в процесс распространения информации, тем больше плата),  $d_1, d_2 > 0$  — весовые коэффициенты,  $\alpha(x, t) : [0, 1] \times [1, T] \rightarrow \mathbb{R}$  — стратегия пользователей, а плотность пользователей  $u^\alpha(x, t) : [0, 1] \times [1, T] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

удовлетворяет уравнению типа конвекции-диффузии (КФП):

$$\begin{cases} u_t^\alpha + (u^\alpha \alpha)_x + \left( \frac{u^\alpha}{K_{cap}} - 1 \right) r(t) u^\alpha - D u_{xx}^\alpha = 0, \\ u^\alpha(x, 1) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1], \\ \beta_1 u_x^\alpha(0, t) - \beta_2 u_x^\alpha(1, t) = 0, \quad u_x^\alpha(1, t) = 0, \quad \beta_1, \beta_2 > 0, \quad t \in [1, T]. \end{cases} \quad (3)$$

Для  $\alpha \equiv 0$  начально-краевая задача (3) исследована в работе [16] и совпадает с задачей (1).

Задача среднего поля заключается в определении оптимальной стратегии и плотности пользователей социальной сети  $(u^{\alpha^*}, \alpha^*)$ , являющиеся решением задачи минимизации функционала стоимости:

$$(u^{\alpha^*}, \alpha^*) = \arg \min_{u^\alpha, \alpha} J(u^\alpha, \alpha), \quad (4)$$

где  $u^\alpha(x, t)$  удовлетворяет начально-краевой задаче для уравнения типа КФП (3). Значения функции  $\alpha$  соответствуют реакции (положительной либо отрицательной) пользователей на рассматриваемую новость.

**2.3. Вывод модели среднего поля.** Справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** Система с уравнением типа КФП (3) и система с уравнением типа Гамильтона–Якоби–Бельмана (ГЯБ)

$$\begin{cases} v_t + \alpha v_x + \left( 1 - \frac{2u^\alpha}{K_{cap}} \right) r(t) v + D v_{xx} = -d_1 \frac{\alpha^2}{2} - d_2 (x-1)^2, \\ v(x, T) = 0, \quad x \in [0, 1], \\ D v_x(0, t) + \left( \alpha(0, t) - D \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) v(0, t) = 0, \quad v_x(1, t) = 0, \quad t \in [1, T] \end{cases} \quad (5)$$

вместе с условием оптимальности

$$\begin{cases} d_1 \alpha + v_x = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [1, T], \\ \alpha(1, t) = 0, \quad t \in [1, T] \end{cases} \quad (6)$$

дают необходимые условия решения задачи минимизации (4).

*Доказательство.* По аналогии с работой [10] с помощью метода множителей Лагранжа [14] можно определить подозрительную на оптимальность стратегию пользователей  $\alpha^*$ . Для этого уравнение в (3) умножим на произвольную гладкую функцию  $v(x, t) \in C^\infty([0, 1] \times [1, T])$ :

$$L = \int_1^T \int_0^1 \left[ u_t^\alpha + (u^\alpha \alpha)_x + \left( \frac{u^\alpha}{K_{cap}} - 1 \right) r(t) u^\alpha - D u_{xx}^\alpha \right] v \, dx dt = 0. \quad (7)$$

Распишем подробно каждое слагаемое.

Используя формулу интегрирования по частям и начальные условия в (3) и (5), получаем следующее выражение для первого слагаемого:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \int_0^1 \int_1^T u_t^\alpha v \, dt dx = \int_0^1 \left( u^\alpha v \Big|_1^T - \int_1^T u^\alpha v_t \, dt \right) dx \\
 &= \int_0^1 [u^\alpha(x, T)v(x, T) - u^\alpha(x, 1)v(x, 1)] \, dx - \int_0^1 \int_1^T u^\alpha v_t \, dt dx \\
 &= - \int_0^1 \varphi(x)v(x, 1) \, dx - \int_0^1 \int_1^T u^\alpha v_t \, dt dx.
 \end{aligned}$$

Второе слагаемое в (7) после применения интегрирования по частям с учетом граничного условия в (6) имеет вид

$$\begin{aligned}
 L_2 &= \int_1^T \int_0^1 (u^\alpha \alpha)_x v \, dx dt = \int_1^T \left( u^\alpha \alpha v \Big|_0^1 - \int_0^1 u^\alpha \alpha v_x \, dx \right) dt \\
 &= \int_1^T [u^\alpha(1, t)\alpha(1, t)v(1, t) - u^\alpha(0, t)\alpha(0, t)v(0, t)] \, dt - \int_1^T \int_0^1 u^\alpha \alpha v_x \, dx dt \\
 &= - \int_1^T u^\alpha(0, t)\alpha(0, t)v(0, t) \, dt - \int_1^T \int_0^1 u^\alpha \alpha v_x \, dx dt.
 \end{aligned}$$

Третье слагаемое в (7) остается неизменным:

$$L_3 = \int_1^T \int_0^1 \left( \frac{u^\alpha}{K_{cap}} - 1 \right) r(t) u^\alpha v \, dx dt = \int_1^T \int_0^1 \left( \frac{u^\alpha}{K_{cap}} - 1 \right) r(t) v u^\alpha \, dx dt.$$

Четвертое слагаемое в (7) после двукратного применения интегрирования по частям с учетом краевых условий в (3) и правого краевого условия в (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
 L_4 &= -D \int_1^T \int_0^1 u_{xx}^\alpha v \, dx dt = -D \int_1^T \left( u_x^\alpha v \Big|_0^1 - \int_0^1 u_x^\alpha v_x \, dx \right) dt \\
 &= -D \int_1^T [u_x^\alpha(1, t)v(1, t) - u_x^\alpha(0, t)v(0, t)] \, dt + D \int_1^T u^\alpha v_x \Big|_0^1 dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -D \int_1^T \int_0^1 u^\alpha v_{xx} dx dt = D \int_1^T \left[ \frac{\beta_2}{\beta_1} u^\alpha(0, t) v(0, t) - u^\alpha(0, t) v_x(0, t) \right] dt \\
& -D \int_1^T \int_0^1 u^\alpha v_{xx} dx dt.
\end{aligned}$$

Складывая выражения для  $L_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , получим

$$\begin{aligned}
L &= \int_1^T \int_0^1 \left[ v_t + \alpha v_x + \left( 1 - \frac{u}{K_{cap}} \right) r(t) v + D v_{xx} \right] u^\alpha dx dt \\
&+ \int_0^1 \varphi(x) v(x, 1) dx = 0.
\end{aligned}$$

Данное выражение справедливо при условии

$$D v_x(0, t) + \left( \alpha(0, t) - D \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) v(0, t) = 0, \quad t \in [1, T].$$

Теперь функция Лагранжа, соответствующая рассматриваемой задаче минимизации (4), может быть записана в виде

$$\mathcal{L}(u^\alpha, \alpha, v) = J(u^\alpha, \alpha) - L.$$

Вариация  $\mathcal{L}$  по  $u^\alpha$ , то есть  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha}$ , приводит к системе с уравнением типа ГЯБ (5).

А вариация  $\mathcal{L}$  по  $\alpha$ , то есть  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}$ , приводит к условию оптимальности (6), решение которого  $\alpha = \alpha^*$ .  $\square$

Таким образом, решением задачи среднего поля называются функции  $u^\alpha(x, t)$ ,  $v(x, t)$  и  $\alpha(x, t)$ , которые удовлетворяют системам (3) и (5) вместе с (6).

### 3 Численное решение прямой задачи для модели среднего поля

Прямая задача заключается в определении функций  $u^\alpha(x, t)$ ,  $v(x, t)$  и  $\alpha(x, t)$  из уравнений КФП, ГЯБ и условия оптимальности при заданных  $\varphi(x)$ ,  $d_1$  и  $d_2$ .

Модель среднего поля, состоящая из систем (3), (5) и (6), численно решалась с помощью конечно-разностной схемы, предложенной в работах [10, 18, 19, 20]. Значения функций  $u^\alpha$  и  $v$  рассчитывались на равномерных сетках по времени  $t_l = l\tau$ ,  $l = 0, \dots, N_t$ ,  $\tau = (T - 1)/N_t$  и пространству  $x_{j+1/2} = (j + 1/2)h$ ,  $j = -1, \dots, N_x$ ,  $h = 1/N_x$ . Использовалась схема из [10] с порядком аппроксимации  $O(\tau + h^2)$ , где левые



граничные условия приближались следующим образом:

$$u_{l,-1/2}^\alpha = \frac{2\beta_1 - h\beta_2}{2\beta_1 + h\beta_2} u_{l,1/2}, \quad v_{l,-1/2} = \frac{D/h - (D\beta_2/\beta_1 - \alpha_0^l)/2}{D/h + (D\beta_2/\beta_1 - \alpha_0^l)/2} v_{l,1/2}.$$

Значения же функции  $\alpha$ , в отличие от функций  $u^\alpha$  и  $v$ , рассчитывались на равномерной сетке по пространству  $x_j = jh$ ,  $j = 0, \dots, N_x$ ,  $h = 1/N_x$ .

В численных экспериментах полагаем  $T = 24$ ,  $N_x = 30$ ,  $N_t = 1500$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $d_1 = 100$ ,  $d_2 = 1$ . Такие значения  $N_x$ ,  $N_t$ ,  $d_1$  и  $d_2$  выбирались так, чтобы удовлетворять ограничениям метода [10]

$$h^2 \leq 8\tau D \quad \text{и} \quad \tau|\alpha_{i,j}| \leq h/4. \quad (8)$$

Для моделирования прямой задачи (3), (5), (6) функция начальной плотности пользователей  $\varphi(x)$  определялась из вектора  $q^{exact} \in \mathbb{R}^d$  интерполяцией кубическими сплайнами [16]. Значения параметров  $q^{exact} = (5.8, 1.7, 1.9, 1, 0.95, 0.7)$ ,  $d = 6$  эмитируют данные новостного сайта Digg.com, представленные в [6] и на рисунке 1. Согласно [6]  $K_{cap} = 25$ ,  $D = 0.01$  и скорость роста числа вовлеченных пользователей со временем  $r(t)$  имеет вид

$$r(t) = \frac{r_2}{r_1} - e^{-r_1(t-1)} \left( \frac{r_2}{r_1} - r_3 \right), \quad \text{где } r_1 = 1.5, \quad r_2 = 0.375, \quad r_3 = 1.65.$$

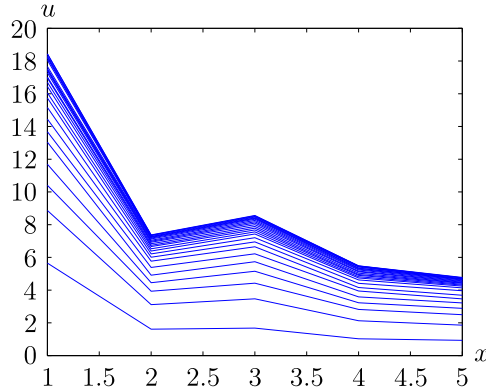


Рис. 1. Данные новостного сайта Digg.com (плотность вовлеченных пользователей за 50 часов) [6].

Алгоритм 1 решения прямой задачи представлен далее.

При численном моделировании полагалось  $\varepsilon = 0.001$ .

**3.1. Модель без управления ( $\alpha = 0$ ).** На рисунке 2 показаны графики (а) плотности вовлеченных пользователей  $u_{l,j}^0$  модели с уравнением типа КФП (3) при  $\alpha = 0$  и (б) абсолютной разности  $|u_{l,j}^0 - u_{l,j}|$ ,  $l = 0, \dots, N_t$ ,  $j = -1/2, \dots, N_x + 1/2$ . Здесь  $u_{l,j}$  — плотность вовлеченных пользователей, удовлетворяющая ДЛМ (1). Абсолютная разность

**Алгоритм 1** решения прямой задачи

**Вход:** Начальная функция плотности пользователей  $\varphi(x)$ , коэффициенты функционала стоимости  $d_1, d_2$ .

- 1: Положить  $\alpha = 0$ .
- 2: Получить  $u^\alpha$ , удовлетворяющую системе (3), и посчитать значение функционала стоимости  $J_0 = J(u^\alpha, \alpha)$ .
- 3: **Пока**  $|J_n - J_{n-1}| > \varepsilon$  **выполнять**
- 4:   Вычислить  $v$ , удовлетворяющую системе (5).
- 5:   Получить новое управление  $\alpha$ , удовлетворяющее системе (6).
- 6:   Получить новую функцию плотности  $u^\alpha$ , удовлетворяющую системе (3).
- 7:   Вычислить новое значение функционала стоимости  $J_n = J(u^\alpha, \alpha)$ .
- 8: **Конец цикла**

не превосходит 0.0017, что обусловлено различием в конечно-разностном подходе к решению задач, и является допустимой в приведенных численных экспериментах.

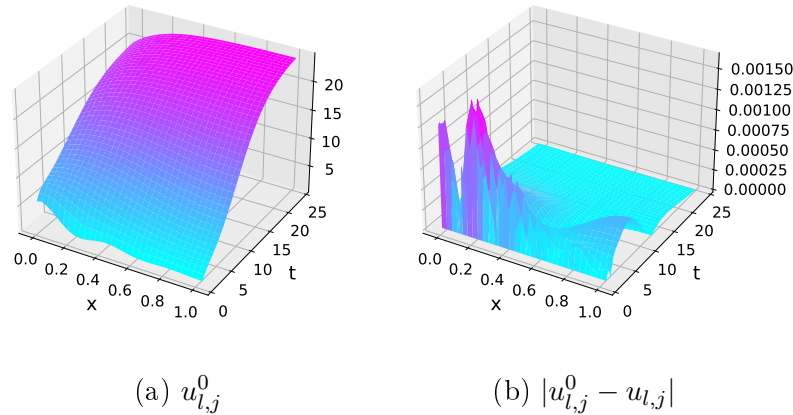


Рис. 2. Графики (a) распределения пользователей по степени вовлеченности  $u_{l,j}^0$  модели с уравнением типа КФП (3) при  $\alpha = 0$  и (b) абсолютной разности  $|u_{l,j}^0 - u_{l,j}|$ ,  $l = 0, \dots, N_t, j = -1/2, \dots, N_x + 1/2$ .

**3.2. Модель с управлением ( $\alpha \neq 0$ ).** На рисунке 3 представлены графики (a) плотности вовлеченных пользователей  $u_{l,j}^\alpha$  модели с уравнением типа КФП (3), (b) функции стоимости  $v_{l,j}$  модели с уравнением типа ГЯБ (5) и (c) функции управления  $\alpha_{l,j}$ , удовлетворяющей условию

оптимальности (6). Целью было остановить распространение информации, то есть минимизировать плотность вовлеченных пользователей при  $x = 0$ . Можно видеть, что при найденной функции управления  $\alpha$  цель достигается почти для всех  $t$ . Здесь значения функции  $\alpha$  соответствуют реакции пользователей на новость, то есть в нулевой момент времени пользователи активно реагируют (положительно либо отрицательно), и с течением времени эта реакция затухает.

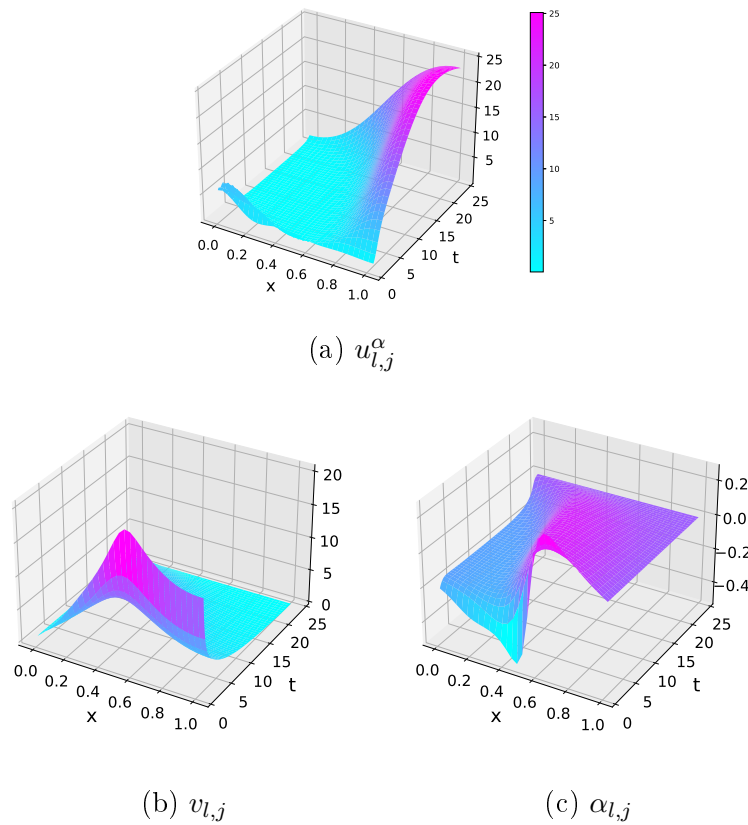


Рис. 3. Графики (а) распределения пользователей по степени вовлеченности  $u_{l,j}^\alpha$  модели с уравнением типа КФП (3), (б) функции стоимости  $v_{l,j}$  модели с уравнением типа ГЯБ (5),  $l = 0, \dots, N_t$ ,  $j = -1/2, \dots, N_x + 1/2$  и (с) функции управления  $\alpha_{l,j}$ , удовлетворяющей условию оптимальности (6),  $l = 0, \dots, N_t$ ,  $j = 0, \dots, N_x$ .

Задание начальных и граничных условий влияет на распределение плотности вовлеченных пользователей, функции стоимости и функции управления. Для допустимых функций начальных данных разработан

алгоритм, на основе которого устойчиво решается система уравнений среднего поля.

#### 4 Обратные задачи

Начальное распределение пользователей в сети при появлении информации зачастую не известно. Возникает необходимость в решении обратной задачи, которая заключается в восстановлении набора параметров  $q = (q_0, q_1, \dots, q_{d-1})$ , характеризующего начальную функцию плотности  $\varphi(x)$ , из уравнений (3), (5), (6) по дополнительной информации  $f$  о плотности вовлеченных пользователей в различные моменты времени следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{N_1} u^\alpha(x_i, t_k; q) = f_k^\alpha, \quad k = 1, \dots, N_2. \quad (9)$$

Здесь  $N_1$  — число измерений по пространству,  $N_2$  — число измерений по времени,  $\varphi(x_m) = q_{m-1}$ ,  $m = 1, \dots, d$ ,  $d$  — число параметров. Другими словами, начальная функция плотности  $\varphi(x_m)$  аппроксимируется набором точек  $q_{m-1}$ ,  $m = 1, \dots, d$ .

Полагаем  $u^\alpha(x, t; q), u^{\alpha^*}(x, t; q) \in L^2([0, 1] \times [1, T])$ . Здесь  $u^\alpha(x, t; q)$  — решение уравнения КФП (3) для заданного  $q$ , при котором  $\alpha(x, t)$  удовлетворяет условию оптимальности (6), то есть пара  $(u^\alpha, \alpha)$  является решением задачи среднего поля (4). Функция  $u^{\alpha^*}(x, t; q)$  является решением уравнения КФП (3) для заданного  $q$ , где  $\alpha^*(x, t)$  удовлетворяет условию оптимальности при  $q^{exact}$ , то есть управление  $\alpha^*$  оптимально при  $q = q^{exact}$ . Запишем функционал типа «невязки»:

$$IP(q; u^\alpha) = \gamma \sum_{k=1}^{N_2} \left| \sum_{i=1}^{N_1} u^\alpha(x_i, t_k; q) - f_k^\alpha \right|^2, \quad (10)$$

где  $\gamma = (T - 1)/N_2$ .

Обратная задача 1 состоит в минимизации функционала (10) по пространству параметров  $q \in (\mathbb{R}_0^+)^d$ , то есть

$$\hat{q}^{(1)} = \arg \min_{q \in (\mathbb{R}_0^+)^d} IP(q; u^\alpha).$$

Здесь для каждой аппроксимации решения  $q^n$ ,  $n$  — номер итерации алгоритма, обратной задачи определяется оптимальное управление  $\alpha(x, t)$ .

Обратная задача 2 состоит в минимизации функционала (10) по пространству параметров  $q \in (\mathbb{R}_0^+)^d$  при фиксированном управлении  $\alpha^*(x, t)$ , то есть

$$\hat{q}^{(2)} = \arg \min_{q \in (\mathbb{R}_0^+)^d} IP(q; u^{\alpha^*}).$$

Здесь  $\alpha^*(x, t)$  является оптимальным для  $q = q^{exact}$  и фиксировано для каждой аппроксимации решения  $q^n$  обратной задачи.

Было показано [21], что в случае  $\alpha = 0$  (без управления) решение обратной задачи минимизации функционала (10) неустойчиво.

Работа была выполнена с использованием ресурсов ЦКП Сибирский Суперкомпьютерный Центр ИВМиМГ СО РАН. Вычисления проводились на вычислительном узле с двумя процессорами Intel Xeon Gold 6248R, количество ядер в каждом процессоре — 24, частота — 3 Гц, 384 Гб оперативной памяти.

**4.1. Анализ чувствительности.** Анализ чувствительности позволяет определять степень влияния параметров модели на результаты моделирования. Для определения чувствительности моделей (1) и (3) мы используем метод, основанный на глобальном анализе дисперсии модели [22]. В основе этого метода лежит рассмотрение полных индексов чувствительности Соболя  $S_m$ , которые отражают полный вклад параметра  $p_m$  в дисперсию данных  $f$  (выхода модели):

$$S_m = \frac{E_{P_{\sim m}}(V_{p_m}(f|P_{\sim m}))}{V(f)}.$$

Здесь  $P_{\sim m}$  — сгенерированная матрица неизвестных параметров без  $p_m$ , математическое ожидания  $E_{P_{\sim m}}$  берется по всем возможным значениям  $P_{\sim m}$ , а дисперсия  $V_{p_m}(f|P_{\sim m})$  берется по всем возможным значениям параметра  $p_m$  при фиксированной  $P_{\sim m}$ .

Считается, что при  $S_m \in (0.5, 1)$  измерения можно считать чувствительными к исследуемому параметру [22].

В численной реализации используется библиотека SALib на языке программирования Python (<https://github.com/SALib/SALib>).

При решении прямой задачи (3), (5), (6) важным вопросом является выбор коэффициентов  $d_1, d_2$  функционала стоимости (2) так, чтобы управление  $\alpha$  удовлетворяло ограничениям метода (8) [10] и влияло на плотность пользователей. Поэтому была рассмотрена чувствительность данных вида  $f(t) = \int_0^1 u^\alpha(x, t) dx$  к коэффициентам  $d_1 \in [99, 412]$  и  $d_2 \in [0.42, 1.75]$  (см. рисунок 4). Для этого были сгенерированы 768 наборов параметров  $(d_1, d_2)$  методом Latin Hypercube [23]. Выход значений параметров за приведенные границы приводит к необходимости измельчения временной сетки для удовлетворения ограничениям метода [10]. Можно видеть, что система (3) более чувствительна к коэффициенту  $d_2$  во все моменты времени. Отметим, что значение коэффициента чувствительности Соболя второго порядка не превосходит 0.4, то есть параметры  $d_1$  и  $d_2$  можно считать независимыми.

В случае обратной задачи (3), (5), (6), (9) рассматривается чувствительность данных вида  $f(t) = \int_0^1 \hat{u}(x, t) dx$  к набору параметров  $q$  при  $\hat{u}(x, t) = u(x, t)$  для ДЛМ и  $\hat{u}(x, t) = u^\alpha(x, t)$  для КФП. Для этого были сгенерированы 1792 набора параметров  $q$ . На рисунке 5 представлены

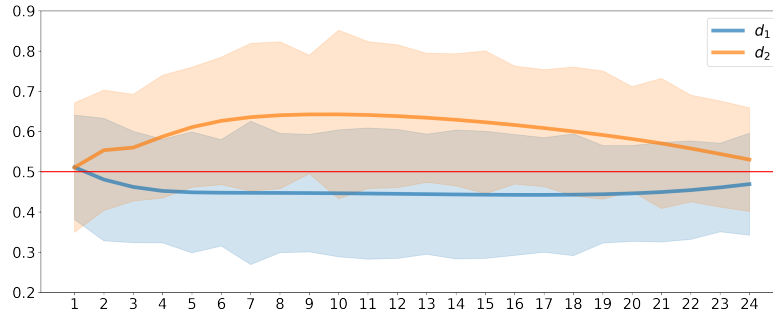


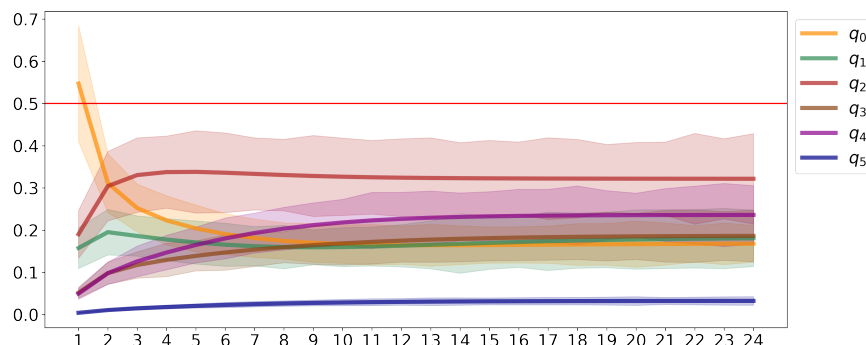
Рис. 4. Графики значений глобальных индексов чувствительности  $S_m$ ,  $m = 1, 2$  для коэффициентов  $d_1$  и  $d_2$  функционала стоимости (2) для  $t = 1, \dots, 24$ . Полупрозрачные полосы — 95% доверительные интервалы.

графики значений глобальных индексов чувствительности Соболя для неизвестных параметров  $q$ ,  $q_i \in [q_i^{exact} \cdot 0.3, q_i^{exact} \cdot 3.5]$  моделей (а) (1) и (б) (3) для  $t = 1, \dots, 24$ . Ранее было показано [21], что ДЛМ не чувствительна к параметрам  $q$  при  $t > 1$ , при этом рисунок 5(а) демонстрирует, что модель чувствительна к параметру  $q_0$  при  $t = 1$ . А для модели КФП (рисунок 5(б)) результаты показывают чувствительность к параметру  $q_0$  в момент времени  $t = 1$  и чувствительность к  $q_2$  во все остальные времена, то есть модель чувствительна к вовлеченным пользователям. Также можно видеть, что чувствительность к параметрам  $q_3$  и  $q_4$  растет с течением времени, и модель становится чувствительна к  $q_3$  при  $t \in [13, 24]$  и к  $q_4$  при  $t = 19, 20, 22-24$ . Отметим, что значения коэффициентов чувствительности Соболя второго порядка не превосходят 0.4, то есть параметры можно считать независимыми.

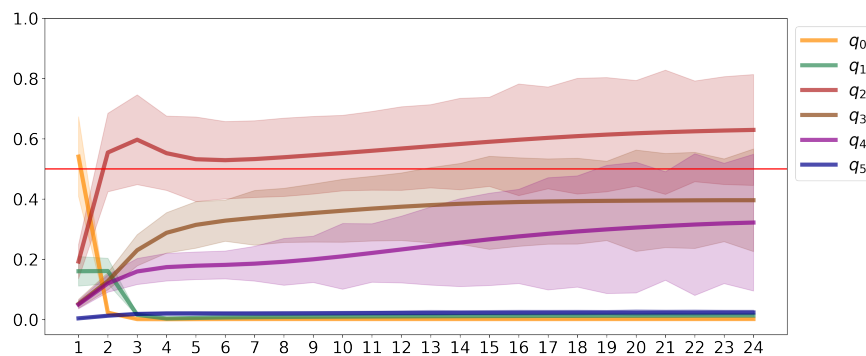
Таким образом, чувствительность начальных условий для модели среднего поля выше, чем для ДЛМ без введения управления.

**4.2. Алгоритмы решения обратных задач.** Обратные задачи 1 и 2 состоят в восстановлении вектора параметров  $q \in (\mathbb{R}_0^+)^d$ , характеризующего начальную функцию плотности  $\varphi(x)$  системы (3), по дополнительной информации  $f_k$ ,  $k = 1, \dots, N_2$  (9). И затем задачи сводятся к задачам минимизации квадратичных функционалов вида (10), решение которых обозначим  $\hat{q}^{(1)}$  и  $\hat{q}^{(2)}$  соответственно.

Для минимизации такого функционала при  $\alpha = 0$  применялись методы стохастической глобальной оптимизации роя частиц [15], градиентные методы [16], метод глобальной оптимизации тензорного поезда [17] и их комбинации. И для решения задачи минимизации функционала (10) при  $\alpha \neq 0$  также можно применять указанные методы. Алгоритмы 2 и 3



(a) ДЛМ



(b) КФП

Рис. 5. Графики значений глобальных индексов чувствительности для неизвестных параметров  $q$  моделей (a) (1) и (b) (3) для  $t = 1, \dots, 24$ . Полупрозрачные полосы — 95% доверительные интервалы.

решения обратных задач для модели среднего поля показывают шаги в общем случае.

---

**Алгоритм 2** решения обратной задачи 1

---

**Вход:** Данные обратной задачи  $f_k^\alpha$ , коэффициенты функционала стоимости  $d_1, d_2$ .

- 1: Получить некоторое приближение  $q^n$  с помощью выбранного метода.
  - 2: Для найденного  $q^n$  решить прямую задачу (3), (5), (6) и определить  $u^{\alpha^*}, \alpha^*$ .
  - 3: Подставить  $u^{\alpha^*}$  в функционал  $IP$  (10).
-

---

**Алгоритм 3** решения обратной задачи 2
 

---

**Вход:** Данные обратной задачи  $f_k^\alpha$ , точные значения параметров  $q^{exact}$  и функция оптимального управления  $\alpha^*(x, t)$ .

- 1: Получить некоторое приближение  $q^n$  с помощью выбранного метода.
  - 2: Для найденного  $q^n$  решить систему (3) и определить  $u^{\alpha^*}$ .
  - 3: Подставить  $u^{\alpha^*}$  в функционал  $IP$  (10).
- 

**4.3. Численное решение обратных задач.** В качестве синтетических данных  $f_k^\alpha$  были взяты значения функции плотности  $u^\alpha(x, t)$  прямой задачи (3), (5), (6) в точках  $x = 0, 0.2 \dots, 1$  и  $t = 3, \dots, 24$ , то есть  $N_1 = 6$  и  $N_2 = 22$ . Необходимо восстановить  $q \in (\mathbb{R}_0^+)^d$ ,  $d = 6$  параметров.

Относительная ошибка решения обратной задачи вычислялась по формуле

$$err^{(l)} = \sum_{j=1}^d \frac{|q_j^{exact} - \hat{q}_j^{(l)}|}{q_j^{exact}}.$$

Здесь  $l = 1, 2$ ,  $\hat{q}^{(l)}$  — аппроксимация решения обратной задачи  $l$ , которая соответствует минимуму функционала  $IP(\hat{q}^{(l)}; u^{\alpha, (l)})$  (10).

В данной работе мы применяли метод Optuna [24] для решения задачи минимизации функционала (10). Границы изменения параметров были выбраны как  $[q_i^{exact} \cdot 0.3, q_i^{exact} \cdot 2.5]$ , а количество испытаний  $N_O = 1000$  либо при достижении значения  $IP(\hat{q}^{(l)}; u^{\alpha, (l)}) \leq 10^{-5}$ .

На рисунке 6 представлены точные  $q^{exact}$  и восстановленные  $\hat{q}^{(1)}$ ,  $\hat{q}^{(2)}$  значения параметров обратных задач 1 и 2. В таком случае значения погрешностей  $err^{(1)} = 4.22$ ,  $err^{(2)} = 3.45$  и функционалов  $IP(\hat{q}^{(1)}; u^{\alpha, (1)}) = 2.5 \cdot 10^{-6}$ ,  $IP(\hat{q}^{(2)}; u^{\alpha, (2)}) = 1.4 \cdot 10^{-7}$ . Решение обратной задачи 2 ближе к точному, так как необходимо было определить только вектор неизвестных параметров  $q$ , тогда как при решении обратной задачи 1 для каждого приближения  $q^n$  также необходимо было определять функцию управления  $\alpha(x, t)$ .

На рисунке 7 представлены графики абсолютных разностей функций  $u_{l,j}^\alpha$ ,  $\alpha_{l,j}$  прямой задачи (3), (5), (6) и функций  $u_{l,j}^{\alpha, (2)}$ ,  $\alpha_{l,j}^{(2)}$  обратной задачи 2. Функции  $u(x, t)$  и  $\alpha(x, t)$  для точного и найденного решений отличаются только в начальные моменты времени, то есть при решении прямой задачи среднего поля определяются оптимальные для функционала (2) значения этих функций.

## 5 Заключение

Построена и проанализирована модель среднего поля, которая описывает процесс распространения информации в онлайн социальных сетях



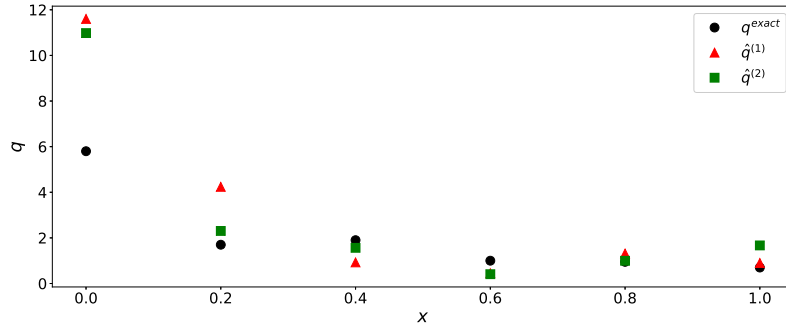
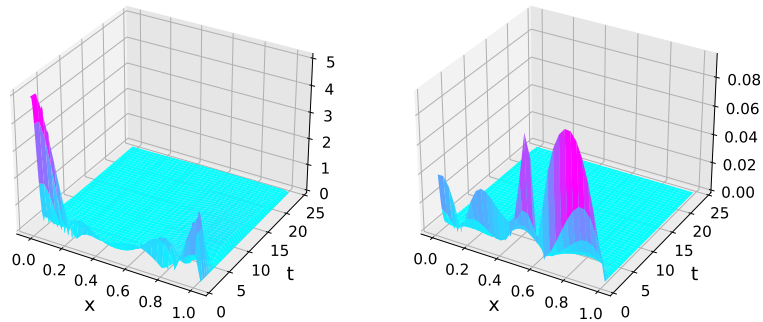


Рис. 6. Восстановленные значения вектора параметров  $q \in \mathbb{R}^6$ . Черные точки — точные значения параметров обратной задачи  $q^{exact}$ , красные треугольники — восстановленные значения параметров  $\hat{q}^{(1)}$  обратной задачи 1, зеленые квадраты — восстановленные значения параметров  $\hat{q}^{(2)}$  обратной задачи 2.



(a)  $|u_{l,j}^{\alpha,(2)} - u_{l,j}^{\alpha}|$

(b)  $|\alpha_{l,j}^{(2)} - \alpha_{l,j}|$

Рис. 7. Графики абсолютных разностей функций  $u_{l,j}^{\alpha}$ ,  $\alpha_{l,j}$  прямой задачи и функций  $u_{l,j}^{\alpha,(2)}$ ,  $\alpha_{l,j}^{(2)}$  обратной задачи 2 для (a) распределения пользователей по степени вовлеченности  $|u_{l,j}^{\alpha,(2)} - u_{l,j}^{\alpha}|$  и (b) функций управления  $|\alpha_{l,j}^{(2)} - \alpha_{l,j}|$ ,  $l = 0, \dots, N_t$ ,  $j = -1/2, \dots, N_x + 1/2$ .

с учетом внешнего воздействия. Определена оптимальная стратегия поведения пользователей, вовлеченных в процесс распространения информации, при условии ограничений на распространения информации. Изучена чувствительность параметров модели, влияющих на управление, и

начальных условий. Анализ чувствительности показал, что модель более чувствительна к коэффициенту функционала стоимости, который отражает плату за текущее состояние пользователей. А также показано, что модель во все моменты времени чувствительна к начальной функции плотности уравнения Колмогорова—Фоккера—Планка, что позволяет исследовать задачу идентификации начальной плотности пользователей по данным изменений плотности в последующие моменты времени.

Сформулированы обратные задачи определения начального условия по дополнительной информации о процессе распространения информации при добавлении управления. Обратные задачи отличались между собой функцией управления и были сведены к задаче минимизации функционалов невязки. С помощью байесовской оптимизации численно исследованы решения полученных обратных задач для синтетических данных. Показано, что в случае заданного управления, являющегося оптимальным для синтетического точного решения обратной задачи, относительная погрешность решения обратной задачи меньше, чем в случае оптимального управления для каждой аппроксимации решения внутри итерационного процесса минимизации функционала невязки.

## References

- [1] S. Sawyer, M. Tyworth, *Social informatics: principles, theory, and practice*, In Berleur, J., Nurminen, M.I., Impagliazzo, J. (eds), *Social informatics: an information society for all? In remembrance of Rob Kling*, Proc. Seventh Int. Conf. Hum. Choice Comput., **223**, Springer, Boston, 2006, 49–62.
- [2] W. Goffman, V. Newill, *Generalization of epidemic theory: an application to the transmission of ideas*, Nature, **204** (1964), 225–228.
- [3] M.S. Granovetter, *Threshold models of collective behavior*, Amer. J. Sociol., **83**:6 (1978), 1420–1443.
- [4] J. Goldenberg, B. Libai, E. Muller, *Talk of the network: A complex systems look at the underlying process of word-of-mouth*, Mark. Lett., **12** (2001), 211–223.
- [5] F. Wang, H. Wang, K. Xu, *Diffusive logistic model towards predicting information diffusion in online social networks*, Proc. 32-nd Int. Conf. Distrib. Comput. Sys. Workshops, 2012, 133–139.
- [6] F. Wang, H. Wang, K. Xu, J. Wu, X. Jia, *Characterizing information diffusion in online social networks with linear diffusive model*, Proc. 33-nd Int. Conf. Distrib. Comput. Sys. Workshops, 2013, 307–316.
- [7] A. Lachapelle, *Human crowds and groups interactions: a mean field games approach* HAL, (2010), Preprint No. 00484097.
- [8] D. Bauso, H. Tembine, T. Basar, *Opinion dynamics in social networks through mean-field games*, SIAM J. Control Optim., **54**:6 (2016), 3225–3257. Zbl 1351.93004
- [9] W. Lee, S. Liu, H. Tembine, W. Li, S. Osher, *Controlling propagation of epidemics via mean-field control*, SIAM J. Appl. Math., **81**:1 (2021), 190–207. Zbl 1458.92075
- [10] V. Petrakova, O. Krivorotko, *Mean field game for modeling of COVID-19 spread*, J. Math. Anal. Appl., **514** (2022), Article ID 126271. Zbl 1492.91044
- [11] L. Fatone, F. Mariani, M.C. Recchioni, F. Zirilli, *A trading execution model based on mean field games and optimal control*, Appl. Math., **5** (2014), 3091–3116.
- [12] N.V. Trusov, *Numerical solution of mean field games problems with turnpike effect*, Lobachevskii J. Math., **41**:4 (2020), 561–576. Zbl 1450.49015

- [13] L. Ding, W. Li, S. Osher, W. Yin, *A mean field game inverse problem*, J. Sci. Comput., **92**:1 (2022), Paper No. 7. Zbl 1493.91016
- [14] A. Bensoussan, J. Frehse, P. Yam, *Mean field games and mean field type control theory*, Springer, New York, 2013. Zbl 1287.93002
- [15] O. Krivorotko, T. Zvonareva, N. Zyatkov, *Numerical solution of the inverse problem for diffusion-logistic model arising in online social networks*, In: Strelakovsky, A. (ed.) et al., *Mathematical optimization theory and operations research: recent trends. MOTOR 2021*, Commun. Comput. Info. Sci., **1476**, Springer, Cham, 2021, 444–459. MR4348070
- [16] T.A. Zvonareva, O.I. Krivorotko, *Comparative analysis of gradient methods for source identification in a diffusion-logistic model*, Comput. Math. Math. Phys., **62**:4 (2022), 674–684. Zbl 1492.91255
- [17] T.A. Zvonareva, S.I. Kabanikhin, O.I. Krivorotko, *Numerical algorithm for source determination in a diffusion-logistic model from integral data based on tensor optimization*, Comput. Math. Math. Phys., **63**:9 (2023), 1654–1663. Zbl 7752288
- [18] V. Shaydurov, V. Kornienko, *A finite-difference solution of mean field problem with a predefined control resource*, AIP Conf. Proc. **2302** (2020), Paper No. 110004.
- [19] V. Shaydurov, V. Kornienko, *Numerical solution of mean field problem with limited management resource*, Lobachevskii J. Math., **42**:7 (2021), 1686–1696. Zbl 1496.91012
- [20] V. Shaydurov, V. Kornienko, S. Zhang, *The Euler-Lagrange approximation of the mean field game for the planning problem*, Lobachevskii J. Math., **41**:12 (2020), 2702–2713. Zbl 1466.65080
- [21] T. Zvonareva, O. Krivorotko, *Identifiability analysis for source problem of quasi-hyperbolic equation*, Proc. 5th Int. Conf. Probl. Cybern. Inform., (2023), 1–4.
- [22] I.M. Sobol', *Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models*, Math. Model. Comput. Exp., **1**:4 (1993), 407–414. Zbl 1039.65505
- [23] A. Saltelli, *Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices*, Comput. Phys. Commun., **145**:2 (2002), 280–297. Zbl 0998.65065
- [24] T. Akiba, Sh. Sano, T. Yanase, T. Ohta, M. Koyama, *Optuna: A Next-generation hyperparameter optimization framework*, Proc. 25th ACM SIGKDD Int. Conf. Knowl. Discov. & Data Min., Association for Computing Machinery, New York, 2019, 2623–2631.

TATIANA ALEKSANDROVNA ZVONAREVA  
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
 PR. KOPTYUGA, 4,  
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address:* [t.zvonareva@math.nsu.ru](mailto:t.zvonareva@math.nsu.ru)

OLGA IGOREVNA KRIVOROTKO  
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
 PR. KOPTYUGA, 4,  
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address:* [krivorotko.olya@mail.ru](mailto:krivorotko.olya@mail.ru)